

---

# SUR QUELQUES EXTENSIONS AU CADRE BANACHIQUE DE LA NOTION D'OPÉRATEUR DE HILBERT-SCHMIDT

par

Said Amana Abdillah, Jean Esterle & Bernhard H. Haak

---

**Résumé.** — Le but de cet article est de faire le point sur diverses possibilités connues pour étendre au cadre Banachique la notion d'opérateur de Hilbert-Schmidt : opérateurs  $p$ -sommants,  $\gamma$ -sommants ou  $\gamma$ -radonifiants, opérateurs faiblement  $\ast 1$ -nucléaires et classes d'opérateurs définies par des propriétés de factorisation. On introduit la classe  $\text{PS}_2(E; F)$  des opérateurs pré-Hilbert-Schmidt comme étant la classe des opérateurs  $u : E \rightarrow F$  tels que  $w \circ u \circ v$  soit Hilbert-Schmidt pour tout opérateur borné  $v : H_1 \rightarrow E$  et tout opérateur borné  $w : F \rightarrow H_2$ ,  $H_1$  et  $H_2$  désignant des espaces de Hilbert quelconque. Hormis le cas trivial où l'un des deux espaces  $E$  ou  $F$  est un "espace de Hilbert-Schmidt", cet espace ne semble avoir été décrit que dans le cas banal où l'un des deux espaces  $E$  et  $F$  est un espace de Hilbert.

**MOTS CLÉS :** Espaces de Banach, opérateurs de Hilbert-Schmidt, opérateurs  $p$ -sommants, opérateurs presque sommants, opérateurs  $\gamma$ -sommants, opérateurs  $\gamma$ -radonifiants, inégalité de Grothendieck.

**ABSTRACT :** In this work we discuss several ways to extend to the context of Banach spaces the notion of Hilbert-Schmidt operators :  $p$ -summing operators,  $\gamma$ -summing or  $\gamma$ -radonifying operators, weakly  $\ast 1$ -nuclear operators and classes of operators defined via factorization properties. We introduce the class  $\text{PS}_2(E; F)$  of pre-Hilbert-Schmidt operators as the class of all operators  $u : E \rightarrow F$  such that  $w \circ u \circ v$  is Hilbert-Schmidt for every bounded operator  $v : H_1 \rightarrow E$  and every bounded operator  $w : F \rightarrow H_2$ , where  $H_1$  et  $H_2$  are Hilbert spaces. Besides the trivial case where one of the spaces  $E$  or  $F$  is a "Hilbert-Schmidt space", this space seems to have been described only in the easy situation where one of the spaces  $E$  or  $F$  is a Hilbert space.

**KEYWORDS :** Banach spaces, Hilbert-Schmidt operators,  $p$ -summing operators, almost summing operators,  $\gamma$ -summing operators,  $\gamma$ -radonifying operators, Grothendieck's inequality.

## 1. Introduction

Le but de cet article, qui fait suite au travail entrepris par le premier auteur dans sa thèse [1], est de faire le point sur diverses possibilités d'étendre au cadre Banachique la notion d'opérateur de Hilbert-Schmidt.

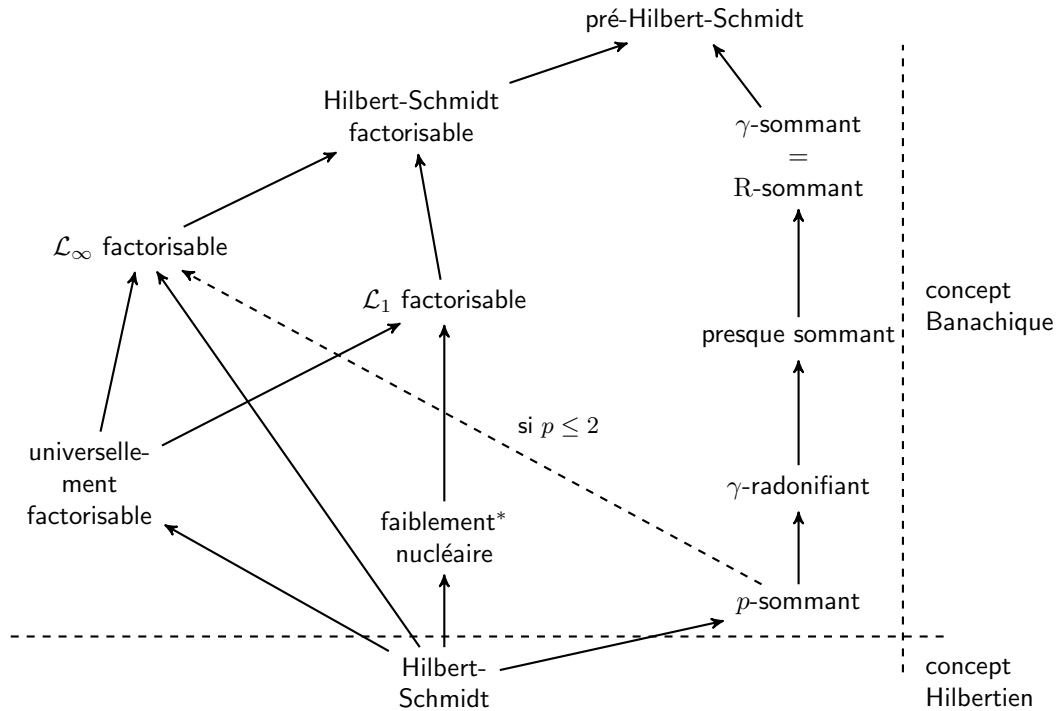
Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux espaces de Hilbert. Les opérateurs de Hilbert-Schmidt  $T : H_1 \rightarrow H_2$  sont initialement définis par la condition

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|Th_n\|^2 < +\infty$$

pour toute suite orthonormale  $(h_n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $H_1$ , ce qui est équivalent à la sommabilité de la famille  $\|Te_i\|_{i \in I}^2$  pour au moins une (donc pour toute) base hilbertienne  $(e_i)_{i \in I}$  de  $H_1$ .

Ces opérateurs admettent de nombreuses caractérisations bien connues, par des conditions qui s'expriment naturellement dans le cadre banachique : caractérisations par des propriétés de factorisation, ou par l'action de l'opérateur induit sur des suites vectorielles. On obtient ainsi

d'une part les notions d'opérateurs absolument sommants,  $p$ -sommants, presque-sommants,  $\gamma$ -sommants,  $\gamma$ -radonifiants, et d'autre part les opérateurs ayant certaines propriétés de factorisation. Le tableau suivant fait apparaître les propriétés d'inclusion entre ces diverses classes d'opérateurs, qui coïncident toutes dans le cas hilbertien. La classe la plus générale est celle des opérateurs pré-Hilbert-Schmidt, c'est à dire la classe des opérateurs linéaires  $T : E \rightarrow F$  tels que  $S \circ T \circ R : H_1 \rightarrow H_2$  soit Hilbert-Schmidt pour tout opérateur linéaire borné  $R : H_1 \rightarrow E$  et tout opérateur linéaire borné  $S : F \rightarrow H_2$ ,  $H_1$  et  $H_2$  désignant des espaces de Hilbert. En ce qui concerne les propriétés de factorisation, rappelons qu'un opérateur  $T : E \rightarrow F$  est dit universellement factorisable si  $T$  admet une factorisation à travers  $G$  pour tout espace de Banach  $G$ , et qu'un espace de Banach  $L$  est appelé espace de Hilbert-Schmidt si tout opérateur  $T : H_1 \rightarrow H_2$  admettant une factorisation à travers  $L$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt, voir [4]. Parmi les classes définies par des propriétés de factorisation qui coïncident avec la classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt dans le cas hilbertien, la plus restreinte est alors la classe des opérateurs universellement factorisables et la plus générale est celle des opérateurs admettant une factorisation de Hilbert-Schmidt. Le fait que les espaces de type  $\mathcal{L}_1$  ou  $\mathcal{L}_\infty$  sont des espaces de Hilbert-Schmidt est une conséquence de la célèbre inégalité de Grothendieck, voir les sections 2 et 3.



