Examen MHT 923
Compression, ondelettes et algorithmes afférents

Responsables : Bernhard Haak et Charles Dossal

Date et heure de l'examen : Vendredi, 17 Décembre, 8h30 -11h30 (3 :00h)

Documents admis : aucun.

Questions de cours. A renseigner sur le la feuille

Une multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ est une suite de $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ d' [ ] de $L^2(\mathbb{R})$ qui satisfont certaines propriétés et qui sont associés à une fonction ϕ dite fonction d'échelle.

(a) Quel est le rôle de ϕ par rapport à V_0 ?

(b) Puisque $V_j \subseteq V_{j-1}$ on peut décomposer $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$.

V_j est appelé [ ]

W_j est appelé [ ]

(c) De quel espace les fonctions $(\psi_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ sont une base orthonormée ?

(d) On développe $\phi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n \phi_{-1,n}$. Comment appelle-t-on les coefficients h_n ?

(e) Pour construire une multirésolution en deux variables, c'est à dire sur $L^2(\mathbb{R}^2)$, Comment définit on les espaces $\mathbb{V}_j$?

Exercice 1 Soit $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}, \phi$ une multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. On a les formules

$$\phi(x) = \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n \phi(2x-n) \quad \text{et} \quad \psi(x) = \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n \phi(2x-n) \tag{1}$$

où (h_n) est une suite réelle et où $g_n = (-1)^n h_{1-n}$ (la convergence des sommes étant garanti au moins dans la norme de $L^2(\mathbb{R})$).

(a) En utilisant la définition de $\psi_{j,k}$ en termes de ψ, déduire

$$\psi_{j,k} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} g_{m-2k}\phi_{j-1,m} \tag{2}$$

(b) En déduire pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\langle f, \psi_{j,k}\rangle = \sum_{m\in\mathbb{Z}} g_{m-2k}\langle f, \phi_{j-1,m}\rangle \tag{3}$$

(c) En utilisant la définition de $\phi_{j,k}$ en termes de ϕ, déduire

$$\phi_{j,k} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} h_{m-2k}\phi_{j-1,m} \tag{4}$$

(d) En déduire pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\langle f, \phi_{j,k}\rangle = \sum_{m\in\mathbb{Z}} h_{m-2k}\langle f, \phi_{j-1,m}\rangle \tag{5}$$

(e) Expliquer comment les formules (3) et (5) sont utilisées dans la transformation rapide en ondelette pour calculer les coefficients de f en V_j et W_j à partir des coefficients de f en V_{j-1}.

Exercice 2

(a) On considère une multirésolution $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ avec fonction d'échelle ϕ et ondelette associée ψ. Quel valent $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx$ et $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,dx$ (il ne sera pas nécessaire de justifier le résultat) ?

(b) On essaie de construire une multirésolution en choisissant des coefficients $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Le cas minimal correspond à $h_0h_1 \neq 0$ et $h_k = 0$ si $k \notin \{0,1\}$.

(i) Trouver deux relations (linéaires) liant h_0 et h_1, puis déterminer h_0 et h_1.

(ii) Exprimer $\widehat{h}$ en fonction de h_0 et de h_1 puis déduire que $\widehat{h}(\xi) = \sqrt{2}e^{-i\xi/2}\cos(\xi/2)$.

(iii) Utiliser $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$ pour montrer que

$$\prod_{j=1}^{N}\cos(2^{-j}\xi) = \frac{\sin(\xi)}{2^N\sin(2^{-N}\xi)}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ (on pourra faire par une récurrence sur $N \in \mathbb{N}^*$).

(iv) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} 2^N\sin(2^{-N}\xi) = \xi$.

(v) Montrer

$$\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{\widehat{h}(2^{-j}\xi)}{\sqrt{2}}\right) = e^{i(\xi/2)(1-2^{-N})}\frac{\sin(\xi/2)}{2^N\sin(2^{-N}(\xi/2))}.$$

En effctuant le passage à la limite $N \to +\infty$, en déduire $\widehat{\phi}$.

(vi) Soit $f(x) = \mathbb{1}_{[-1,0]}(x)$. Calculer $\widehat{f}(\xi)$ puis déduire ϕ.

(vii) Utiliser (1) pour trouver l'ondelette ψ associée.

Problème. Soit $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ une fonction telle qu'il existe $0 < A < B$,

$$A \leq \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 \leq B \tag{6}$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$. On définit

$$\widehat{\phi^\sharp}(\xi) = \frac{\widehat{\phi}(\xi)}{\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2\right)^{1/2}}$$

(a) Montrer que $\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi^\sharp}(\xi + 2\pi l)|^2 = 1$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

(b) On rappelle qu'une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2$ si et seulemet si $\widehat{a}(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e^{-in\xi}$ est une fonction de $L^2(0, 2\pi)$. On désigne par V_0 le sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$ engendré par les translations de ϕ, i.e. $V_0 = \overline{\text{lin}\{\phi_k :\ k \in \mathbb{Z}\}}$.

Montrer que $f \in V_0$ si et seulement s'il existe une fonction 2π-périodique $\widehat{a} \in L^2(0, 2\pi)$ telle que $\widehat{f}(\xi) = \widehat{a}(\xi)\widehat{\phi}(\xi)$.

(c) En déduire que $V_0 = V_0^\sharp$.

