Quantificateurs

Soit E un ensemble et pour $x \in E$ soit $P(x)$ une proposition qui porte sur des propriétés de x. Elle peut être vraie ou fausse. On utilise deux quantificateurs, $\forall =$ "pour tout" et $\exists =$ "il existe", ensemble avec leur négations.
Un "pour tout" est faux, ssi il existe au moins une exception.
Un "il existe" est faux, ssi le contraire est vrai "pour tout" x.

Exercice 1 Vrai ou faux? & preuve ou contre-exemple!

a) $\forall x \in \mathbb{Z}: \quad 2|x \Rightarrow 4|x.$
b) $\forall x \in \mathbb{Z}: \quad 4|x \Rightarrow 2|x.$
c) $\forall x \in \mathbb{Z}: \quad x < -2.$
d) $\exists x \in \mathbb{Z}: \quad x < -2.$

Chaînes de quantificateurs

On peut poser plusieurs quantificateurs dans une proposition. Il sont à lire de gauche a droite. Quand un $\exists$ apparaît dans une chaîne de quantificateurs, l'objet "qui existe" (ou pas) dépend de tout ce qui précède: dans

$$\forall x \in E \exists y \in E : \forall z \in E : \quad P(x, y, z)$$

le y **dépend** du choix de x, mais pas de z. **Règles:**

$$\forall x \in X \forall y \in Y : P(x, y) \qquad \text{et} \qquad \forall y \in Y \forall x \in X : P(x, y)$$

sont des assertions équivalentes. De même

$$\exists x \in X \exists y \in Y : P(x, y) \qquad \text{et} \qquad \exists y \in Y \exists x \in X : P(x, y).$$

Bref: "des quantificateurs égaux commutent". Qu'en est il pour des quantificateurs "mixtes"? Considérez

$$(1) \forall y \in Y \exists x \in X : P(x, y) \qquad \text{versus} \qquad (2) \exists x \in X \forall y \in Y : P(x, y)$$

Exercice 2 Est-ce que (1) $\Rightarrow$ (2) ou (2) $\Rightarrow$ (1) sont vraies? Ou aucune? Ou les deux? Prouvez le!
Pour illustration non-mathématique, essayez avec $X =$ les êtres humains, $Y =$ le temps, et $P(x, t) =$ "le humain x commet une erreur au moment (temps) t".

Exercice 3 Traduire en "prose" et déterminer si la proposition est vraie ou fausse

a) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: \quad x - y = y - x$
b) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: \quad xy = yx$
c) $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: \quad x^2 + y^2 = 1$
d) $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z}: \quad x + y = 1$
e) $\exists x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z}: \quad x + y = 1$

On voit que "l'ordre compte" dans les deux derniers, ils ne commutent pas.

Exercice 4 "Téléphone arabe": mettez vous 3 ou à 5 étudiants en cercle; chacun écrit en cachette une proposition en utilisant 2-4 quantificateurs. Faites tourner les papiers dans le sens trigonométrique : votre voisin de droite doit alors ré-écrire votre proposition en prose, et vous faites de même avec la proposition de votre voisin de gauche. Puis chacun(e) plie le papier pour cacher les formules, laissant visible que la phrase "en prose". Faites tourner les papiers à nouveau dans le même sens: chaqun(e) a alors seulement une phrase " en prose " – et doit la retraduire en quantificateurs. Puis on plie pour cacher la version "en prose". Continuez jusqu'à ce votre papier revienne vers vous: déplier alors et comparer. Y a t il des erreurs? Où? Pourquoi?