Dans la section 2 on rappelle les définitions de certains espaces de suites classiques : suites faiblement  $\ell_p$ , suites Rademacher sommables, Gauss sommables, et espaces de suites un peu plus généraux pour les espaces de Banach contenant une copie de  $c_0$  caractérisés par la bornitude de sommes partielles, et on rappelle les inégalités de Khintchine, Kahane et Grothendieck.

Dans la section 3 on détaille les diverses caractérisations des opérateurs de Hilbert-Schmidt évoquées plus haut, qui font intervenir les diverses classes d'opérateurs introduites dans le tableau ci-dessus, et on explique les inclusions et comparaisons indiquées dans ce tableau. Ces caractérisations sont classiques, à part sans doute l'identification entre opérateurs de Hilbert-Schmidt et opérateurs faible\* 1-nucléaires, pour laquelle nous n'avons pas trouvé de référence dans la littérature.

Dans la section 4 nous rappelons les notions de type et cotype des espaces de Banach, et le fait que la classe  $\gamma(E; F)$  des opérateurs  $\gamma$ -radonifiants de  $E$  dans  $F$  se réduit à la classe  $\Pi_2(E; F)$  des opérateurs 2-sommants de  $E$  dans  $F$  si  $F$  est de cotype 2, et même à la classe  $\Pi_1(E; F)$  des opérateurs absolument sommants de  $E$  dans  $F$  si  $E$  est en outre de type fini. Par contre Linde et

Pietsch ont observé dans [13] que si  $E = F = \ell_\infty$  alors  $\Pi_q(E; F)$  contient strictement  $\Pi_p(E; F)$  pour  $1 \leq p < q < +\infty$  et les inclusions  $\cup_{p \geq 1} (E; F) \subset \gamma(E; F) \subset \gamma^\infty(E; F)$  sont également strictes. Nous évoquons aussi à la section 4 une confusion gênante du chapitre 12 de [4] entre la classe  $\Pi_{ps}(E; F)$  des opérateurs presque-sommants et la classe  $R^\infty(E; F)$  des opérateurs Rademacher-sommants, alors que les théorèmes de Hoffmann-Jørgensen et Kwapien [8], [9] qui garantissent l'égalité entre ces deux classes ne s'appliquent que si  $F$  ne contient aucun espace isomorphe à  $c_0$ .

À la question 5, après avoir rappelé que tout opérateur de Hilbert-Schmidt est universellement factorisable et décrit diverses caractérisations des espaces de Hilbert-Schmidt données dans [4], on montre que la classe  $PS_2(E; F)$  des opérateurs de Hilbert-Schmidt de  $E$  dans  $F$  coïncide avec la classe  $\gamma(E; F)$  des opérateurs de  $\gamma$ -radonifiants de  $E$  dans  $F$  si  $F$  est de type 2, résultat qui semble nouveau. Des résultats de Linde et Pietsch, complétés par des calculs de Maurey mentionnés dans [13], donnent une description complète des classes  $\gamma(\ell_p, \ell_q)$ . On peut alors en déduire une description complète des opérateurs pré-Hilbert-Schmidt de  $\ell_p$  dans  $\ell_q$  pour  $1 \leq p < 2$ ,  $1 \leq q < +\infty$  et pour  $2 \leq p < +\infty$ ,  $2 \leq q < +\infty$  (il est clair d'autre part que tout opérateur de  $\ell_p$  dans  $\ell_q$  est pré-Hilbert-Schmidt si  $\sup(p, q) = +\infty$ ).

Nous concluons l'article en conjecturant que tout opérateur pré-Hilbert-Schmidt se factorise à travers un espace de Hilbert-Schmidt. Il résulte du théorème de factorisation de Pietsch que cette conjecture est vérifiée dans le cas particulier des opérateurs  $p$ -sommants pour  $1 \leq p \leq 2$ .

## 2. Quelques espaces de suites classiques

Les espaces de Banach considérés dans cet article sont des espaces de Banach réels. On notera  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $H$  un espace de Hilbert. Le dual de  $E$  sera noté  $E^*$  et la boule unité de  $E$  sera notée  $B_E$ . Si  $u : E \rightarrow F$  est un opérateur linéaire continu, on définit son adjoint  $u^* : F^* \rightarrow E^*$  par la formule  $\langle x, u^*(y^*) \rangle = \langle y^*, u(x) \rangle$ , de sorte que  $\|u^*\| = \|u\|$ . On note  $\mathcal{L}(E; F)$  l'espace des opérateurs bornés de  $E$  dans  $F$ , et pour  $x^* \in E^*$ ,  $y \in F$  on définit  $x^* \otimes y \in \mathcal{L}(E; F)$  par la formule

$$(x^* \otimes y)x = \langle x, x^* \rangle y \quad (x \in E).$$

Pour  $p > 1$  on note  $p^*$  le conjugué de  $p$ , défini par la formule  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ , avec la convention  $p^* = +\infty$  si  $p = 1$ . Pour  $p > 1$  on note  $(\ell_p(E), \|\cdot\|_p)$  l'espace de Banach des suites absolument  $p$ -sommables d'éléments de  $E$ , on note  $(\ell_\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$  l'espace des suites bornées d'éléments de  $E$ , et on note  $c_0(E)$  le sous-espace fermé de  $\ell_\infty(E)$  formé des suites qui convergent vers 0. Lorsque  $E = \mathbb{R}$  ces espaces sont simplement notés  $\ell_p, \ell_\infty$  et  $c_0$ ; pour des familles  $(x_i)_{i \in I}$ , indexés par  $i \in I$  on indique si besoin est l'ensemble des indices : par exemple  $\ell_p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$  désigne les suites absolument  $p$ -sommables de réels indexées sur les entiers relatifs,  $\ell_p(\mathbb{Z}, E)$  les suites absolument  $p$ -sommables d'éléments de  $E$  indexées sur les entiers relatifs, etc.

**Définition 2.1.** — Soit  $p \in [1, \infty]$ . Une suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  d'un espace de Banach  $E$  est appelée faiblement  $p$ -sommable si

$$(1) \quad \|(x_n)_{n \geq 1}\|_{\ell_p^{\text{faible}}(E)} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, x^* \rangle|^p \right)^{1/p}$$

est fini.

L'espace vectoriel des suites d'éléments de  $E$  qui sont faiblement  $p$ -sommables sera noté  $\ell_p^{\text{faible}}(E)$ . Muni de la norme (1),  $\ell_p^{\text{faible}}(E)$  est un espace de Banach, voir par exemple [4, page 32]. Rappelons qu'une partie  $F \subset E^*$  est *normante* quand  $\|x\| = \sup_{x^* \in F} |\langle x, x^* \rangle|$  pour tout  $x \in E$ . Si  $F$  est un sous-ensemble normant de  $E^*$ , on vérifie facilement que l'on a

$$(2) \quad \|(x_n)_{n \geq 1}\|_{\ell_p^{\text{faible}}(E)} = \sup_{x^* \in F} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, x^* \rangle|^p \right)^{1/p}.$$

**Définition 2.2.** — Une série  $\sum_n x_n$  dans  $E$  est appelée *commutativement convergente* si la série  $\sum_n x_{\sigma(n)}$  converge pour toute permutation  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

La convergence commutative équivaut à la convergence de la série  $\sum_n \epsilon_n x_n$  pour toute suite  $(\epsilon_n)_{n \geq 1} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ , voir par exemple [4, Théorème 1.9]. Dans ce cas

$$(3) \quad \sup_{\epsilon_n = \pm 1} \left\| \sum_n \epsilon_n x_n \right\|$$

est fini (ibidem). Observons que pour tout  $N \geq 1$ , on a

$$\begin{aligned} \sup_{\epsilon_n = \pm 1} \left\| \sum_{n=1}^N \epsilon_n x_n \right\| &= \sup_{\epsilon_n = \pm 1} \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{n=1}^N \epsilon_n \langle x_n, x^* \rangle \\ &= \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sup_{\epsilon_n = \pm 1} \sum_{n=1}^N \epsilon_n \langle x_n, x^* \rangle = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{n=1}^N |\langle x_n, x^* \rangle|. \end{aligned}$$

Ainsi, la quantité (3) n'est rien que la norme  $\ell_1^{\text{faible}}(E)$  de la suite  $(x_n)$ .

