Ex 1 : fait en TD

Ex 2 : 1) taux d'accroissement $= \dfrac{N(t+h) - N(t)}{h}$

proportionnel au n° d'indiv. $= k \cdot N(t)$

où k est la constante de proportionnalité.

En passant à la limite $h \to 0$ on obtient
$N'(t) = k \cdot N(t)$

càd $N(t) = c e^{kt}$, $N(0) = c = N_0$

$\leadsto \underline{N(t) = N_0 \cdot e^{kt}}$

Pour $t \to \infty$ on a $\begin{cases} N(t) \equiv \text{const.} & k=0 \\ N(t) \to 0 & k<0 \\ N(t) \to \infty & k>0. \end{cases}$

(sachant que $N_0 \in \mathbb{N}^*$)

2) Modèle (donné) $N'(t) = r\, N(t)\, (N^* - N(t))$

(a+b) $N(t) \neq 0 \ \forall t$.

$y(t) = \dfrac{1}{N(t)}$ $\quad N, \frac{1}{x}$ dérivables, $N(t) \neq 0 \Rightarrow y$ dérivable

$y'(t) = \dfrac{-N'(t)}{N^2(t)} = r - \dfrac{1}{N(t)}(N^* - N(t))$

$= -rN^* y(t) + r$

(de même : $N(t) = \dfrac{1}{y(t)}$, $N'(t) = -\dfrac{y'(t)}{y^2(t)}$)

(c) $y' = -rN^* y + r$
$y_h(t) = c \cdot e^{-rN^* t}$
$y_p(t) = A \quad \leadsto 0 = y_p' = -rN^* A + r \quad \leadsto A = \dfrac{1}{N^*}.$

On a donc $y(t) = \frac{1}{N^*} + c \cdot e^{-rN^* \cdot t}$

$$N(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{1/N^* + c\, e^{-rN^*t}} = \frac{N^*}{1 + K e^{-rN^*t}}$$

où $K = c N^*$.

e) Si $r > 0$ on a $e^{-rN^*t} \to 0$ si $t \to \infty$
alors $N(t) \longrightarrow N^*$.

Si $r < 0$ on a $e^{-rN^*t} \to \infty$ si $t \to \infty$
et $N(t) \longrightarrow 0$

Si $r = 0$ on a $N(t) \equiv N^*$.

Ex 3 :
$$\begin{cases} S'(t) = -r\, S(t)\, I(t) + a\, I(t) \\ I'(t) = r\, S(t)\, I(t) - a\, I(t) \end{cases}$$

avec $S(0) = S_0$ et $I(0) = I_0$, et $S(t) + R(t) = \text{const.}$

$$u(t) = \frac{1}{N} S\left(\frac{t}{a}\right) \qquad v(t) = \frac{1}{N} I\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$\Rightarrow u'(t) = \frac{1}{aN} S'(t/a) = \frac{1}{aN}\left(\overset{-r}{S}(t/a)\, I(t/a) + a\, I(t/a)\right)$$

(1) $$= -\frac{rN}{a}\left(\frac{1}{N} S\left(\frac{t}{a}\right)\right)\left(\frac{1}{N} I(t/a)\right) + \frac{1}{N} I\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$= -R\, u(t)\, v(t) + v(t)$$

de même $$v'(t) = \frac{1}{aN} I'\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{1}{aN}\left(r\, S\left(\frac{t}{a}\right) I\left(\frac{t}{a}\right)\right) - a\, I\left(\frac{t}{a}\right)$$

(2) $$= \frac{rN}{a}\left(u(t)\, v(t)\right) - v(t)$$

De $S(t) + I(t) = \text{const.} = S(0) + I(0) = N$

on déduit

$$u(t) + v(t) = \frac{1}{N}\left(S(t) + I(t)\right) = 1. \qquad (3).$$

(1) – (3) donnent

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u' = -(Ru-1)v \\ v' = (Ru-1)v \end{cases}$$

et $u_0 = \frac{S_0}{N}$, $v_0 = \frac{I_0}{N}$.

