Direction de la Scolarité et de la Vie Étudiante

UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies

L I C E N C E

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2011 /2012

Corrigé du devoir surveillé

Épreuve : MOSE1003

Date : 14 Octobre 2011

Heure : 8h30 *Durée :* 1h30

Épreuve des enseignants de SVTE

La "calculatrice Bordeaux 1" est autorisée

Tous Documents Interdits

Département Licence

Corrigé

Question 1 *Dériver les fonctions suivantes :*

$$f(x) = \cos(2x+1), \qquad g(x) = x\arctan(x), \qquad et \qquad h(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^2}.$$

On a $f'(x) = -2\sin(2x+1)$ (composition de sin avec $2x+1$), par la règle de produits, $g'(x) = \arctan(x) + x(\arctan')(x) = \arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}$ et finalement pour la fraction h on obtient

$$h'(x) = \frac{\cos(x)(1+x^2) - 2x\sin(x)}{(1+x^2)^2}$$

Question 2

(a) *Donner la formule d'intégration par parties.*

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) \quad - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$$

(b) *Calculer*

$$\begin{aligned}\int_0^6 (1+xe^{x/6})\,dx &= \int_0^6 1\,dx + \int_0^6 xe^{x/6}\,dx \\ \text{IPP} = 6 &+ \left[6xe^{x/6}\right]_0^6 - \int_0^6 6e^{x/6}\,dx \\ &= 6 + 36e - \left[36e^{x/6}\right]_0^6 \\ &= 6 + 36e - 36e + 36 = 42.\end{aligned}$$

Remarque : Dans GOOGLE, entrez "42" et cliquez sur "j'ai de la chance" ...

Question 3 *Soit* $D = [1,2]\times[3,4]$. *Calculer*

$$\begin{aligned}\int_D 8xy\,dx\,dy &= \int_1^2\int_3^4 8xy\,dy\,dx \\ &= \int_1^2 \left[4xy^2\right]_{y=3}^{y=4} dx \\ &= \int_1^2 28x\,dx \\ &= \left[14x^2\right]_{x=1}^{x=2} = 42.\end{aligned}$$

Alternativement, on a

$$\int_D 8xy\,dx\,dy = 2\left(\int_1^2 2x\,dx\right)\cdot\left(\int_3^4 2y\,dy\right) = 2(2^2-1^2)(4^2-3^2) = 42$$

Question 4 *Soit* $f(x) = e^{\cos(x)-1}$.

(a) *Déterminer* $f'(x)$ *et* $f''(x)$*, puis calculer* $f'(0)$ *et* $f''(0)$.
On a $f'(x) = -\sin(x)e^{\cos(x)-1}$ (composition) et $f''(x) = -\cos(x)e^{\cos(x)-1} + \sin(x)^2)e^{\cos(x)-1}$ (produit et composition). Ainsi, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -1$.

(b) *Donner la formule de Taylor-Young (ou le développement limité) d'ordre 2 pour la fonction* f *en* $x_0 = 0$.

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \tfrac{x^2}{2}f''(x) + o(x^2) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

(c) *Calculer la limite suivante :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos(x)-1} - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Question 5 *Soit* $f(x,y) = x^3 + xy - y^2$.

(a) *Calculer les dérivés partielles* $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ *de la fonction* f.
$f_x(x,y) = 3x^2 + y$ et $f_y(x,y) = x - 2y$.

(b) *Trouver les points critiques de la fonction* f*, c'est-à-dire l'ensemble*

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0\right\}.$$

Un point critique est un point ou les deux dérivées partielles s'annulent. On a donc $3x^2 + y = 0$ et $x - 2y = 0$. La dernière équation dit que $x = 2y$ ce qu'on peut injecter dans la première pour obtenir $12y^2 + y = y(12y+1) = 0$ donc soit $y = 0$ soit $y = -\frac{1}{12}$. Pour x on ontient donc $x = 0$ si $y = 0$ et $x = -\frac{1}{6}$ si $y = -\frac{1}{12}$. Les points critiques sont

$$(0,0) \qquad \text{et} \qquad (-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}).$$

FIN