On va maintenant introduire les suites Gauss-sommables et Rademacher-sommables. Dans la suite de l'article, on notera  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables gaussiennes indépendantes, et  $(r_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables Rademacher indépendantes, c'est à dire une suite de variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs  $\pm 1$  avec la probabilité  $1/2$ . Une construction explicite d'une telle suite est donné par  $r_n(t) = \text{sign}(\sin(2^n \pi t))$  sur  $\Omega = [0, 1]$ .

**Définition 2.3.** — Une suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  d'un espace de Banach  $E$  est appelée Rademacher-sommable, et on note  $(x_n) \in \text{Rad}(E)$ , si la série  $\sum r_n x_n$  converge dans  $\mathcal{L}_2(\Omega; E)$ . Dans ce cas on pose

$$\|(x_n)_n\|_{\text{Rad}(E)} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \mathbb{E} \left\| \sum_n r_n x_n \right\|^2 \right)^{1/2}.$$

Rappelons que si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires indépendantes et symétriques, alors  $\mathbb{E}\|X\|^2 \leq \mathbb{E}\|X + Y\|^2$ . Ainsi, les (deuxièmes) moments des sommes partielles de la série  $\sum r_n x_n$  sont croissants. Cette observation amène à étudier l'espace  $\text{Rad}_\infty(E)$  des suites  $(x_n)$  d'éléments de  $E$  dont les sommes partielles sont uniformément bornées en norme  $\mathcal{L}_2$  :

$$\|(x_n)_n\|_{\text{Rad}_\infty(E)} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{N \geq 1} \left( \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \right\|^2 \right)^{1/2}$$

La base canonique de  $c_0$  montre que la bornitude uniforme des sommes partielles n'implique pas la convergence ; en effet on voit dans cet exemple que  $\mathbb{E} \left\| \sum_{n=N}^M r_n e_n \right\|^2 = 1$ , les sommes partielles ne forment donc pas une suite de Cauchy.

**Définition 2.4.** — Une suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  d'un espace de Banach  $E$  est appelée Gauss-sommable, et on note  $(x_n) \in \gamma(E)$ , si la série  $\sum \gamma_n x_n$  converge dans  $\mathcal{L}_2(\Omega; E)$ . Dans ce cas on pose

$$\|(x_n)_n\|_{\gamma(E)} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \mathbb{E} \left\| \sum_n \gamma_n x_n \right\|^2 \right)^{1/2}.$$

De manière analogue on considère aussi l'espace  $\gamma_\infty(E)$  des suites  $(x_n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $E$  qui satisfont

$$\|(x_n)_n\|_{\gamma_\infty(E)} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{N \geq 1} \left( \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N \gamma_n x_n \right\|^2 \right)^{1/2} < +\infty,$$

ce qui n'entraîne pas nécessairement la convergence de la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n x_n$ . On reviendra sur la distinction entre convergence et bornitude uniforme des sommes partielles plus loin ; notons simplement que l'espace  $c_0$  joue un rôle crucial, comme le montre le théorème de Hoffmann-Jørgensen et Kwapien, [8].

Les espaces de suites  $\gamma_\infty(E)$  et  $\text{Rad}_\infty(E)$  sont des espaces de Banach. En effet, toute suite de Cauchy  $(x^{(n)})$  de  $\gamma_\infty(E)$  est bornée. Appelons donc  $C > 0$  le supremum des normes et notons  $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k \geq 1}$ . La suite  $(x_k^{(n)})_{n \geq 1}$  est de Cauchy et converge donc pour  $n \rightarrow +\infty$  vers un  $x_k$ .

On conclut avec le lemme de Fatou que pour tout ensemble fini  $K \subset \mathbb{N}$

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{k \in K} \gamma_k x_k \right\|^2 \leq \liminf_n \mathbb{E} \left\| \sum_{k \in K} \gamma_k x_k^{(n)} \right\|^2 \leq C.$$

Ainsi,  $x = (x_k) \in \gamma_\infty(E)$ . Une autre application du lemme de Fatou donne facilement la convergence dans la norme de  $\gamma_\infty(E)$ . En remplaçant  $\gamma_n$  par  $r_n$  la même preuve donne la complétude de  $\text{Rad}_\infty(E)$ . Cette propriété se transmet à leurs sous-espaces fermés  $\gamma(E)$  et  $\text{Rad}(E)$ .

Nous terminons cette partie en rappelant trois inégalités classiques ; pour leurs démonstrations on renvoie par exemple à [4, Théorème 1.10, 1.14 et 11.1].

**Théorème 2.5 (Inégalités de Khintchine).** — Pour tout  $0 < p < +\infty$ , il existe des constantes positives  $A_p$  et  $B_p$  telles que pour toute suite  $(a_n)_{n \geq 1} \in \ell_2$ , on ait :

$$A_p \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \int_0^1 \left| \sum_n a_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \leq B_p \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}.$$

En général, on ne peut pas remplacer la valeur absolue par la norme d'un espace de Banach. Cependant, on a l'inégalité de Kahane (voir par exemple [4, Théorème 11.1]) :

**Théorème 2.6 (Inégalités de Kahane).** — Soit  $0 < p, q < \infty$ . Il existe alors une constante  $K_{p,q}$  telle que pour tout espace de Banach  $E$  et  $x_1, \dots, x_N \in E$  on ait

$$\left( \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \right\|^q \right)^{1/q} \leq K_{p,q} \left( \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \right\|^p \right)^{1/p}$$

et

$$\left( \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N \gamma_n x_n \right\|^q \right)^{1/q} \leq K_{p,q} \left( \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N \gamma_n x_n \right\|^p \right)^{1/p}.$$

La version Gaussienne des inégalités de Kahane se démontre élégamment à partir de la version Rademacher en utilisant le théorème central limite.

**Théorème 2.7 (Inégalité de Grothendieck).** — Soit  $H$  un espace de Hilbert réel de dimension  $n$ ,  $(a_{ij})_{i,j \leq 1}$  une matrice  $n \times n$  et soient  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in B_H$ . On a :

$$\left| \sum_{i,j} a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle \right| \leq K_G \sup \left\{ \left| \sum_{i,j} a_{ij} s_i t_j \right| : |s_i| \leq 1, |t_j| \leq 1 \right\}$$

où  $K_G$  est une constante universelle appelée constante de Grothendieck.

Il est important de noter que,  $\ell_\infty^n$  et  $\ell_1^n$  étant considérés au sens réel, on a

$$\begin{aligned} \|(a_{ij})\|_{\ell_\infty^n \rightarrow \ell_1^n} &= \sup_{|y_j| \leq 1} \left\| \sum_j a_{ij} y_j \right\|_{\ell_1^n} = \sup_{|x_i| \leq 1} \sup_{|y_j| \leq 1} \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j \\ &= \sup_{x_i = \pm 1} \sup_{y_j = \pm 1} \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j. \end{aligned}$$

### 3. Opérateurs de Hilbert-Schmidt et leurs généralisations

**Définition 3.1.** — Soit  $u \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$  un opérateur linéaire. On dit que  $u$  est un opérateur Hilbert-Schmidt s'il existe une base orthonormale  $(e_i)_{i \in I}$  de  $H_1$  telle que  $ue_i \in \ell_2(I; H_2)$ . L'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt est noté  $S_2(H_1; H_2)$ .

Il est facile de voir que  $S_2(H_1, H_2)$  est un idéal de  $\mathcal{L}(H_1; H_2)$ . On peut résumer la théorie classique des opérateurs de Hilbert-Schmidt, développée par exemple dans [4], par le théorème suivant.

