Ex 1 (3 derniers!)

(f) pb: $y' = 3y + e^{3x}\sin(x)$

sol. homogène $\quad a(x) = a = 3$

$\Rightarrow A(x) = 3x$

$\Rightarrow y_h(x) = e^{A(x)} = e^{3x}.$

Second membre: $\quad b(x) = e^{3x}\sin(1\cdot x)$

or $3 + 1\cdot i \neq a = 3$

on a $\quad y_p(x) = \underbrace{e^{3x}}_{u}\,(\underbrace{A\sin(x) + B\cos(x)}_{v})$

A, B à déterminer.

$y_p'(x) = e^{3x}(\underbrace{3A\sin(x) + 3B\cos x}_{3v} + \underbrace{A\cos(x) - B\sin(x)}_{v'})$

puisque $u' = 3u$!

On remplace dans l'équa. diff:

$$e^{3x}\left((3A-B)\sin(x) + (3B+A)\cos(x)\right)$$
$$= e^{3x}\left((A+1)\sin(x) + B\cos(x)\right)$$

par identification $\quad 3A - B = A + 1 \quad$ (I)

$3B + A = B \quad$ (II)

(I) $\Leftrightarrow$ $2A = 1 + B$ $\quad$ (I')

(II) $\Leftrightarrow$ $A = -2B$ $\quad$ (II')

(I') $- 2\cdot$(II') donne $0 = 1 + B - 2(-2B)$

donc $B = -\frac{1}{5}$ donc $A \overset{(II')}{=} \frac{2}{5}$

On trouve $y_p(x) = \frac{e^{3x}}{5} \left(2 \sin(x) - \cos(x) \right)$.

Donc $\boxed{y(x) = \frac{e^{3x}}{5} \left(2 \sin(x) - \cos(x) \right) + c\, e^{3x}, \quad c \in \mathbb{R}}$

(g) pb $y' = -y + (x^2 - 1) e^x$

<u>sol. homogène</u>: $a(x) = a = -1 \Rightarrow A(x) = -x$
$\Rightarrow y_h(x) = e^{-x}$.

$b(x) = (x^2 - 1) e^x$ = produit d'un polynôme avec une exponentielle

tableau: $y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C) e^x$

$y_p'(x) = (2Ax + B + Ax^2 + Bx + C) e^x$
$= (A x^2 + (2A + B) x + (B + C)) e^x$

on remplace dans l'équa. diff :

$(Ax^2 + (2A+B)x + (B+C)) e^x = -(Ax^2 + Bx + C) e^x + (x^2 - 1) e^x$

$(\Leftrightarrow)$ $2A x^2 + (2A + 2B) x + (B + 2C) = x^2 - 1$

Identif: $2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$
$2A + 2B = 0$ (pas de x sur le côté droit)
$\Rightarrow (A = \frac{1}{2})$ $B = -\frac{1}{2}$

finalement $B + 2C = 1$, or $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{3}{4}$.

On obtient $y_p(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) e^x$

et donc $\boxed{y(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) e^x + c e^{-x}, \quad c \in \mathbb{R}}$

(h) $y' = y + \sin(x) + \sin(2x)$

<u>sol. homogène :</u> $a(x) = a = +1 \Rightarrow A(x) = x$

$\Rightarrow y_h(x) = e^x$.

<u>sol. part.</u> $b(x)$ = somme de sinus de 2 fréquences

$\Rightarrow y_p(x) = A \sin(x) + B \cos(x) + C \sin(2x) + D \cos(2x)$

$y_p'(x) = A \cos(x) - B \sin(x) + 2C \cos(x) - 2D \sin(2x)$

$y' - y = \sin(x) + \sin(2x)$

donc $(A+B)\sin(x) + (B-A)\cos(x) + (C+2D)\sin(2x) + (D-2C)\cos(2x)$

$= \sin(x) + \sin(2x)$.

On identifie : $A+B = 1$, $A-B=0$ Donc $A=B$

d'où $A = B = \frac{1}{2}$.

en plus $C+2D = 1$ et $D-2C = 0$

donc $D = 2C \Rightarrow C + 2(2C) = 1$

$\Leftrightarrow 5C = 1$

$\Leftrightarrow C = \frac{1}{5}$ et $D = \frac{2}{5}$

Ainsi $y_p(x) = \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(2x) + \frac{2}{5}\cos(2x)$.