(d) On utilise $u(t) + v(t) = 1$

$\rightsquigarrow u(t) = 1 - v(t)$ pour déduire

$$v'(t) = R(1 - v(t)) \cdot v(t) - v(t)$$

$$= R\,v(t) - R\,v(t)^2 - v(t) \qquad (*)$$

$$= \left((R-1) - R\,v(t)\right) v(t).$$

(e) $y(t) = \frac{1}{v(t)}$, $y'(t) = -\frac{v'(t)}{v^2(t)}$

$\rightsquigarrow y'(t) \overset{(*)}{=} -(R-1)\,y(t) + R$

$\rightsquigarrow y_h(t) = C \cdot e^{-(R-1)t}$

$y_p(t) = A$ (constante)

$0 = y_p'(t) = -(R-1) \cdot A + R \rightsquigarrow A = \frac{R}{R-1} = \frac{1}{v^*}.$

$y(t) = \frac{1}{v^*} + C \cdot e^{-(R-1)t}$ est la sol. générale

$$y(0) = \frac{1}{v(0)} = \frac{1}{v_0}$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{1}{v_0} = \frac{1}{v^*} + c \quad \rightsquigarrow \quad c = \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v^*}$$

$$= \frac{1}{v_0 \cdot v^*} \left(v^* - v_0 \right)$$

$$\rightsquigarrow \quad y(t) = \frac{1}{v^*} + \frac{1}{v_0 v^*} \left(v^* - v_0 \right) e^{-(R-1)t}$$

$$\rightsquigarrow \quad v(t) = \frac{v_0 v^*}{v_0 + \left(v^* - v_0 \right) e^{-(R-1)t}} .$$

(f) Si $R < 1$ on a $1 - R > 0$

$$\rightsquigarrow \quad e^{-(R-1)t} \xrightarrow{t \to \infty} \infty \quad \text{et donc} \quad v(t) \longrightarrow 0$$

Si $R = 1$ on a

$$e^{-(R-1)t} = 1 \quad \forall t \quad \rightsquigarrow \quad v(t) \equiv v_0$$

Si $R > 1$ on a

$$e^{-(R-1)t} \longrightarrow 0 \quad (t \to \infty) \quad \text{et}$$

$$v(t) \longrightarrow v^* .$$

Si on s'aperçoit que $R = \frac{rN}{a}$

est le ~~taux~~ nombre d'infections transmis d'un individu pendant son infection ceci est bien ce qu'on attend :

- Un infecté infecte moins qu'un individu en moyenne ($R < 1$)
  ⇝ la maladie s'éteint

- Un infecté infecte exactement un autre
  ⇝ Nombre d'infectés constant

- Un infecté infecte plus qu'un individu en moyenne ($R > 1$) :
  On a convergence vers un équilibre $v^* = 1 - \frac{1}{R}$, la maladie reste à toujours dans la population.

Ex 4 : a) demie-vie : $T > 0$ t.q.

$$y(T) = \frac{1}{2} \cdot y_0 .$$ où y satisfait

$$\begin{cases} y'(t) = -\mu\, y(t) \\ y(0) = y_0 . \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad y(t) = y_0 e^{-\mu t} .$$

$$y(T) = \frac{1}{2} y_0 \iff e^{-\mu T} = \frac{1}{2}$$

$$\iff -\mu T = \ln(1/2) = -\ln 2$$

$$\iff T = \frac{\ln 2}{\mu} .$$

b) $T = 5730 \Rightarrow \mu \approx 0{,}000120968 1$

Si $y(t) = 0{,}4 \cdot y_0$ (40%)

alors $e^{-\mu t} = 0{,}4 \iff t = \frac{-\ln(0{,}4)}{\mu} = 7574{,}64$

càd l'éruption c'est passé

7565 ans avant 2006 càd 5568 avant Jésus.C.

Si $e^{-\mu t} = 0{,}42$ on a

$$t = \frac{-\ln(0{,}42)}{\mu} = 7171{,}32$$

càd l'éruption c'est passé 7171 ans avant 2006, càd à 5165 avant J.C.

Ex 5 : faite en TD.