Autour de la définition de l'intégrale de Riemann

Exercice 1 Montrer, en utilisant la définition, que toute fonction continue sur $[a, b]$ est Riemann intégrable.

Exercice 2 On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$. Montrer que $f(x) = x^2$ est Riemann intégrable sur $[0, 1]$ et calculer l'intégrale avec les sommes de Riemann.

Exercice 3 Étudier intégrabilité au sens de Riemann sur $[0, 1]$ de la fonction f défini par $f(x) = \sin(1/x)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

Exercice 4 Soit f l'indicatrice de $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Justifier que toute fonction en escalier $\psi \geq f$ satisfait $\psi(x) \geq 1$ et que que toute fonction en escalier $\phi \leq f$ satisfait $\phi(x) \leq 0$. En déduire que f n'est pas Riemann intégrable sur $[0, 1]$.

Exercice 5 Soit g l'indicatrice de $\{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que g est Riemann intégrable sur $[0, 1]$: construire pour $\varepsilon > 0$ des fonctions en escalier $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ tel que

$$\phi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon \quad \text{et} \quad 0 \leq \int_0^1 (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) < \varepsilon. \qquad (*)$$

Exercice 6 Sur $(0, 1)$ on définit la fonction

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ avec } p \wedge q = 1 \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

a) Faire une “esquisse” de la fonction h (considérer p. ex. $x = k/q$ pour q premier).
b) Montrer que g est Riemann intégrable: construire pour $\varepsilon > 0$ des fonctions en escalier $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ qui satisfont (*).

Exercice 7 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann intégrable et $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. Montrer qu'il existe $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [\alpha, \beta]$.
Indication: utiliser la définition avec $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

Calculs de limites via sommes de Riemann

Exercice 8 Calculer les limites suivants:

$$\lim_{n\to+\infty} n \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k^2+n^2} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{3n} \frac{k^{69}}{n^{96}} \qquad \lim_{n\to+\infty} \tfrac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} (n+k)^{1/n}$$

Ensembles dénombrables

Exercice 9 Montrer que toute partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable. Déduire qu'un ensemble infini est dénombrable si est seulement s'il existe une injection dans $\mathbb{N}$.

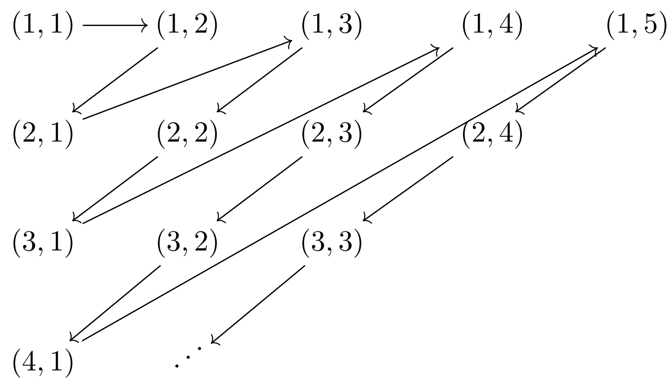
Exercice 10 Soient A un ensemble (quelconque) et $B \subset A$. Montrer que s'il existe une injection $\phi : A \to B$ alors il existe une bijection entre A et B.
Indication: Soit

$$C_0 := A \backslash B, \qquad C_{n+1} := \phi(C_n), \qquad \text{et } C := \bigcup C_n.$$

On introduit l'application ψ par $\psi(x) = \phi(x)$ si $x \in C$ et $\psi(x) = x$ si $x \notin C$. Montrer que ψ est la bijection recherché.

Exercice 11 Montrer un théorème de Cantor: si $f : E \to F$ est injective et $g : F \to E$ est injective, alors il existe une bijection entre E et F. Indication: considérer $\phi = g \circ f$, choisir A, B convenablement et appliquer l'exercice précédent.

Exercice 12 Déterminer une bijection $\phi : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$. Indication: utiliser le schéma suggéré. S'en servir pour montrer qu'une "union dénombrable d'ensembles dénombrables" est dénombrable, c'est à dire: l'ensemble A défini par



$$A := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

est dénombrable si Λ est dénombrable ainsi que tout ensemble A_λ pour $\lambda \in \Lambda$.

Exercice 13 On veut montrer que $[0, 1]$ n'est pas dénombrable. Par absurde on suppose l'existence d'une suite (x_n) tel que $[0, 1] = \bigcup\{x_n\}$. Soit $a_0 = 0, b_0 = 1$ et $I_0 = [a_0, b_0]$. Justifier que au moins un des trois intervalles

$$[a_{n-1}, \tfrac{1}{3}(2a_{n-1} + b_{n-1})] \qquad [\tfrac{1}{3}(2a_{n-1} + b_{n-1}), \tfrac{1}{3}(a_{n-1} + 2b_{n-1})] \qquad [\tfrac{1}{3}(a_{n-1} + 2b_{n-1}), b_{n-1}]$$

ne contient pas x_n pour $n = 1$. Pour un tel intervalle $I_1 = [a_1, b_1]$, on itère la procédure pour obtenir un intervalle I_2 qui ne contient pas x_2 etc. On a ainsi une suite d'intervalles $(I_n)_{n \geq 0}$, $I_n = [a_n, b_n]$ tel que $x_n \notin I_n$. Montrer que $\bigcap_n I_n$ est réduit à un seul point et conclure par une contradiction.

Exercice 14 Pour un ensemble E quelconque on définit $\mathcal{P}(E) := \{A : \ A \subset E\}$.

1. Montrer que si $|E| = n$, alors $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$.
2. Montrer, pour un ensemble E quelconque, que $\mathcal{P}(E)$ est 'strictement plus grand' que E dans le sens qu'il n'y a pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$ (Indication: supposer par absurde l'existence d'une telle bijection ϕ et considérer $F = \{x : \ x \notin \phi(x)\}$).

Exercice 15 De l'exercice précédent suit que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable. Montrer que l'ensemble des parties *finies* de $\mathbb{N}$ est un ensemble dénombrable.