1. La formule de Taylor en une variable réelle

Commençons avec un lemme auxiliaire:

Lemma 1.1. *Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues et de classe C^1 dans (a, b). Supposons $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a, b)$. Alors $g(a) \neq g(b)$ et il existe un $\xi \in (a, b)$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Proof. Si $g(a) = g(b)$ le lemme de Rolle montre l'existence d'un x avec $g'(x) = 0$. Ceci n'est pas le cas: ainsi, les hypothèses assurent $g(a) \neq g(b)$. Posons

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \left(g(x) - g(a)\right).$$

Puisque $F(a) = F(b) = f(a)$, le lemme de Rolle montre qu' il existe un $\xi \in (a, b)$ avec $F'(\xi) = 0$, c'est à dire

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \left(g'(\xi)\right).$$

□

Theorem 1.2 (Formule de Taylor avec reste de Lagrange)**.** *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^k. Alors, pour tout $x \neq a \in I$ il existe un ξ entre a et x tel que*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-a)^k$$

Proof. On peut supposer $a < x$ pour simplifier la notation. Soit $F(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$. et $G(x) = (x-a)^k$. Alors $F(a) = F'(a) = .. = F^{(k-1)}(a) = 0$ et pour $0 \leq j < k$, la dérivée $G^{(j)}(x) = k(k-1)..(k-j+1)(x-a)^{k-j}$ s'annulle si et seulement si $x = a$. On peut appliquer le lemme de proche en proche pour obtenir

$$\begin{aligned}
\frac{F(x)}{G(x)} &= \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} \\
&= \frac{F'(\xi_1) - F(a)}{G'(\xi_1) - G(a)} = \frac{F'(\xi_2)}{G'(\xi_2)} \\
&\vdots \\
&= \frac{F^{(k-1)}(\xi_{k-1}) - F(a)}{G^{(k-1)}(\xi_{k-1}) - G(a)} = \frac{F^{(k)}(\xi_k)}{G^{(k)}(\xi_k)} = \frac{f^{(k)}(\xi_k)}{k!}
\end{aligned}$$

Alors $F(x) = \frac{f^{(k)}(\xi_k)}{k!} G(x)$ ce qui est équivalent à l'énoncé. □

On appelle $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(\xi - a)^k$ le *reste de Lagrange* dans la formule de Taylor.