Algèbres de Boole et tribus

Exercice 1 Déterminer lesquelles des familles suivantes sont des algèbres de Boole sur l'ensemble Ω? Des tribus? Si une famille $\mathcal{E}$ n'est pas une algèbre de Boole, trouver l'algèbre de Boole engendrée par $\mathcal{E}$.

a) $\mathcal{E}_1 = \{\Omega, \emptyset\}$ sur Ω.
b) $\mathcal{E}_2 = \{\Omega, A, A^c, \emptyset\}$ pour un $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ fixé.
c) $\mathcal{E}_3 = \{A \subset \Omega :\ A$ ou $A^{\complement}$ est fini$\}$.
d) $\mathcal{E}_4 = \{A \subset \Omega :\ A$ ou $A^{\complement}$ est au plus dénombrable$\}$.
e) $\mathcal{E}_5 = \{\Omega, A, B, \emptyset\}$ si $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Exercice 2 Soit Ω un ensemble. On définit la différence symétrique:

$$\Delta : \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{P}(\Omega)$$

par $A \,\Delta\, B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

a) Montrer que, si $\mathcal{E}$ est une algèbre de de Boole sur Ω et $A, B \in \mathcal{E}(\Omega)$ alors:

$$A \cap B \in \mathcal{E}, \quad A \backslash B \in \mathcal{E}, \quad A \,\Delta\, B \in \mathcal{E}.$$

b) Montrer que, si $\mathcal{E}$ est une famille de parties de Ω alors $\mathcal{E}$ est une algèbre de Boole si et seulement si $X \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{E}$ est stable pour les opérations Δ et $\cup$.
c) Montrer que, si $\mathcal{E}$ est une famille de parties de Ω alors $\mathcal{E}$ est une algèbre de Boole si et seulement si $X \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{E}$ est stable pour les opérations Δ et $\cap$.
d) Montrer que, si $\mathcal{E}$ est une algèbre de Boole, alors $\mathcal{E}$ muni de Δ comme addition et $\cap$ comme multiplication est un anneau.

Exercice 3 Soient $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ des algèbres de Boole sur des ensembles Ω_1 et Ω_2.

a) Montrer que, en général, $\{A \times B : A \in \mathcal{E}_1$ et $B \in \mathcal{E}_2\}$ n'est pas une algèbre de Boole. Quelle est l'algèbre de Boole engendrée par cette famille?
b) Soit $A_1 \subseteq \Omega_1$. La famille $\{A_1 \times B : B \in \mathcal{E}_2\}$ est-elle une algèbre de Boole?

Exercice 4 Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Déterminer tous les tribus sur Ω.

Exercice 5 Soit X un ensemble, $Y \subset X$ un sous-ensemble non vide de X et $\mathscr{A}$ une tribu sur Y. Quelle est la tribu de X engendrée par $\mathscr{A}$?

Exercice 6 Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur X, $\mathscr{B}$ une tribu sur Y, et $f : X \to Y$ une application. Montrer que

$$\{f^{-1}(B) :\ B \in \mathscr{B}\} \quad \text{et} \quad \{B \subset Y :\ f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$$

sont des tribu sur X respectivement sur Y.

Exercice 7 Montrer que les ensembles suivants sont des éléments de la $\sigma-$algèbre de Borel? $A = [0, 1)$ $B = \{1, 2\}$ $C = \mathbb{Q}$ $D = [0, 1]$ $E = \{x : \ x \text{ est négatif et rationnel ou positif et irrationnel}\}$.

Exercice 8 Est-ce que la $\sigma-$algèbre de Borel est engendrée par les singletons? les intervalles de la forme $(a, +\infty)$? les intervalles fermés?

Exercice 9 Soit $\mathcal{B}$ la tribu Borelienne sur $\mathbb{R}$. Que peut on dire de la tribu $\mathcal{A} = \{B \cap \mathbb{Q} : \ B \in \mathcal{B}\}$ sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 10 Donner une tribu sur $\mathbb{R}$ qui est strictement plus fine que la tribu Borelienne, et une autre tribu strictement plus grossière.

Exercice 11 Soit $x \in \mathbb{R}$. Est-ce que $\{x\}$ est un ensemble Borelien? Qu'en est il pour $A \subset \mathbb{R}$ si A est dénombrable? Soit $B = [0, 1] \backslash \mathbb{Q}$. Est-ce que B est un ensemble Borelien?

Exercice 12 Soit $I_0 = [0, 1]$. On forme I_1 de I_0 en enlevant le tiers central de I_0, c'est à dire

$$I_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1].$$

Ensuite, on forme I_2 en enlevant le tiers central de chaque composante connexe de I_1, ce qui donne

$$I_2 = \left[0, \tfrac{1}{9}\right] \cup \left[\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}\right] \quad \cup \quad \left[\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}\right] \cup \left[\tfrac{8}{9}, 1\right]$$

On itère la procédure. Voici un esquisse des premières six itérations:

Soit $\mathcal{C} = \bigcap_{n \geq 0} I_n$ l'ensemble de Cantor.

a) $\mathcal{C}$ est non-vide! Donner par ex. 4 points dans $\mathcal{C}$.
b) Monter que $\mathcal{C}$ est un ensemble infini.
c) Est-ce que C est un ensemble Borelien?
d) Montrer que $\lambda(I_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Déduire $\lambda(\mathcal{C}) = 0$.
e) Soit X un espace vectriel et $A, B \subset X$ deux ensembles dénombrables. Montrer que $A + B = \{a + b : \ a \in A, B \in B\}$ est dénombrable (indication: considérer $\phi : X \times X \to X$, $\phi(x, y) = x + y$).
f) Soit $Q_n = I_n \times I_n$, $Q = \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, et $D : x + y = a$ avec $a \in [0, 2]$.
Étudier $D \cap I_n$ pour montrer que $D \cap Q \neq \emptyset$ (indication: utiliser la compacité!).
Déduire que $\mathcal{C} + \mathcal{C} = [0, 2]$. Comparer avec (d). Est-ce que $\mathcal{C}$ est dénombrable?