**Théorème 3.2.** — Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux espaces de Hilbert de dimension infinie, et  $u \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

- a)  $u$  est Hilbert-Schmidt.  
 b) Pour toute base orthonormale  $(e_i)_{i \in I}$  de  $H_1$ , on a  $ue_i \in \ell_2(I; H_2)$ .  
 c) Pour toute famille orthonormale  $(e_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $H_1$  et pour toute famille orthonormale  $(f_j)_{j \in J}$  d'éléments de  $H_2$  on a  $(\langle u(e_i), f_j \rangle) \in \ell_2(I \times J; \mathbb{R})$ .  
 d) Il existe une suite orthonormale  $(e_n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $H_1$ , une suite orthonormale  $(f_n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $H_2$ , et une suite  $(\tau_n)_{n \geq 1} \in \ell_2$  telles que l'on ait

$$ux = \sum_n \tau_n \langle x, e_n \rangle f_n \quad (x \in H_1).$$

- e) Pour toute suite  $(x_n)_{n \geq 1} \in \ell_2^{\text{faible}}(H_1)$ , on a  $(ux_n)_{n \geq 1} \in \ell_2(H_2)$ .

Dans ce cas on a

$$\sum_{i \in I} \|u(e_i)\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} |\tau_n|^2 = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \|ux_n\|^2 : \|(x_n)_{n \geq 1}\|_{\ell_2^{\text{faible}}(H_1)} \leq 1 \right\}$$

où  $a_n(u) = \inf \{ \|u - v\| : v \in \mathcal{L}(H_1, H_2), \text{rang}(v) < n \}$  pour  $n \geq 1$ , et où  $(\tau_n)_{n \geq 1}$  est la suite introduite en (d).

### 3.1. Opérateurs $p$ -sommants. —

**Définition 3.3.** — Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach, et soit  $p \in [1, +\infty[$ . On dit qu'un opérateur  $u \in \text{Lin}(E; F)$  est  $p$ -sommant si  $u(x_n) \in \ell_p(F)$  pour toute suite  $(x_n) \in \ell_p^{\text{faible}}(E)$ .

En utilisant le théorème du graphe fermé, on vérifie qu'un opérateur  $u : E \rightarrow F$  est  $p$ -sommant si et seulement si il existe une constante  $c \geq 0$  telle que pour  $m \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_N \in E$ , on ait :

$$(4) \quad \sum_{n=1}^N \|ux_n\|^p \leq c^p \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{n=1}^N |\langle x_n, x^* \rangle|^p.$$

et dans ce cas on note  $\pi_p(u)$  le infimum des constantes  $c > 0$  vérifiant (4). Autrement dit, l'application  $\tilde{u} : (x_n)_{n \geq 1} \rightarrow (ux_n)_{n \geq 1}$  est une application continue de  $\ell_p^{\text{faible}}(E)$  dans  $\ell_p(E)$ , et  $\pi_p(u) = \|\tilde{u}\|$ , voir [4, Proposition 2.1.]. On note  $\Pi_p(E; F)$  l'espace des opérateurs  $p$ -sommants  $u : E \rightarrow F$ . Muni de la norme  $\pi_p$ ,  $\Pi_p(E; F)$  est un espace de Banach [4, Proposition 2.6, p. 38].

On déduit de l'inégalité de Hölder que pour  $1 \leq p < q < +\infty$ , on a  $\Pi_p(E; F) \subset \Pi_q(E; F)$ , et  $\pi_q(u) \leq \pi_p(u)$  pour  $u \in \Pi_p(E; F)$ , voir [4, Théorème 2.8]. De plus il est immédiat que  $\Pi_p(E; F) \subseteq \mathcal{L}(E; F)$  avec  $\|u\|_{\mathcal{L}(E; F)} \leq \pi_p(u)$ . On a alors la propriété d'idéal [4, p. 37], qui résulte immédiatement de la définition ci-dessus.

**Proposition 3.4 (propriété d'idéal).** — Soient  $E, F, Z, W$  des espaces de Banach, soit  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  un opérateur  $p$ -sommant, et soient  $v \in \mathcal{L}(Z; E)$  et  $w \in \mathcal{L}(F; W)$  deux opérateurs linéaires continus. Alors  $w \circ u \circ v$  est  $p$ -sommant et  $\pi_p(w \circ u \circ v) \leq \|w\| \pi_p(u) \|v\|$ .

Si  $K$  est un sous-ensemble faible\*-fermé normant de  $B_{E^*}$ , alors  $K$  est faible\*-compact et l'application  $\iota_E : E \rightarrow \mathcal{C}(K)$  est une isométrie, où  $\mathcal{C}(K)$  désigne l'algèbre de Banach des fonctions continues sur  $K$  et où  $\iota_E(x)(x^*) = \langle x, x^* \rangle$  pour  $x \in E$ ,  $x^* \in K$ . Un exemple d'opérateur  $p$ -sommant est l'injection  $j_p : \mathcal{C}(K) \rightarrow \mathcal{L}^p(\mu) := \mathcal{L}^p(K, \mu)$  où  $\mathcal{C}(K)$  désigne l'espace des fonctions continues sur un compact  $K$  et  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $K$ , c'est à dire une mesure de Radon positive sur  $K$  telle que  $\mu(K) = 1$ . Le caractère fondamental de cet exemple est montré par le théorème suivant, voir [4, Théorème 2.13], qui joue un rôle essentiel dans la théorie des opérateurs  $p$ -sommants.

**Théorème 3.5 (Théorème de factorisation de Pietsch).** — On suppose que  $1 \leq p < +\infty$ . Soit  $u \in \text{Lin}(E; F)$  un opérateur linéaire et  $K$  un sous-ensemble normant faible \*-fermé de  $B_{E^*}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- a)  $u$  est  $p$ -sommant.

b) Il existe une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $K$ , un sous-espace vectoriel fermé  $E_p$  de  $\mathcal{L}_p(\mu)$  et un opérateur  $\hat{u} \in \mathcal{L}(E_p; F)$  tels que :

- (i)  $j_p \circ \iota_E(E) \subset E_p$  et
- (ii)  $\hat{u} \circ j_p \circ \iota_E(x) = ux \forall x \in E$ . Autrement dit le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\iota_E} & \iota_E(E) & \hookrightarrow & C(K) \\ \downarrow u & & \downarrow j_p^E & & \downarrow j_p \\ F & \xleftarrow{\hat{u}} & E_p & \hookrightarrow & \mathcal{L}_p(\mu) \end{array}$$

**Corollaire 3.6.** — Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach, et soit  $K$  un sous-ensemble faible\* fermé normant de  $B_{E^*}$ . Un opérateur linéaire  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  est 2-sommant si et seulement si il existe une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $K$  et  $\tilde{u} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}_p(\mu), F)$  tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ \downarrow \iota_E & & \uparrow \tilde{u} \\ C(K) & \xrightarrow{j_2} & \mathcal{L}_2(\mu) \end{array}$$

et on a dans ce cas  $\|\tilde{u}\| = \pi_2(u)$ .

*Démonstration.* — Ceci se déduit du théorème de factorisation de Pietsch dans le cas  $p = 2$ , en posant  $\tilde{u} = \hat{u} \circ P$ , où  $P$  désigne la projection orthogonale de  $L^2(\mu)$  sur  $E_2$ .  $\square$

### 3.2. Opérateurs absolument sommants. —

**Définition 3.7.** — Un opérateur  $u : E \rightarrow F$  est appelé *absolument sommant* si la série  $\sum_n \|ux_n\|$  converge pour toute série commutativement convergente  $\sum x_n$  d'éléments de  $E$ .

L'ensemble des opérateurs absolument sommants est noté  $\Pi_{abs}(E; F)$ , et les éléments de  $\Pi_{abs}(E; F)$  sont caractérisés par la condition

$$\pi_{abs}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \sum_{n=1}^N \|ux_n\| < +\infty,$$

le supremum étant calculé sur toutes les familles finies  $(x_1, \dots, x_N)$  d'éléments de  $E$  telles que

$$\sup_{\epsilon_1 = \pm 1, \dots, \epsilon_N = \pm 1} \left\| \sum_{n=1}^N \epsilon_n ux_n \right\| \leq 1.$$

Comme l'ensemble  $\{-1, 1\}^N$  est un sous-ensemble normant de la boule unité de  $\ell_\infty = \ell_1^*$ , on obtient facilement le résultat suivant.

**Proposition 3.8.** — Soit  $E, F$  deux espaces de Banach, et soit  $u \in \mathcal{L}(E; F)$ . Alors  $u$  est absolument sommant si et seulement si  $u$  est 1-sommant, et dans ce cas  $\pi_1(u) = \pi_{abs}(u)$ .

