Exercice 1

a) Montrer que $1 + nx \leq (1+x)^n$ pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, puis calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}\, dx.$$

b) Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f(x) e^{-n\sin^2 x} dx.$$

Exercice 2 On considère sur $([0,1], \tau_{\text{Lebesgue}})$ la mesure ν de Lebesgue et la mesure de dénombrement μ_d. Soit D la diagonale du carré $[0,1]^2$, i.e. $D = \{(x,x) : x \in [0,1]^2\}$.

a) Montrer que la fonction $\mathbb{1}_D$ est Lebesgue-mesurable.

b) Calculer

$$\int_0^1 \int_0^1 \mathbb{1}_D(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu_d(x) \text{ et } \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{1}_D(x,y)\, d\mu_d(x)\, d\nu(y).$$

Expliquer pourquoi les hypothèses de Fubini ne sont pas satisfaites ici.

Exercice 3 Soit (E, τ, μ) un espace mesuré et $(f_n)_n$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives qui converge presque partout vers une fonction f. On suppose que $\int_E f_0 d\mu < +\infty$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu < +\infty \tag{1}$$

a) Avec le théorème de convergence monotone;

b) Avec le théorème de convergence dominée.

Finalement, montrer que l'hypothèse $\int_E f_0 d\mu < +\infty$ est nécessaire pour avoir (1).

Exercice 4 Donner un exemple d'une suite de fonctions (f_n) de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}$ telle que:

a) Pour chaque $x \in \mathbb{R}$ fixé, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$;

b) Aucune fonction g qui domine (f_n) (c.a.d. $\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} :\ |f_n(x)| \leq g(x)$) n'est intégrable;

c) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) = 0$.

Comparer avec le théorème de convergence dominée.

Exercice 5 Soit (E, τ, μ) un espace mesuré tel que $\mu(E) < +\infty$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables qui convergent uniformément vers une fonction f sur E. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| d\mu = 0$ mais que ce résultat devient faux si l'on enlève l'hypothèse $\mu(E) < +\infty$.