```
Ce texte est une préparation à l'examen, comme un DM volontaire.  Il n'est pas aussi
bien vérifié qu'un examen, peut être trop long ou trop court et n'aura pas de cor-
rigé.  Cependant, si vous constateriez des problèmes, n'hésitez pas à vous addresser
à vos chargés de TD ou cours.  Nous sommes là pour cela.  Considerer aussi le forum
sur moodle pour éviter de poser 15 fois les mêmes questions.
```

**Question 1**

(a) Soit $H(t,x)$ une fonction de classe $C^1$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et $\frac{d}{dx}H(t_0,x_0) \neq 0$. Justifier qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $r > 0$ tel que $\frac{d}{dx}H(t,x) \neq 0$ sur $U = (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \times (x_0-r, x_0+r)$. Soit

$$F(t,x) = -(\tfrac{d}{dx}H(t,x))^{-1}\tfrac{d}{dt}H(t,x)$$

défini sur $U$. Justifier que l'équation

$$y' = F(t,y), \qquad y(t_0) = x_0$$

admet une unique solution $y$ dans un intervalle $(a,b) \subset (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$.

(b) Justifier que $t \mapsto H(t,y(t))$ est une fonction constante sur $(a,b)$, puis déduire le théorème des fonctions implicitement définis pour $H$, avec un énoncé précis.

**Question 2**

(a) Résoudre $y' = -y + te^{-t} + 1$, avec condition initiale $y(0) = 1$.

(b) Résoudre $y' = e^{t-y-e^y}$ avec la condition initiale $y(1) = 0$.

**Question 3** Résoudre $y' = Ay$, avec condition initiale $y(0) = (1,0,0)^t$ où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

**Question 4** Résoudre le système

$$\begin{cases} y'(t) = & -2y(t) & +z(t) & +e^{-t} \\ z'(t) = & -y(t) & & -2e^{-t} \end{cases} \qquad \begin{matrix} y(0) = 1 \\ z(0) = 2 \end{matrix}$$

**Question 5** On considère $(E)$ : $\quad y' = f(t,y) = y^2 - t$ avec $y(0) = y_0$.

(a) Observer que $-t \leq f(t,y) \leq y^2$; puis trouver les solutions de $\alpha' = -t$ et de $\beta' = \beta^2$avec $\alpha(0) = \beta(0) = y_0$.

(b) Montrer que $\alpha, \beta$ sont des barrières pour $(E)$.

(c) Soit $y_0 > 0$. Justifier que la solution maximale de $(E)$ existe au moins sur $[0, 1/y_0)$.

(d) (exercice supplémentaire pour vous amuser un peu) Traiter $y' = y^2(1-2ty)$ sur $[1, T_+)$ avec $y(1) = y_0 > 0$ de la même façon. Donner une estimation du temps maximal d'existence $T_+$.

**Question 6** Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $F, H : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $C^1$. On s'intéresse à l'équation autonome

$$(A) \qquad y' = F(y).$$

(a) (bonus, pour enfin comprendre comment ce type d'exo est construit) Montrer que $D_H(x) \circ F(x) = 0$ sur $\Omega$ si et seulement si pour tout $y_0 \in \Omega$ et toute solution maximale satisfaisant $y(0) = y_0$, la fonction $t \mapsto H(y(t))$ est constante.

(b) (bonus, pour enfin comprendre comment ce type d'exo est construit) En déduire que les solutions de $(A)$ sont contenus dans le "lignes de niveau" de $H$.

(c) Considérons

$$(P) \qquad x'' + \sin(x) = 0.$$

Montrer que cette équation admet des solutions uniques dans le voisinage de toute valeur initiale $x(t_0) = x_0$. Montrer qu'une solution croît au plus polynomialement, déduire que les solutions sont globales.

(d) Réécrire en système d'ordre 1 de la forme $y' = F(y)$, puis considérer la fonction $H(a, b) = b^2/2 - \cos(a)$ sur $\mathbb{R}^2$.

(e) On considère la ligne de niveau $N_C = \{(x, y) : \; H(x, y) = C\}$ pour $C \in (-1, 1)$. Soit $\varphi(t)$ une solution de $(P)$ avec $(\varphi, \varphi') \in N_C$ satisfait $\cos(\varphi(t)) \geq -C > -1$. En déduire que $\varphi$ est bornée.

(f) Amener l'hypothèse que $\varphi$ serait monotone sur $[0, \infty)$ à une contradiction.

(g) Conclure qu'il existe $t_0 < t_1$ avec $\varphi(t_0) = \varphi(t_1)$, puis que $\varphi$ est périodique.