En particulier,  $\Pi_{abs}(E; F)$  est un idéal d'opérateurs. On a vu dans l'équivalence (e) du Théorème 3.2 que des opérateurs Hilbert-Schmidt coïncident avec les opérateurs 2-sommants. En utilisant le Corollaire 3.6 et l'inégalité de Khintchine on obtient le résultat suivant, voir [4, Théorème 2.21].

**Théorème 3.9.** — Soit  $E$  un espace de Banach, soit  $H$  un espace de Hilbert, et soit  $u \in \mathcal{L}(E; H)$ . S'il existe  $p \geq 1$  tel que  $u^*$  soit  $p$ -sommant, alors  $u$  est absolument sommant et on a

$$\pi_1(u) \leq A_1^{-1} B_p \pi_p(u^*),$$

où  $A_1$  et  $B_q$  sont les constantes intervenant dans les inégalités de Khintchine.

Il résulte de la condition (d) du Théorème 3.2 que si  $u : H_1 \rightarrow H_2$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt, alors  $u^* : H_2 \rightarrow H_1$  l'est aussi. On en déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 3.10.** — *Soit  $u \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

- a) *Il existe  $p \geq 1$  tel que  $u$  soit  $p$ -sommant.*
- b)  *$u$  est absolument sommant (donc  $p$ -sommant pour tout  $p \geq 1$ ).*
- c)  *$u$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt.*

*Démonstration.* — Si  $u = u^{**}$  est  $p$ -sommant pour un réel  $p \geq 1$ , alors  $u^*$  est absolument sommant, donc  $u$  l'est aussi. D'autre part si  $u$  est absolument sommant il est 2-sommant, donc c'est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Le fait que (c) implique (a) résulte du fait que tout opérateur de Hilbert-Schmidt est 2-sommant.  $\square$

### 3.3. Inégalité de Grothendieck et factorisations des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

— L'inégalité de Grothendieck (Théorème 2.7) permet d'obtenir les majorations classiques suivantes.

**Corollaire 3.11.** — *Soient  $n$  et  $N$  deux entiers positifs, et soit  $p \in [1, 2]$ .*

- a) *Pour tout opérateur  $u : \ell_1^n \rightarrow \ell_2^N$  on a  $\pi_1(u) \leq K_G \|u\|$ .*
- b) *Pour tout opérateur  $v : \ell_\infty^n \rightarrow \ell_p^N$  on a  $\pi_2(v) \leq K_G \|v\|$ .*

On dit qu'un espace de Banach  $E$  est  $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ , avec  $1 \leq p \leq \infty$  et  $1 \leq \lambda < +\infty$ , si pour tout sous-espace vectoriel  $U$  de dimension finie de  $E$ , il existe un sous-espace vectoriel  $V$  de dimension finie de  $E$  contenant  $U$  et un isomorphisme  $\phi : V \rightarrow \ell_p^{\dim(V)}$  tel que  $\|\phi\| \|\phi^{-1}\| \leq \lambda$ . On dit que  $E$  est un espace  $\mathcal{L}_p$  s'il existe  $\lambda \geq 1$  tel que  $E$  soit  $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ . Il résulte de [4, Théorème 3.2] que si  $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  est un espace mesuré alors  $\mathcal{L}_p(\Omega, \mu)$  est un espace  $\mathcal{L}_{p,\lambda}$  pour tout  $\lambda > 1$  si  $1 \leq p \leq \infty$ . De même si  $K$  est compact alors  $\mathcal{C}(K)$  est un espace  $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$  pour tout  $\lambda > 1$ , ce qui implique le résultat ci-dessus pour  $p = \infty$  puisque la transformation de Gelfand est un isomorphisme de  $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mu)$  sur  $\mathcal{C}(\widehat{\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mu)})$  où  $\widehat{\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mu)}$  désigne l'espace compact formé des caractères de l'algèbre de Banach  $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mu)$ , voir par exemple [5].

Le célèbre théorème de Grothendieck qui est un corollaire de l'inégalité de Grothendieck (théorème 2.7) démontre que tout opérateur linéaire continu  $u \in \mathcal{L}(\ell_1; \ell_2)$  est absolument sommant. On a plus généralement le résultat suivant, dont on trouvera une démonstration dans [4, Chapitre 3].

**Théorème 3.12.** — a) *Soit  $E$  un espace  $\mathcal{L}_{1,\lambda}$  et soit  $F$  un espace  $\mathcal{L}_{2,\mu}$ . Alors tout opérateur linéaire borné  $u : E \rightarrow F$  est absolument sommant et on a*

$$\pi_1(u) \leq \lambda \mu K_G \|u\|_{\mathcal{L}(E;F)}.$$

- b) *Soit  $E$  un espace  $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$  et soit  $F$  un espace  $\mathcal{L}_{p,\mu}$  avec  $0 \leq p \leq 2$ . Alors tout opérateur linéaire borné  $v : E \rightarrow F$  est 2-sommant et on a*

$$\pi_2(v) \leq \lambda \mu K_G \|v\|_{\mathcal{L}(E;F)}.$$

On obtient alors une caractérisation classique des opérateurs de Hilbert-Schmidt qui s'exprime en termes de factorisation, voir [4, page 85].

**Corollaire 3.13.** — *Soit  $u : \mathcal{L}(H_1; H_2)$  un opérateur. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- a)  *$u$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt.*
- b)  *$u$  est factorisable à travers un espace  $\mathcal{L}_\infty$ .*
- c)  *$u$  est factorisable à travers un espace  $\mathcal{L}_1$ .*

*Démonstration.* — (a)  $\Leftrightarrow$  (b) : Si  $u$  est de Hilbert-Schmidt, alors  $u$  est 2-sommant. Donc  $u$  est factorisable à travers un espace  $\mathcal{C}(K)$  d'après le théorème de factorisation de Pietsch, et (b) est vérifié puisque  $\mathcal{C}(K)$  est un espace  $\mathcal{L}_\infty$ . D'autre part si  $u$  est factorisable à travers un espace  $\mathcal{L}_\infty$ ,



alors  $u$  est 2-sommant d'après le théorème 3.12 et le principe d'idéal. Par conséquent  $u$  est de Hilbert-Schmidt.

(a)  $\Leftrightarrow$  (c) : Cette équivalence entre est une version duale de la première équivalence. On sait que le dual de l'espace  $\mathcal{C}(K)$  est un espace  $\mathcal{L}_1$ . Si  $u \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$  est de Hilbert-Schmidt, alors  $u^*$  est de Hilbert-Schmidt. D'après la condition (d) du théorème 3.2,  $u^*$  admet donc une factorisation de la forme :  $u^* : H_2 \rightarrow \mathcal{C}(K) \rightarrow H_1$  et  $u = u^{**}$  admet une factorisation  $u : H_1 \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow H_2$ . Réciproquement, si  $u : H_1 \rightarrow H_2$  est factorisable à travers un espace  $\mathcal{L}_1$ , alors on déduit du théorème 3.12 que  $u$  est 2-sommant, donc c'est un opérateur de Hilbert-Schmidt.  $\square$

### 3.4. Opérateurs de Hilbert-Schmidt et nucléarité. —

**Définition 3.14.** — Soit  $1 \leq p < \infty$ . Un opérateur  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  est  $p$ -nucléaire s'il existe des opérateurs  $a \in \mathcal{L}(\ell_p; F)$ ,  $b \in \mathcal{L}(E; \ell_\infty)$  et une suite  $\lambda = (\lambda_n)_{n \geq 1} \in \ell_p$  tels que  $u = a \circ M_\lambda \circ b$  où  $M_\lambda \in \mathcal{L}(\ell_\infty; \ell_p)$  désigne l'opérateur de multiplication par  $\lambda$ .

On note  $\mathcal{N}_p(E; F)$  l'ensemble des opérateurs  $p$ -nucléaires de  $E$  dans  $F$  et on pose  $\nu_p(u) = \inf \|a\| \|\lambda\|_{\ell_p} \|b\|$ , l'infimum étant pris sur toutes les factorisations du type ci-dessus.

Les opérateurs 1-nucléaires sont souvent appelés opérateurs nucléaires.