$\boxed{y(x) = y_p(x) + c\, e^x, \quad c \in \mathbb{R}}$

Ex 8 : $y'' + 2y' - 3y = \cancel{\quad}\ f(x)$

pb homogène : $x^2 + 2x - 3 = 0$

$\lambda_{0/1} = \{-3, +1\}$ (Δ etc.)

donc $y_{h_0}(x) = e^{-3x}$, $y_{h_1}(x) = e^x$.

a) $f(x) = -x + 1$ ⇝ polynôme degré 1

$\Rightarrow y_p(x) = Ax + B$

$y_p'(x) = A$

$y_p''(x) = 0$

On remplace : $0 + 2(A) - 3(Ax + B) = -x + 1$

donc $-3A = -1 \Rightarrow A = 1/3$

et $2A - 3B = 1 \Rightarrow B = -1/9$

donc $y_p(x) = \frac{x}{3} - 1/9$.

$$\boxed{y(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + c_0 e^{-3x} + c_1 e^{x}, \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}}$$

b) $f(x) = e^x$ $f(x)$ est une sol. particulière, $x \cdot f(x)$ n'est pas une sol part.

donc $y_p(x) = A x e^x$ est un bon essai.

$y_p'(x) = Ae^x + Axe^x = A(x+1)e^x$

$y_p''(x) = Ae^x + (x+1)Ae^x = A(x+2)e^x$

On remplace : $A(x+2)\cancel{e^x} + 2A(x+1)\cancel{e^x} - 3Ax\cancel{e^x} = \cancel{e^x}$

donc $x(A + 2A - 3A) + 2A + 2A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{4}$.

donc $y_p(x) = \frac{x}{4}e^x$.

$$\boxed{y(x) = y_p(x) + c_0 e^{-3x} + c_1 e^x, \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}.}$$

c) $f(x) = -x+1+e^x + \cos(x)$.

On connaît la sol. pour $f(x) = -x+1+e^x$!
Il suffit de prendre $y_{p_1}(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + \frac{x}{4}e^x$.

On va donc réduire la complexité et chercher une sol. à $f(x) = \cos(x)$!

$f(x) = e^{0 \cdot x}\cos(1 \cdot x)$ et $0 + 1 \cdot i \notin \{-3, 1\}$

$\Rightarrow$ $y_p(x) = A \sin(x) + B\cos(x)$ convient.

$y_p'(x) = A\cos(x) - B\sin(x)$

$y_p''(x) = -A\sin(x) - B\cos(x)$.

On remplace : $\left(-A\sin(x) - B\cos(x)\right) + 2\left(A\cos(x) - B\sin(x)\right) - 3\left(A\sin(x) + B\cos(x)\right) = \cos(x)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -A - 2B - 3A = 0 & (\text{sinus}) \\ \text{et } -B + 2A - 3B = 1 & (\text{cosinus}) \end{cases}$

donc $\begin{cases} -2B - 4A = 0 \\ -4B + 2A = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2B - 4A = 0 \\ -8B + 4A = 2 \end{cases}$

$+$ ——————————

$-10B + 0 \cdot A = 2$ donc $B = -\frac{1}{5}$

d'où $-4A = 2B = -\frac{2}{5}$

$\Rightarrow$ $A = \frac{1}{10}$.

On a $\frac{1}{10}\sin(x) - \frac{2}{5}\cos(x)$ pour sol. avec

$f(x) = \cos(x)$

d'où $y_p(x) = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right) + \frac{x}{4}e^{x} + \left(\frac{1}{10}\sin(x) - \frac{2}{5}\cos(x)\right)$

et $\boxed{y(x) = y_p(x) + c_0\, y_{h_0}(x) + c_1\, y_{h_1}(x) \quad , \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}}$

d) $y'' - 6y' + 9y = f(x)$.

1) pb homogène : $x^2 - 6x + 9 = 0$
$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 0$

On a une seule racine (double)

donc $y_{h_0}(x) = e^{3x}$, $y_{h_1}(x) = x e^{3x}$.

