Question 1 *Soit $X = \{a, b, c, .., z\}$ et*

$$\mathcal{E} = \{\emptyset, \{t, o, p\}, \{o\}, \{l, o, g, i, e\}, X\} .$$

(a) *Est-ce que $\mathcal{E}$ est une topologie sur X? Si non, déterminer la plus petite topologie $\mathcal{T}$ qui contient $\mathcal{E}$.* $\mathcal{E}$ n'est pas une topologie sur X, car non-stable par union. On a

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{t, o, p\}, \{o\}, \{l, o, g, i, e\}, \{t, o, p, l, g, i, e\}, X\} .$$

qui est visiblement la plus petite topologie à contenir $\mathcal{E}$.

(b) *Est-ce que X, muni de cette topologie, est un espace compact (bien justifier votre réponse).* Puisque X est fini, il est compact, peu importe quelle topologie. En effet, soit (O_i) un recouvrement par des ouverts. Il existe un ouvert O_a qui contient a, un ouvert O_b qui contient b, etc. jusqu'à O_z qui contient z. Ainsi, $X = O_a \cup O_b \cup O_c \cup .. \cup O_z$.

Question 2 *Soit $Y = \mathbb{R}$ et $Z = \mathbb{Z}$, les deux munis de la distance habituelle $d(x, y) = |x - y|$.*

(a) *Est-ce que les singletons sont fermés dans Y? Et dans Z? (bien justifier votre réponse).* Les singletons sont fermés dans tout espace de Hausdorff, en particulier dans des espaces métriques.

(b) *Est-ce que les singletons sont ouverts dans Y? Et dans Z? (bien justifier votre réponse).* Dans Y, un singleton ne peut être ouvert. En effet, aucun intervalle $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ n'est contenu dans $\{a\}$. Un autre argument est que $\mathbb{R}$ est connexe, ce qui exclut fermé et ouvert simultanément. Les choses sont différentes dans Z: $\{x\} = B(x, 1/2)$ montre que les singletons (et donc n'importe quelle partie de Z) sont ouverts.

Question 3

(a) *Soit X un ensemble infini et $\mathcal{T} = \{O \subset X :\ O$ est vide ou bien $O^{\complement}$ est fini $\}$. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie (appelé la topologie co-finie).* L'ensemble vide appartient à $\mathcal{T}$. Si $U, V \in \mathcal{T}$ sont non-vides, alors $(U \cap V)^{\complement} = U^{\complement} \cup V^{\complement}$ est fini, donc $U \cup V \in \mathcal{T}$. Finalement, si $O_i \in \mathcal{T}$ pour tout $i \in I$, avec au moins un O_{i_0} non-vide

$$\left(\bigcup O_i\right)^{\complement} = \bigcap O_i^{\complement} \subset O_{i_0}^{\complement}$$

est fini, donc $\bigcup O_i \in \mathcal{T}$.

(b) *Décrire le système $\mathcal{F}$ des parties fermées pour cette cette topologie.* Une partie F est fermée si elle est égale à X ou bien finie.

(c) *Soit dorénavant $\mathbb{R}$ équipé de sa topologie habituelle. Montrer que toute fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ est constante. (Indication: une application non-constante admet deux valeurs distincts dans $\mathbb{R}$ qui est un espace de Hausdorff, c'est à dire, séparé).* Par l'absurde: soit f n'est pas constante, nous avons $x, y \in X$ avec $f(x) \neq f(y)$. Soient U, V deux ouverts dans $\mathbb{R}$ qui séparent $f(x)$ et $f(y)$. Par continuité $f^{-1}(U)$ et $f^{-1}(V)$ séparent alors x et y. Mais deux ouverts non-vides ont forcément une intersection dans X, car $(O_1 \cap O_2)^{\complement} = O_1^{\complement} \cup O_2^{\complement}$ est fini et donc différent de X. Ceci montre que $f^{-1}(U)$ et $f^{-1}(V)$ ne séparent pas x et y, ce qui est contradictoire.

(d) *Montrer que toute fonction injective $f : \mathbb{R} \to X$ est continue.* Soit F un fermé de X. Si $F = X$ est tout l'espace, $f^{-1}(F) = \mathbb{R}$ est fermé. Sinon, F est fini, par injectivité $f^{-1}(F)$ aussi, et dans $\mathbb{R}$ les parties finies sont fermés. Ainsi, l'image réciproque d'un fermé est fermé.

Question 4 *Soit $d \geq 2$ et $X = \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$, muni de la distance euclidienne.*

(a) *Montrer que X est connexe par arcs, en explicitant un arc qui relie deux points $x \neq y$ de X.* Il existe une rotation qui amène x sur le demi-rayon $\{ty : t > 0\}$. Ensuite on poursuit sur le demi-rayon en ligne droite vers y. En concaténant les deux arcs, on obtient un arc qui relies x et y.
Une autre possibilité consiste à "ajuster" par ligne droite, parallèle aux axes, coordonnée par coordonnée pour passer en d arcs de x à y. On les concate à nouveau dans un seul arc.

(b) *Soit $Y = \{x \in X : \|x\|_2 = 1\}$ la sphère dans $\mathbb{R}^d$, munie de la topologie induite de $\mathbb{R}^d$. Expliciter une surjection continue $f : X \to Y$ (justifier surjectivité et continuité).* Le candidat naturel est $f : X \to Y$, $f(x) = x/\|x\|$. Cette application est surjective car chaque $y \in Y \subset X$ satisfait $f(y) = y$. L'application f est continue car quotient de deux fonctions continues, avec un dénominateur qui s'annule jamais.

(c) *Est-ce que Y est connexe?* X est connexe par arcs, donc connexe. L'image continue $Y = f(X)$ est donc également connexe.

Question 5 *Voici la preuve d'un théorème. Compléter son l'énoncé suivant, en précisant clairement les hypothèses et les conclusions.*

> **Théorème:** *Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies sur un espace topologique X*
>
> compact. On suppose que f_n soit continue pour tout n et que la suite (f_n) décroît simplement vers la fonction nulle (c'est-à-dire: $(f_n(x))_n$ décroît monotonément vers 0 pour tout x). Alors la convergence est uniforme.
>
> *démonstration: Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour chaque $x \in X$, il existe un rang $N(x)$ tel que $f_n(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ pour tout $n \geq N(x)$. Par continuité, il existe un voisinage ouvert $V(x)$ de x tel que $f_{N(x)}(y) \in (-eps, \varepsilon)$ pour tout $y \in V(x)$. Les voisinages ouverts $V(x)$ recouvrent l'espace X. Par hypothèse sur celui-ci on peut extraire un sous-recouvrement fini, disons $X = V(x_1) \cup \ldots \cup V(x_M)$. Soit $N := \max(N(x_1), \ldots, N(x_M))$. Pour tout $x \in X$ il existe un $i \in \{1, \ldots, M\}$ tel que $x \in V(x_i)$. Par monotonie, on a pour tout $n \geq N \geq N(x_i)$ que $0 \leq f_n(x) \leq f_{N(x_i)}(x) < \varepsilon$. Ainsi, $\|f_n\|_\infty \xrightarrow{n \to \infty} 0$.* □

— FIN —