**Définition 3.15.** — Soit  $u \in \mathcal{L}(E; F)$ .

- On dit que  $u$  est faiblement  $p$ -nucléaire si  $u = \sum_n x_n^* \otimes y_n$  avec  $(x_n^*)_{n \geq 1} \in \ell_p^{\text{faible}}(E^*)$  et  $(y_n)_{n \geq 1} \in \ell_q(F)$ .
- On dit que  $u$  est faiblement\*  $p$ -nucléaire si  $u = \sum_n x_n^* \otimes y_n$  avec  $(x_n^*)_{n \geq 1} \in \ell_p^{\text{faible}^*}(E^*)$  et  $(y_n)_{n \geq 1} \in \ell_q(F)$ .

On remarquera que tout opérateur faiblement  $p$ -nucléaire est également faiblement\*  $p$ -nucléaire. De même tout opérateur faiblement\* nucléaire d'un espace réflexif  $E$  dans un espace  $F$  est faiblement nucléaire.

**Proposition 3.16.** — Soit  $u \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ . Alors  $u$  est faiblement\* 1-nucléaire si et seulement si  $u$  est de Hilbert-Schmidt.

*Démonstration.* — Soit  $u \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$  un opérateur de Hilbert-Schmidt. On a  $u = \sum_n \lambda_n e_n^* \otimes e_n$ , avec  $(e_n^*)$  et  $(e_n)$  des familles orthonormales de  $H_1$  et  $H_2$ , et  $(\lambda_n) \in \ell_2$ . On pose  $x_n^* = \lambda_n e_n^*$ . On a, pour  $x \in H_1$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x_n^*, x \rangle| &= \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle \lambda_n e_n^*, x \rangle| = \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n| |\langle e_n^*, x \rangle| \\ &\leq \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n^*, x \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq \|x\| \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Donc  $u = \sum_n x_n^* \otimes e_n$  avec  $(e_n)_{n \geq 1} \in \ell_\infty(H_2)$  et  $(x_n^*)_{n \geq 1} \in \ell_1^{\text{faible}^*}(H_1)$ . Par définition,  $u$  est donc faiblement\* 1-nucléaire.

Réciproquement, soit  $u = \sum_n x_n^* \otimes y_n$  avec  $(x_n^*)_{n \geq 1} \in \ell_1^{\text{faible}^*}(H_1)$  et  $(y_n)_{n \geq 1} \in \ell_\infty(H_2)$  un opérateur faiblement 1-nucléaire. On a  $uh = \sum_n \langle h, x_n^* \rangle y_n$ . On considère les opérateurs  $v : H_1 \rightarrow \ell_1$ ,  $h \mapsto (\langle h, x_n^* \rangle)_{n \geq 1}$  et  $w : \ell_1 \rightarrow H_2$ ,  $(\alpha_n)_{n \geq 1} \mapsto \sum_n \alpha_n y_n$ . Donc  $u = w \circ v$ . On voit bien que  $u$  se factorise à travers l'espace  $\ell_1$  et d'après le Corollaire 3.13,  $u$  est de Hilbert-Schmidt.  $\square$

### 3.5. Opérateurs $\gamma$ -sommants et R-sommants. — L'orthonormalisation d'une suite indépendante de Gaussiennes ou de variables Rademacher implique que

$$\mathbb{E} \left| \sum_n r_n \langle x_n, x^* \rangle \right|^2 = \mathbb{E} \left| \sum_n \gamma_n \langle x_n, x^* \rangle \right|^2 = \sum_n |\langle x_n, x^* \rangle|^2$$

ce qui a pour effet que  $\gamma_\infty^{\text{faible}}(E) = \text{Rad}_\infty^{\text{faible}}(E) = \ell_2^{\text{faible}}(E)$ , où  $\gamma_\infty^{\text{faible}}(E)$  et  $\text{Rad}_\infty^{\text{faible}}(E)$  sont les analogues "faibles" des espaces  $\gamma_\infty(E)$  et  $\text{Rad}_\infty(E)$  introduits à la section 2. Ceci motive la définition suivante :

**Définition 3.17 (Opérateurs  $\gamma$ -sommants et R-sommants).** — Soit  $u \in \mathcal{L}(E; F)$ . Alors  $u$  est appelé Gauss-sommant ou  $\gamma$ -sommant si l'image de toute suite  $(x_n)_n \in \ell_2^{\text{faible}}(E)$  appartient à  $\gamma_\infty(F)$ .

De même,  $u$  est appelé Rademacher-sommant ou R-sommant, si l'image de toute suite  $(x_n)_n \in \ell_2^{\text{faible}}(E)$  appartient à  $\text{Rad}_\infty(F)$ . On note alors  $u \in \gamma^\infty(E; F)$ , respectivement  $u \in \text{R}^\infty(E; F)$ .

Les opérateurs  $\gamma$ -sommant ou R-sommants sont évidemment continus. Par le théorème du graphe fermé on obtient dans les deux cas l'existence d'une constante  $C \geq 0$  vérifiant, pour toute famille finie  $(x_1, \dots, x_N)$  d'éléments de  $E$ ,

$$(5) \quad \left( \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N \gamma_n u x_n \right\|_F^2 \right)^{1/2} \leq C \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left( \sum_{n=1}^N |\langle x_n, x^* \rangle|^2 \right)^{1/2} \quad \text{si } u \in \gamma^\infty(E; F),$$

respectivement

$$(6) \quad \left( \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r_n u x_n \right\|_F^2 \right)^{1/2} \leq C \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left( \sum_{n=1}^N |\langle x_n, x^* \rangle|^2 \right)^{1/2} \quad \text{si } u \in \text{R}^\infty(E; F),$$

On note alors  $\|u\|_{\gamma^\infty}$  respectivement  $\|u\|_{\text{R}^\infty}$  les meilleures constantes dans (5), respectivement (6). Remarquons que l'inégalité de Kahane (Théorème 2.6) permet de passer à une norme équivalente en remplaçant les normes  $\mathcal{L}_2$  en normes  $\mathcal{L}_p$  sur le coté gauche de (5) et (6).

**Remarque.** — Dans le cas où  $E = H$  est un espace Hilbertien, l'espace  $\gamma_2^\infty(H; F)$  est parfois défini dans la littérature par la propriété

$$(7) \quad \sup_{\Lambda} \mathbb{E} \left\| \sum_n \gamma_n u h_n \right\|^2 \leq C^2.$$

où le supremum est pris sur l'ensemble  $\Lambda$  de tous les systèmes orthonormaux finis  $(h_n)_n$  d'éléments de  $H^{(1)}$ . Les deux notions coïncident : en effet, notons que toute suite orthonormale  $(e_n)_{n \geq 1}$  définit une suite de  $\ell_2^{\text{faible}}(H)$  ; Ainsi (5) implique (7) avec  $C = \|u\|_{\gamma^\infty}$ . Réciproquement, supposons (7) vérifié pour tout système orthonormal fini. On sait alors (voir, par exemple [19, Théorème 6.2]), que  $u \circ v$  satisfait (7) pour tout opérateur  $v \in \mathcal{L}(H)$ . Pour montrer (5), soit  $(x_n) \in \ell_2^{\text{faible}}(H)$  donné. Pour un système orthonormé  $(h_n)$  de  $H$  on pose  $v(h_n) := x_n$ . Alors  $v$  définit un opérateur linéaire continu sur  $H$  qui satisfait  $\|v\| = \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{\ell_2^{\text{faible}}(H)}$  : on en déduit (5) par la propriété d'idéal.

Observons que les suites  $\gamma$ -sommables (respectivement Rademacher-sommables) peuvent être confondues avec les opérateurs  $\gamma$ -sommants (respectivement Rademacher-sommants)  $u : \ell_2 \rightarrow E$  ; de ce fait, par abus de notation, on peut écrire  $\gamma^\infty(\ell_2; E) = \gamma^\infty(E)$  et  $\text{R}^\infty(\ell_2; E) = \text{R}^\infty(E)$  respectivement.