2) $f(x) = 3 + e^{3x} =$ (polynome degré 0) + exponentielle.

remarquons que e^{3x} est une sol. homogène
$x e^{3x}$

donc $y_p(x) = \underbrace{A}_{\text{pour le polynôme}} + \underbrace{B x^2 e^{3x}}_{\text{pour l'exponentielle.}}$

$y_p'(x) = 2Bx\, e^{3x} + 3Bx^2 e^{3x} = e^{3x}(2Bx + 3Bx^2)$

$y_p''(x) = e^{3x}(6Bx + 9Bx^2 + 2B + 6Bx)$

On remplace:

$$\cancel{e^{3x}}\left(6Bx+9Bx^2+2B+6Bx\right)-6e^{3x}\left(2Bx+3Bx^2\right)+9(A+Bx^2)e^{3x}=3+e^{3x}$$

pas rigueur!

donc $\begin{cases} e^{3x}\left(\underbrace{(9B-18B+9B)}_{=0}x^2+\underbrace{(12B-12B)}_{0}x+(2B)\right)=e^{3x} \\ \text{et} \quad 9A=3 \end{cases}$

donc $2B=1$ et $9A=3$

$\Leftrightarrow \quad A=\frac{1}{3}, \quad B=\frac{1}{2}.$

On a $\quad y_p(x)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}x^2e^{3x}$ //

$$y(x)=y_p(x)+c_0e^{3x}+c_1xe^{3x}.$$

(e) $\quad y''-3y'=3+x^2$

1) pb homogène: $\quad x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0$
2 racines: 3 et 0.

$\Rightarrow \quad y_{h_0}(x)=e^{3x}, \quad y_{h_1}(x)=e^{0\cdot x}=1$

2) $f(x)$ = polyn. degré 2

On voudrait prendre $y_p(x)=Ax^2+Bx+C$ sol. homogène!

donc à ignorer. On pose

Attention: aucun y → multiplie avec x

$y_p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ (on multiplie avec x !)

$y_p'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$

$y_p''(x) = 6Ax + 2B$

On remplace

$$6Ax + 2B - 3(3Ax^2 + 2Bx + C) = 3 + x^2$$

$$\Leftrightarrow -9Ax^2 + (6A - 6B)x + (2B - 3C) = 3 + x^2$$

$$\text{donc} \begin{cases} -9A = 1 & \Rightarrow A = -1/9 \\ 6A - 6B = 0 & \Rightarrow A = B = -1/9 \\ 2B - 3C = 3 & \Rightarrow -3C = \frac{29}{9} \Rightarrow C = -\frac{29}{27}. \end{cases}$$

Ainsi $y_p(x) = -\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{9} - \frac{29}{27}x$.

(h) $y'' + y = t + \sin(t)$

(1) pb homogène: $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 + i$
$x_1 = 0 - i$

donc $y_{h_0}(x) = e^{0x} \sin(1 \cdot x) = \sin(x)$

$y_{h_1}(x) = e^{0 \cdot x} \cos(1 \cdot x) = \cos(x)$

(2) pb non-homogène: $f(x) = \underbrace{x}_{\text{polyn.}} + \sin(x)$.

Oups, $\sin(x)$ déjà sol. homogène !

Donc $y_p(x) = (Ax + B) + x(C\sin(x) + D\cos(x))$!

$$y_p'(x) = A + C\sin(x) + D\cos(x) + Cx\cos(x) - Dx\sin(x)$$

$$y_p''(x) = C\cos(x) - D\sin(x) + C\cos(x) - Cx\sin(x) - D\sin(x) - Dx\cos(x).$$

$$= 2C\cos(x) - 2D\sin(x) - Cx\sin(x) - Dx\cos(x).$$

On remplace:

$=0$

$$-2D\sin(x) + 2C\cos(x) - Cx\sin(x) - Dx\cos(x)$$

$$+ (Ax+B) + Cx\sin(x) + Dx\cos(x) = x + \sin(x).$$

$=0$

d'où $\quad Ax + B = x \qquad (A=1,\ B=0)$

et $\quad -2D = 1 \qquad (\sin)$

$\quad 2C = 0 \qquad (\cos)$

donc $\quad D = -1/2,\ C = 0.$

$$\Rightarrow y_p(x) = x - \frac{1}{2}x\cos(x).$$

et $\boxed{y(x) = x\left(1 - \frac{\cos(x)}{2}\right) + c_0\sin(x) + c_1\cos(x),\quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}}$