Exercice 1 Résoudre les équations différentielles suivantes:

$y' + 5y = 3$ avec la condition initiale $y(0) = 0$
$y' + 3y = 4e^x$ avec la condition initiale $y(0) = -2$
$y' + y = xe^{-x} + 1$ (donner toutes les solutions)
$3y' + 2y = x^3 + 6x + 1$ (donner toutes les solutions)
$y' - y = \sin(x) + 2\cos(x)$ (donner toutes les solutions)
$y' = 3y + \sin(3x)$ (donner toutes les solutions)
$y' = 3y + \sin(3x) + \sin(2x)$ (donner toutes les solutions)

Exercice 2 Déterminer les solutions aux problèmes homogènes suivants:

$$y'(x) = x\,y(x) \qquad y'(x) = \frac{1}{x}\,y(x) \qquad y'(x) = x^2\,y(x)$$

$$y'(x) = \frac{1}{x^2}\,y(x) \qquad y'(x) = e^x y(x) \qquad y'(x) = \frac{x\,y(x)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$y'(x) = \log(x)\,y(x) \qquad y'(x) = \sin(x)\cos(x)\,y(x)$$

Exercice 3 Déterminer les solutions aux problèmes homogènes suivants:

$$y'(x) = \frac{2}{x+1}y(x) \qquad y'(x) + \cos(x)y(x) = 0 \qquad xy' + 3y = 0$$

Exercice 4 Déterminer les solutions aux problèmes inhomogènes associés aux problèmes ci-dessus.

$$y'(x) = \frac{2}{x+1}y(x) + (x+1)^2\cos(x) \qquad y'(x) + \cos(x)y(x) = \sin(x)\cos(x) \qquad xy' + 3y = x^2$$

Exercice 5 Déterminer les solutions aux problèmes inhomogènes suivantes

$$(1+x^2)\,y'(x) - 2x\,y(x) = (1+x^2)^2 \qquad y'(x) + 2x\,y(x) = 2xe^{-x^2} \qquad y'(x) = x^2(1 - y(x))$$

Exercice 6 (Problèmes avec valeur initiale) Déterminer les solutions (uniques!) des problèmes de l'exercice 2 à satisfaire

$$y(0) = 1 \qquad y(1) = \pi \qquad y(1) = e$$

$$y(2) = 1 \qquad y(0) = e \qquad y(2) = 0$$

$$y(1) = 1 \qquad y(\tfrac{\pi}{2}) = 1$$

Exercice 7* (Méthode de Bernoulli) Les problèmes suivants sont de la forme $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^n$. On les reduira à des problème linéaires de première ordre en substituant $z(x) = y(x)^{1-n}$. Donnez ensuite la solution unique et précisez l'intervalle maximal d'éxistence.

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + y(x)^2, \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) - 2xy(x)^3 \\ 2y(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = xy(x)^2 + \frac{xy(x)}{1+x^2} \\ y(0) = -3 \end{cases}$$

Exercice 8 Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer l'ensemble des solutions, puis, la solution qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

$y'' + 2y' - 3y = -t + 1$
$y'' + 2y' - 3y = e^t$
$y'' + 2y' - 3y = -t + 1 + e^t + \cos(t)$
$y'' - 6y' + 9y = 3 + e^{3t}$
$y'' - 3y' = 3 + t^2$
$y'' + y = t + \sin(t)$

Quelques exercices en applications

Exercice 9 On considère une population formé de N individus et évoluant en fonction du temps $t > 0$.

1. Dans le modèle de Malthus on suppose que le taux d'accroissement de la population est proportionnel au nombre d'individus.
   (a) Justifier que dans ce modèle N vérifie l'équation $\frac{N(t+h)-N(t)}{h} = kN(t)$ pour une certaine constante k. On suppose désormais que N est dérivable. Déduire que $N'(t) = kN(t)$.
   (b) Déterminer $N(t)$ si à l'instant $t = 0$ la population est de N_0 individus.
   (c) Comment évolue cette population lorsque t tend vers l'infini?

2. Le modèle de Verhulst prend en compte que les ressources de l'environnement ne sont pas illimitées et suppose que le taux k n'est plus constant mais proportionnel à la différence entre une population maximale N^* et la population à l'instant t. On a alors $k(t) = r(N^* - N(t))$ et N est solution de l'équation $N'(t) = rN(t)(N^* - N(t))$ (appelée équation logistique).
   (a) On admet que la population n'est jamais nulle et on pose $y(t) = 1/N(t)$. Calculer N' en fonction de y et y'. Justifier que y est dérivable puis calculer N' en fonction de y et y'.
   (b) Remplacer N' et N par leurs expressions en fonctions de y' et y dans l'équation logistique et vérifier que y est solution de l'équation différentielle
   $$y' = r(1 - Ny).$$
   (c) Résoudre l'équation précédente.
   (d) En déduire que $N(t) = \frac{N^*}{1+Ke^{-rN^*t}}$ avec une constante réelle K.
   (e) Comment évolue cette population lorsque t tend vers l'infini?

Exercice 10 Pour les substances radioactives, des expériences ont montré que, en l'absence d'apport extérieur, le taux de variation du nombre $Q(t)$ d'atomes radioactifs est proportionnel au nombre d'atomes radioactifs présents. La fonction Q est donc solution de l'équation différentielle $y' = -\mu y$ où μ est une constante propre à la substance radioactive.
(a) On appelle temps de demi-vie pour une substance radioactive le temps T nécessaire pour que la moitié de ses noyaux radioactifs disparaissent, trouver une relation reliant T et μ.
(b) Pour le carbone-14, T est environ de 5730 ans, que vaut approximativement μ ?
(c) L'analyse des restes d'un arbre mort lors d'une éruption volcanique fait apparaître que l'arbre ne contient plus que 40% du carbone-14 qu'il contenait avant l'éruption. De quand date l'éruption si l'analyse a été effectuée en 2006 (penser à utiliser le temps de demi-vie du carbone-14).
(d) Même question avec une analyse plus fine qui donne 42%