A partir de (5) et (6) on vérifie aussitôt que  $\gamma^\infty(E : F)$  et  $\text{R}^\infty(E; F)$  vérifient la propriété d'idéal : si  $E, F, X, Y$  sont des espaces de Banach et si  $v \in \mathcal{L}(X; E)$ ,  $w \in \mathcal{L}(F; Y)$  et  $u \in \gamma^\infty(E; F)$  (respectivement  $u \in \text{R}^\infty(E; F)$ ), alors la composition  $w \circ u \circ v$  est  $\gamma$ -sommant respectivement R-sommant et on a

$$\|w \circ u \circ v\|_{\gamma^\infty(X; Y)} \leq \|v\| \|u\|_{\gamma^\infty(E; F)} \|w\|,$$

respectivement

$$\|w \circ u \circ v\|_{\text{R}^\infty(E; F)} \leq \|v\| \|u\|_{\text{R}^\infty(E; F)} \|w\|.$$

On déduit du "principe de comparaison", voir [18, Théorème 3.2] que  $\gamma^\infty(F) \subset \text{R}^\infty(F)$ . Si on pose  $m_1 = \sqrt{2/\pi}$  on a précisément

$$\|(y_n)\|_{\text{R}^\infty(F)} \leq m_1^{-1} \|(y_n)\|_{\gamma^\infty(F)}$$

(1). La définition vise de couvrir des espaces de Hilbert non-séparables ; dans le cas d'un Hilbert séparable de dimension infinie on peut se limiter aux familles  $\{e_1, \dots, e_N\}$  pour  $N \geq 1$ , où  $(e_n)_{n \geq 1}$  désigne une base hilbertienne de  $H$

pour  $(x_n)_{n \geq 1} \in \gamma^\infty(F)$ . Ceci est une conséquence facile du principe de contraction de Kahane et du fait que les variables aléatoires  $\gamma_n$  et  $r_n|\gamma_n|$  ont la même distribution. En général, les espaces  $\gamma^\infty(F)$  et  $R^\infty(F)$  sont distincts, mais le Lemme 12.14 de [4] donne des "comparaisons en moyenne" qui permettent de démontrer le résultat suivant.

**Théorème 3.18.** — *Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach, et soit  $u \in \mathcal{L}(E; F)$ . Alors  $u$  est Rademacher-sommant si et seulement si  $u$  est  $\gamma$ -sommant, et dans ce cas on a*

$$m_1 \|u\|_{R^\infty(E; F)} \leq \|u\|_{\gamma^\infty(E; F)} \leq \|u\|_{R^\infty(E; F)}.$$

*Démonstration.* — Seule la deuxième estimation est à montrer. On suppose donc que  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  est  $R$ -sommant et se donne une suite  $(x_k) \in \ell_2^{\text{faible}}(E)$ . Définissons  $v \in \mathcal{L}(\ell_2; E)$  par  $v(e_k) = x_k$  : on a alors  $\|v\| = \|(x_k)\|_{\ell_2^{\text{faible}}(E)}$ . En notant  $\mathcal{O}_n$  le groupe orthogonal de  $\ell_2^n$ , et  $\sigma_n$  la mesure de Haar normalisée sur  $\mathcal{O}_n$  on a par le lemme 12.14 de [4]

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n \gamma_k u k_k \right\|^2 &= \mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n \gamma_k u \circ v \circ w e_k \right\|^2 \\ &= \int_{\mathcal{O}_n} \mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n \gamma_k u \circ v \circ w e_k \right\|^2 d\sigma_n(w) \\ &\leq \|u\|_{R^\infty(E; F)} \int_{\mathcal{O}_n} \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{k=1}^n \langle v \circ w e_k, x^* \rangle^2 d\sigma_n(w) \\ &\leq \|u\|_{R^\infty(E; F)} \sup_{w \in \mathcal{O}_n} \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{k=1}^n \langle e_k, w^* v^* x^* \rangle^2 d\sigma_n(w) \\ &= \|u\|_{R^\infty(E; F)} \|v\|^2 = \|u\|_{R^\infty(E; F)} \|(x_k)\|_{\ell_2^{\text{faible}}(E)}^2. \quad \square \end{aligned}$$

**3.6. Opérateurs  $\gamma$ -radonifiants et opérateurs presque sommants.** — On déduit du théorème d'Itô-Nisio, voir [19, Théorème 2.17] que l'on a les résultats suivants.

**Théorème 3.19.** — *Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite  $\gamma$ -sommable (respectivement Rademacher-sommable) d'éléments d'un espace de Banach  $E$ . Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- La série  $\sum_n \gamma_n x_n$  (respectivement  $\sum_n r_n x_n$ ) converge presque sûrement dans  $E$ .
- La série  $\sum_n \gamma_n x_n$  (respectivement  $\sum_n r_n x_n$ ) converge en probabilité dans  $E$ .
- Il existe  $p \geq 1$  tel que la série  $\sum_n \gamma_n x_n$  respectivement (respectivement  $\sum_n r_n x_n$ ) converge dans  $L^p(\Omega, E)$ .
- La série  $\sum_n \gamma_n x_n$  (respectivement  $\sum_n r_n x_n$ ) converge dans  $L^p(\Omega, E)$  pour tout  $p \geq 1$ .

De plus l'ensemble  $\gamma(E)$  (respectivement  $R(E)$ ) des suites  $(x_n)_{n \geq 1}$  vérifiant ces conditions est égal à l'adhérence de l'ensemble  $c_{00}(E)$  des suites d'éléments de  $E$  nulles à partir d'un certain rang dans  $\gamma^\infty(E)$  respectivement  $R^\infty(E)$ , et on a, pour  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,

$$\|(x_n)_{n \geq 1}\|_{\gamma^\infty(E)} = \left( \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n x_n \right\|^2 \right)^{1/2},$$

respectivement

$$\|(x_n)_{n \geq 1}\|_{R^\infty(E)} = \left( \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} r_n x_n \right\|^2 \right)^{1/2}.$$

Ceci suggère les notions suivantes.

**Définition 3.20.** — On dit qu'un opérateur  $u : E \rightarrow F$  est  $\gamma$ -radonifiant (respectivement presque sommant) si  $(u x_n)_{n \geq 1} \in \gamma(F)$  (respectivement  $(u x_n)_{n \geq 1} \in R(F)$ ) pour toute suite  $(x_n)_{n \geq 1} \in$

$\ell_2^{\text{faible}}(E)$ . L'ensemble des opérateurs  $\gamma$ -radonifiants (respectivement presque sommants)  $u : E \rightarrow F$  est noté  $\gamma(E; F)$  (respectivement  $\Pi_{ps}(E; F)$ ). Pour  $u \in \gamma(E; F)$  (respectivement  $\Pi_{ps}(E; F)$ ) on pose

$$\|u\|_{\gamma(E; F)} = \|u\|_{\gamma^\infty(E; F)} \quad \text{respectivement} \quad \pi_{ps}(u) = \|u\|_{R^\infty(E; F)}.$$

Notons que si  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  est  $\gamma$ -radonifiant, alors le Théorème 3.19 implique que  $\|u\|_{\gamma(E; F)}$  est la plus petite constante  $c \geq 0$  telle que

$$\mathbb{E} \left\| \sum_n \gamma_n u x_n \right\|^2 \leq c^2 \|(x_n)\|_{\ell_2^{\text{faible}}(E)}^2$$

pour toute suite  $(x_n)_{n \geq 1} \in \ell_2^{\text{faible}}(E)$ , et de même pour des opérateurs presque sommants.

On vérifie que  $\gamma(E; F)$  contient l'adhérence dans  $\gamma^\infty(E; F)$  de l'ensemble des opérateurs de rang fini, et ces deux ensembles sont égaux si  $H$  est un espace de Hilbert séparable. De même  $\Pi_{ps}(E; F)$  contient l'adhérence dans  $R^\infty(E; F)$  de l'ensemble des opérateurs de rang fini.

Le résultat suivant est une reformulation d'un résultat de Hoffmann-Jørgensen et Kwapien, [8, 9]. Nous complétons la version de ce théorème donné par van Neerven dans [19, Théorème 4.2] en incorporant à l'énoncé une conséquence d'un exemple donné par Linde et Pietsch dans [14] d'un exemple d'opérateur  $\gamma$ -sommant  $T \in \mathcal{L}(\ell_2; c_0)$  qui n'est pas  $\gamma$ -radonifiant, voir aussi [19, Exemple 4.4].