Négations de propositions en quantificateurs

La négation se déroule "mécaniquement". Soit donné une chaîne de quantificateurs avec $Q_i \in \{\exists, \forall\}$

$$Q_1 x_1 \in E_1, \ldots Q_n x_n \in E_n : \qquad P(x_1, \ldots, x_n)$$

alors la négation sera

$$Q_1^{\complement} x_1 \in E_1, \ldots \cancel{Q}_n^{\complement} x_n \in E_n : \qquad \neg P(x_1, \ldots, x_n)$$

où $\exists^{\complement} = \forall$ et réciproquement $\forall^{\complement} = \exists$. Exemple: f est continue sur $\mathbb{R}$ si (déf)

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R} \qquad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

La fonction est donc(!) discontinue si

$$\exists x \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 : \exists y \in \mathbb{R} \qquad |x - y| < \delta \ \mathbf{et} |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

car la négation de $A \Rightarrow B$ est " A et $\neg B$ ".

Quantificateurs cachés

La phrase "Si $x < 0$ alors $f(x) > 0$" est une abréviation pour

$$\forall x \in \mathbb{R} : \qquad x < 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

Il est utile de formuler (au moins dans sa tête) toute phrase de ce type avec des quantificateurs explicites.

Exercice 5 Écrire en quantificateurs " si $m < n$ sont nombres naturels (positifs) alors il existe un nombre rationnel r tel que $\frac{1}{n} < r < \frac{1}{m}$ ".

Quantificateurs et ensembles

Souvent des quantificateurs apparaissent dans des ensembles. Par exemple

$$C = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ est un carré}\}$$

D'abord "est un carré" est un quantificateur caché! Plus formellement, on donc

$$C = \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{Z} : n = k^2\}.$$

On peut "sortir" le quantificateur d'une telle définition, selon la règle

$$\forall \longleftrightarrow \text{intersection} \qquad \text{et} \qquad \exists \longleftrightarrow \text{union}$$

Ainsi,

$$C = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{n \in \mathbb{N} : n = k^2\} = \bigcup_k \{k^2\}.$$

De la même façon

$$\begin{aligned} P =& \{n \in \mathbb{N} : n \text{ n'est pas un carré}\} \\ =& \{n \in \mathbb{N} : \neg(\exists k \in \mathbb{Z} : n = k^2)\} \\ =& \{n \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{Z} : n \neq k^2\} \\ =& \bigcap_k \{n \in \mathbb{N} : n \neq k^2\} \end{aligned}$$

Illustrer les ensembles $A_k = \{n \in \mathbb{N} : n \neq k^2\}$ pour $k = 1, 2, 3$.

Quantificateurs et sup/inf

Exercice 6 Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que $\sup(A) \leq a$ ssi $\forall x \in A : x \leq a$. Que signifie $\sup(A) \geq b$? Ou $\sup(A) > b$?

Exercice 7 Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que $\inf(A) \leq a$ ssi $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : x < a + \varepsilon$. Que signifie $\inf(A) \geq b$? Ou $\inf(A) > b$?

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $B(x, \delta) = (x - \delta, x + \delta)$ la “boule” autour de x de rayon δ.

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \inf\{\sup\{|f(y) - f(z)| : y, z \in B(x, \delta)\} : \delta > 0\} = 0\}$$

Ouff! On a des quantificateurs cachés. D'abord, grâce a la positivité de $|f(x) - f(y)|$, on peut écrire

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \inf\{\sup\{|f(y) - f(z)| : y, z \in B(x, \delta)\} : \delta > 0\} \leq 0\}$$

Puis, il suit que

$$\begin{aligned} C &= \{x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \sup\{|f(y) - f(z)| : y, z \in B(x, \delta)\} \leq \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y, z \in B(x, \delta) : |f(y) - f(z)| :\leq \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{\varepsilon>0} \{x \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 : \forall y, z \in B(x, \delta) : |f(y) - f(z)| :\leq \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\delta>0} \{x \in \mathbb{R} : \forall y, z \in B(x, \delta) : |f(y) - f(z)| :\leq \varepsilon\}. \end{aligned}$$

En fait, C est l'ensemble des points de continuité de f. Mais le but ici est de manipuler des expressions correctement.