université de BORDEAUX

ANNEE UNIVERSITAIRE 2016 / 2017
DS Topologie

Date : 18.11.2016
Durée : 11h00—12h30
Documents : non autorisés

Collège Sciences et technologies

`Veuillez bien justifier vos réponses.`
`La correction tiendra compte du soin apporté à la rédaction.`

Exercice 1 Soit $X = \mathbb{N}$ muni de la topologie induite de $\mathbb{R}$. Décrire les parties compactes de X.

Exercice 2 Soit X un espace topologique. Montrer que X est séparé (Hausdorff) si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x, x) : \ x \in X\}$ est un fermé de $X \times X$.

Exercice 3 **(lemme préparatif)** Soit X un espace topologique compact et Y un espace topologique séparé (ou Hausdorff). Soit $f : X \to Y$ une bijection continue. Montrer que f^{-1} est continue.

Exercice 4 **(application)** Soit $X =]0, 1[$ et $Y = X \cup \{\infty\}$ sa compactification Alexandroff.
Soit $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$ muni de la topologie induite de $\mathbb{R}^2$ et

$$f : \begin{cases} Y & \to & S^1 \\ t & \mapsto & (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) & \text{si } t \in X \\ \infty & \mapsto & (1, 0) \end{cases}$$

a) Montrer que f est bijectif.
b) Montrer que f est continue en tout point $t \in X$.
c) Pour montrer la continuité en ∞, soit V un voisinage de $(1, 0) \in S^1$.
   i) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que V contient l'arc

$$\big\{(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), -\varepsilon < t < \varepsilon\big\}.$$

   ii) Montrer que $f^{-1}(V)$ contient $\mathcal{O} := Y \backslash [\epsilon, 1 - \epsilon]$.
   iii) Déduire que $f^{-1}(V)$ est un voisinage de ∞ dans Y.
d) Montrer que f est continue.

Par l'exercice précédent, f^{-1} est continue, c'est à dire Y et S^1 sont homéomorphes. On identifie Y avec S^1 grâce à f.

FIN