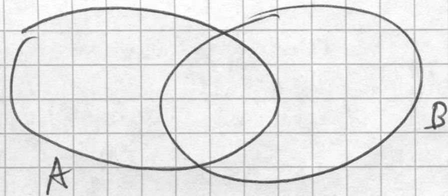
4)



$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ comme union disjoint.

De plus $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ comme union disjoint, d'où

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A)$$

$$= \underbrace{P(A \setminus B) + P(A \cap B)} + \underbrace{P(B \setminus A) + P(A \cap B)} - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Or $A \cup B \subset \Omega$ on a

$$1 \geq P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

<u>Cas 1</u> $P(A) = 0,9$ $P(B) = 0,3$ $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1,2 > 1$ ↯ pas possible.

<u>Cas 2</u> $P(X) \in [0,1]$ $\forall X \in \Omega \Rightarrow$ pas possible

<u>Cas 3</u> $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1$ possible si $A \cup B = \Omega$.

<u>Exemple</u>: $\Omega = \{1, \ldots, 10\}$ avec équiprobabilité

$A = \{1, 2, \ldots, 7, 8\}$ $P(A) = \frac{8}{10} = 0,8$

$B = \{7, 8, 9, 10\}$ $P(B) = \frac{4}{10} = 0,4$

$A \cap B = \{7, 8\}$ $P(A \cap B) = \frac{2}{10} = 0,2$

<u>Cas 4</u> : $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1,1 > 1$ impossible

Cas E : $P(A) = 0{,}9$ $P(B) = 0{,}3$ $P(A\cap B) = 0{,}3$

possible, $\Omega = \{1, \dots, 10\}$ équiproba

$A = \{1, \dots, 9\}$ $P(A) = 0{,}9$

$B = \{1, 2, 3\}$ $P(B) = 0{,}3$

$A \cap B = B$ $P(A\cap B) = P(B) = 0{,}3$.

Ex 5 $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.

1 — $P(A) = 5/8$ $P(A\cup B) = 7/8$ $P(A\cap B) = 1/4$

On a donc $\frac{7}{8} = \frac{5}{8} + x - \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Donc $P(B) = \frac{1}{2}$.

2 — $P(A\cap B) = \frac{1}{4} \neq P(A)\cdot P(B) = \frac{5}{16}$

càd A et B ne sont pas indépendants !

Ex 6 : $\Omega = \{A, B, C, D\}$

$$\left.\begin{array}{l} P(\{A\}) = P(\{D\}) \\ P(\{B\}) = \frac{1}{2} P(\{A\}) \\ P(\{B\}) = 2\cdot P(\{C\}). \Leftrightarrow P(\{C\}) = \frac{1}{2} P(\{B\}) \end{array}\right\} P(\{C\}) = 1/4 \cdot P(\{A\})$$

Il ex. un et un seul gagnant càd $\{A\}\cup\{B\}\cup\{C\}\cup\{D\} = \Omega$ est une union disjointe.

Si $P(\{A\}) = x$ on a donc

$$x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + x = 1$$

$\Leftrightarrow x = \frac{4}{11}$.

$P(\{A\}) = \frac{4}{11}$ $P(\{B\}) = \frac{2}{11}$ $P(\{C\}) = \frac{1}{11}$ $P(\{D\}) = \frac{4}{11}$.

$E = \{A, D\}$

$P(E) = \frac{8}{11}$ $\quad P(\overline{E}) = \frac{3}{11}$

- Perdre 3 courses indépendantes, donc 3 fois $\overline{E}$ se passe avec probabilité $\left(\frac{3}{11}\right)^3 = \frac{27}{1331} \approx 0{,}0203$
- Gagner au moins une fois est le complément de perdre 3 fois !

$P(\text{"gagner au moins une fois"}) = 1 - \left(\frac{3}{11}\right)^3 = \frac{1304}{1331}$

$\approx 0{,}9797$!

Ex 7 : hommes $= 12 + 24 = 36$.

Cent mentions $\Rightarrow$ $\underline{36\ \%}$

femmes $= 48 + 16 = 64$ $\rightsquigarrow$ $\underline{64\ \%}$

sportifs : $12 + 48 = 60$ $\rightsquigarrow$ $\underline{60\ \%}$

non-sportifs $24 + 16 = 40$ $\rightsquigarrow$ $\underline{40\ \%}$

sportifs parmi hommes $= \frac{12}{36}$ $\rightsquigarrow$ $\underline{33{,}\overline{3}\ \%}$

sportifs parmi femmes $= \frac{48}{64}$ $\rightsquigarrow$ $\underline{75\ \%}$

Ex 8 : (T1) pos. sur 70 % des malades

20 des non-malades

(T2) pos. sur 90 % des malades

30 % non-malades.

$P(\text{"malade"}) = \frac{6}{10} \approx 60\ \%$

Les tests sont indépendents càd
$P(\text{" T2 positif"} \mid \text{"T1 positif"})$
$= P(\text{" T2 positif"})$

On a $P(\text{" T2 positif"}) = P(\text{"T2 positif"} \mid \text{"malade"}) \cdot P(\text{"malade"})$

$+ P(\text{"T2 pos"} \mid \text{"non-malade"}) \cdot P(\text{"non-malade"})$

$= 0{,}9 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}4$

$= \underline{\underline{0{,}66}}$

Ex 9 $\Omega = \{ g_1, \dots, g_5, f_1, \dots, f_5 \}$.

1- $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 10!$ possibilités de les classer

2- On a $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ possibilités de classer des garçons et $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ poss. de classer les filles. On peut commencer avec garçon ou fille.
$\Rightarrow$ en alternance on a
$\underline{2 \cdot 5! \cdot 5!}$ possibilités

(pas demandé : $P(\text{"alternance"}) = \dfrac{2 \cdot 5! \cdot 5!}{10!} \approx 0{,}0079$

Ex 10 : On constitue sous-groupe 1. On a
$\underbrace{24 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 13}_{12}$ possibilités. Tous ce qui restent vont dans groupe 2.

Ex 12 : On choisit d'abord 2 cases qui resteront vides. Pour les cinq autres ont

on a 5 possibilités pour le plus haut,
4 —"— pour le prochain
etc.

donc: $\binom{7}{2} \cdot 5! = 2520$ possibilités !

Ex 11

1– Au premier élève on peut donner une parmi 10 copies
au deuxième —"— une parmi 9

⋮

$\rightsquigarrow$ $10!$ possibilités de distribuer 10 feuilles.

Une seule est correcte !

$\Rightarrow P(\text{" correctement distribué "}) = \frac{1}{10!} \approx 2{,}75 \cdot 10^{-7}$