(d) Soit $\phi(x) = 1 - |x|$ pour $x \in [-1, 1]$ et $\phi(x) = 0$ ailleurs. Faire un dessin du graphe de ϕ. On pose (comme d'habitude) $\phi_k(x) := \phi(x - k)$ et on définit le sous-espace $V_0 = \overline{\text{lin}\{\phi_k :\ k \in \mathbb{Z}\}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ engendré par les translations entières de ϕ. On admet qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\phi(x) = a\phi(2x + 1) + b\phi(2x) + c\phi(2x - 1).$$

Déterminer a, b, c (on pourra comparer les valeurs numériques du coté droit et gauche de l'égalité pour $x = -1/2, 0, 1/2$).

(e) Soit $h(x) = \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(x)$. En utilisant le fait que $h * h = \phi$, trouver $\widehat{\phi}$.

(f) Montrer que $\widehat{\phi}$ satisfait (6). Indications :

(i) Pour trouver A on pourra utiliser sans preuve que $\min\{\frac{\sin(x)}{x} :\ x \in [-\pi/2, \pi/2]\} = \frac{2}{\pi}$.

(ii) Pour trouver B distinguer le cas $\frac{\xi}{\pi} \in \mathbb{Z}$ (combien de termes de la somme de (6) sont non-nuls ?) et le cas $\frac{\xi}{\pi} \notin \mathbb{Z}$ et utiliser $|\frac{\sin(x)}{x}| \leq \min(1, \frac{1}{|x|})$.

(g) Un résultat du cours assure que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\xi}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2\right) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\phi(x - n)\, dx \tag{7}$$

Remarquer que le coté droit s'annule pour $|n| > 1$. Puis calculer le coté droit pour $n = 0, 1$. Déduire $n = -1$ par symétrie de $n = +1$.

Remarque (qui n'est pas à démontrer) : *en constatant qu'on vient de calculer les coefficients de Fourier de la fonction $\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2$ en (7) un calcul direct permet d'obtenir que*

$$\widehat{\phi^\sharp}(\xi) = \sqrt{3}\frac{4\sin^2(\xi/2)}{(2\pi)^{1/2}\xi^2(1 + 2\cos^2(\xi/2))^{1/2}}$$

puis de conclure par (7) que les translations entières de $\phi^\sharp$ forment une base orthonormée de $V_0^\sharp = V_0$. Ceci est admis.

Montrons qu'il s'agit d'une multirésolution :
On définit V_j comme d'habitude par dilatations de ϕ :

$$\phi_{j,k}(x) := 2^{-j/2}\phi(2^{-j}x-k) \quad \text{et} \quad V_j := \overline{\mathrm{lin}\{\phi_{j,k} : \ k \in \mathbb{Z}\}}.$$

Ainsi, les similarités $f \in V_j$ si et seulement si $f(2^j\cdot) \in V_0$ et $f \in V_0$ si et seulement si $f(\cdot - k) \in V_0$ sont satisfaites par construction. De plus, la famille des $\phi^\sharp(\cdot - k)$ est par construction une base orthonormée de V_0. Il reste 3 propriétés à vérifier :

(a) *Sous-espaces emboîtés.* Soit $\widetilde{V}_j$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions $\phi_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, l'espace $\widetilde{V}_j$ est formé des **combinaisons linéaires finies** des fonctions $\phi_{j,k}$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et on remarquera que $\overline{\widetilde{V}_j} = V_j$ par definition de V_j.

Soit $f \in \widetilde{V}_0$. Montrer que f est affine par morceaux sur les intervalles $[k, k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$. On pourra se contenter de démontrer ceci sur $[0,1]$. Faire un dessin de $\phi_{0,0}$ et de $\phi_{0,1}$.

Donner une description similaire des fonctions de $\widetilde{V}_{-1}$.

Déduire $\widetilde{V}_0 \subseteq V_{-1}$ puis conclure $V_0 \subseteq V_{-1}$ par un argument de densité.

(b) *(Intersection triviale)* Soit $f \in \bigcap_j V_j$. Utiliser le fait que f est donc affine sur $[k2^j, (k+1)2^j]$ pour *tout* $k, j \in \mathbb{Z}$ pour conclure $f = 0$. Indication : Montrer d'abord que $f|_{[0,2^j]}$ est affine pour tout $j > 0$ et donc affine sur $\mathbb{R}_+$. En calculant $\|ax+b\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}$ déduire $f|_{\mathbb{R}_+} = 0$. Par le même argument on montre également que $f|_{\mathbb{R}_-} = 0$.

(c) *(Densité)* Pour montrer que $D := \bigcup_j V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ il suffit de montrer la densité de D dans les fonctions continues à support compact $C_c(\mathbb{R})$ (mais d'abord pour la norme $\|.\|_{L^2}$!). On suppose que f, g sont à support compact. Montrer que

$$\|f-g\|_{L^2} \le |\mathrm{supp}\ (f-g)|^{1/2}\|f-g\|_\infty.$$

En déduire qu'il suffit de montrer la densité de D dans $C_c(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Soit donc $f \in C_c(\mathbb{R})$. Justifier le fait que f est uniformément continue. Pour un $j \in \mathbb{Z}$ fixé, on considère

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k2^j)\phi_{j,k}(x)$$

Montrer que cette somme est toujours une somme finie. Déduire que g est (uniformément) continue et affine par morceaux. Que vaut $g(k2^j)$? On observera que g *interpole* donc f sur ses valeurs échantillonnées sur la maille dyadique $\{k2^{-j} : \ k \in \mathbb{Z}\}$. Tirer la densité de D dans $C_c(\mathbb{R})$ de la continuité uniforme de f et de g (en choisissant $j < -N$ pour N suffisamment grand).

L'ondelette associée est la première ondelette de la famille dite *Battle-Lemarié.*

— fin —