Exercice 1 Soit $f : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \text{Borel})$ une fonction mesurable et

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & \text{si} \quad f(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad f(x) = 0 \end{cases}$$

Montrer que g est mesurable. Indication: étudier d'abord le cas $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Soit $f : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\overline{\mathbb{R}_+}, \text{Borel})$ une application mesurable. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$E_k^n := f^{-1}\left(\left[\tfrac{k}{2^n}, \tfrac{k+1}{2^n}\right)\right) \quad k = 0 \ldots n\,2^n \quad \text{et} \quad F_n := f^{-1}([n, +\infty]),$$

puis

$$f_n := n\,1_{F_n} + \sum_{0 \le k < n\,2^n} \tfrac{k}{2^n}\,1_{E_k^n}.$$

a) Pour $f(x) = |x|$, expliciter f_1, f_2 et f_3.
b) Montrer dans le cas général que $0 \le f_1 \le f_2 \le f_3 \le \ldots \le f$.
c) Montrer que $\lim_n f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega$. Indication: comparer $f(x)$ et $f_n(x)$ sur $\bigcup E_k^n$.
d) Montrer que la convergence est même uniforme si f est supposée bornée.

Exercice 3 Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}(1-x).$$

a) Déterminer l'ensemble D des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $(f_n)_{k=1}^{\infty}$ est une suite croissante de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$. Trouver un équivalent (presque partout) de la limite.
b) Démontrer que:
$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 x^{2k}(1-x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$
c) En déduire que
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2).$$
d) De la même façon, considérer $f_k(x) = (-1)^k x^{2k}(1-x)$ pour déterminer la valeur de la somme:
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)}.$$

Exercice 4 Soit $f_n : (X, \tau) \to ([0, +\infty], \text{Borel})$ mesurable ($n \in \mathbb{N}$). On pose:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in X).$$

Montrer que $\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n d\mu$. En déduire que, si $a_{ij} \geq 0$ pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Exercice 5 Soit $f(t) = \frac{\ln(t)}{t-1}$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} n^{-2}$ converge, déduire que $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} -t^n \ln(t)$ pour $t \in [0, 1]$. Déduire que f est intégrable sur $(0, 1)$ et

$$\int_{(0,1)} f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^2}.$$

Il n'est pas demandé d'évaluer cette série!

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ décroissante et intégrable avec $\int_0^{\infty} f(t)\, dt > 0$. Montrer que pour $h > 0$,

$$\int_h^{\infty} f(t)\, dt \leq h \sum_{n=1}^{\infty} f(nh) \leq \int_0^{\infty} f(t)\, dt.$$

Exercice 7 Soit f une fonction positive intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $A \in \text{Borel}(\mathbb{R})$, on pose

$$\mu(A) := \int_A f(x)\, dx$$

Montrer que μ est une mesure sur $\text{Borel}(\mathbb{R})$.