**Théorème 3.21.** — *Soit  $E$  un espace de Banach. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- a)  $\gamma(E) = \gamma^\infty(E)$ .
- b)  $R(E) = R^\infty(E)$ .
- c) *L'espace  $E$  ne contient aucun sous-espace fermé isomorphe à  $c_0$ .*

En combinant ce résultat avec le théorème 3.18 on déduit immédiatement

**Corollaire 3.22.** — *Soit  $F$  un espace de Banach. Si  $F$  ne contient aucun sous-espace fermé isomorphe à  $c_0$ , alors  $\gamma^\infty(E; F) = \gamma(E; F) = R^\infty(E; F) = \Pi_{ps}(E; F)$ , et on a, pour tout opérateur  $\gamma$ -radonifiant  $u : E \rightarrow F$*

$$m_1 \pi_{ps}(u) \leq \|u\|_{\gamma(E; F)} \leq \pi_{ps}(u).$$

Dans le cas général on a  $\gamma(E; F) \subset \Pi_{ps}(E; F)$ , et  $m_1 \pi_{ps}(u) \leq \|u\|_{\gamma(E; F)}$  pour  $u \in \gamma(E; F)$ . Notons que dans le chapitre 12 de [4] les auteurs ont malheureusement confondu la classe des opérateurs presque sommants avec la classe des opérateurs Rademacher bornés, comme l'ont remarqué avant nous Blasco, Tarieladze et Vidal dans [3]. Nous reviendrons sur cette question dans [2]. On a le résultat classique suivant

**Proposition 3.23.** — *Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux espaces de Hilbert. Alors  $S_2(H_1, H_1) = \gamma^\infty(H_1, H_2) = \gamma(H_1, H_2)$ . De plus  $\pi_2(u) = \|u\|_{\gamma(H_1, H_2)}$  pour tout opérateur de Hilbert-Schmidt  $u$ .*

*Démonstration.* — On utilise l'orthonormalité des suites gaussiennes et le fait que  $\|x\|_H^2 = \langle x, x \rangle$ .  $\square$

Finalement, on rappelle un résultat de Linde et Pietsch [13, 14] sur la comparaison entre opérateurs  $p$ -sommants et  $\gamma$ -sommants. La preuve repose sur le théorème de factorisation de Pietsch et les inégalités de Khintchine-Kahane, voir par exemple [19, Proposition 12.1].

**Proposition 3.24.** — *Soit  $p \geq 1$ . Alors tout opérateur  $p$ -sommant est  $\gamma$ -radonifiant, et on a*

$$\|u\|_{\gamma(E; F)} \leq c_p \pi_p(u) \quad (u \in \Pi_p(E; F)),$$

avec  $c_p = K_{2,p}^\gamma K_{p,2}^\gamma$  où  $K_{2,p}^\gamma$  et  $K_{p,2}^\gamma$  sont les constantes intervenant dans les inégalités de Kahane-Khintchine gaussiennes.

#### 4. Type et cotype des espaces de Banach

On rappelle les notions suivantes, qui sont apparues à la suite des travaux de Hoffmann-Jørgensen, Kwapień, Maurey et Pisier au début des années 1970, voir par exemple [15] et les exposés du Séminaire Maurey-Schwartz de cette époque à l'École Polytechnique.

**Définition 4.1.** — a) On dit qu'un espace de Banach  $E$  est de type  $p \in [1, 2]$  s'il existe une constante  $c_p > 0$  telle que pour toute famille finie  $x_1, \dots, x_N$  d'éléments de  $E$  on ait

$$\left( \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \right\|^2 \right)^{1/2} \leq c_p \left( \sum_{n=1}^N \|x_n\|^p \right)^{1/p}.$$

b) On dit qu'un espace de Banach  $E$  est de cotype  $q \in [2, +\infty)$  s'il existe une constante  $c'_q > 0$  telle que pour toute famille finie  $x_1, \dots, x_N$  d'éléments de  $E$  on ait

$$\left( \sum_{n=1}^N \|x_n\|^q \right)^{1/q} \leq c'_q \left( \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \right\|^2 \right)^{1/2}.$$

Les plus petites constantes dans les définitions ci-dessus sont notées  $T_p^r(E)$  et  $C_q^r(E)$ . On vérifie que tout espace de Banach est de type 1 (on appellera ceci le type trivial) et, moyennant une adaptation évidente de la définition, de cotype infini. On peut définir de même le type et le cotype en utilisant une suite gaussienne au lieu d'une suite de Rademacher. On obtient les mêmes notions, voir [4, Proposition 12.11 et Lemma 12.1], avec des constantes gaussiennes  $T_p^\gamma(E)$  et  $C_q^\gamma(E)$ . On vérifie qu'un espace de Banach a les mêmes types et cotypes que son bidual, voir [4, Proposition 11.9].

On rappelle que pour  $1 < p < \infty$  on note  $p^*$  le conjugué de  $p$ , défini par la formule  $1/p^* + 1/p = 1$ . On a le résultat facile suivant, voir [4, Proposition 11.10].

**Proposition 4.2.** — Si un espace de Banach  $E$  est de type  $p \in (1, 2]$ , alors son dual  $E^*$  est de cotype  $p^*$ , et  $C_{p^*}^r(E^*) \leq T_p^r(E)$ .

La réciproque est évidemment fautive, puisque  $\ell_1$  est de cotype 2 alors que son préduel  $c_0$  n'est de type  $p$  pour aucun  $p > 1$ . De même le fait que  $E$  soit de cotype fini n'implique rien sur le type de  $E^*$ , puisque  $\ell_1$  est de cotype 2 alors que son dual  $\ell_\infty = c_0^{**}$  n'est de type  $p$  pour aucun  $p > 1$ . Par contre puisque  $E$  et  $E^{**}$  ont même type et cotype le fait que  $E^*$  soit de type  $p$  implique que  $E$  est de cotype  $p^*$ .

On vérifie que pour  $1 \leq p < +\infty$  un espace  $\mathcal{L}_p$  de dimension infinie est de type  $\min(p, 2)$  et de cotype  $\max(p, 2)$ , et que ces résultats sont optimaux. Un espace  $\mathcal{L}_\infty$  de dimension infinie ne peut être de type non-trivial ou de cotype fini. Il était d'ailleurs à priori évident que si  $E$  contient une copie de  $c_0$  alors  $E$  n'est pas de cotype fini puisque si  $(e_n) = (\delta_{m,n})_{m \geq 1}$  alors

$$\left( \sum_{n=1}^N \|r_n e_n\|^q \right)^{1/q} = N \quad \text{tandis que} \quad \left( \mathbb{E} \sum_{n=1}^N \|r_n e_n\|^2 \right)^{1/2} = 1.$$

Un espace de Hilbert est à la fois de type 2 et de cotype 2, et un résultat profond de Kwapień [10] montre que réciproquement les seuls espaces de Banach qui sont à la fois de type 2 et de cotype 2 sont les espaces isomorphes aux espaces de Hilbert.

On a le résultat suivant, voir [19, Proposition 2.6], qui montre que les espaces de suites  $\gamma$ -sommables et Rademacher-sommables d'éléments de  $E$  coïncident si  $E$  est de cotype fini.

**Proposition 4.3.** — Si  $E$  est de cotype fini, alors pour  $1 \leq p < +\infty$  il existe une constante positive  $C_{p,E}$  telle que pour toute famille finie  $(x_1, \dots, x_N)$  d'éléments de  $E$  on ait

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N \gamma_n x_n \right\|^p \leq C_{p,E} \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \right\|^p.$$

Par conséquent on a trivialement  $\gamma(E; F) = \Pi_{ps}(E; F)$  si  $F$  est de cotype fini, ce qui résulte aussi du fait qu'un espace de cotype fini ne contient aucun sous-espace fermé isomorphe à  $c_0$ . Le résultat suivant est dû à Linde et Pietsch, voir [13, 14, 15].

**Théorème 4.4.** — *Soit  $F$  un espace de Banach. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

- a)  $F$  est de cotype 2.
- b)  $\Pi_2(E; F) = \gamma^\infty(E; F)$  pour tout espace de Banach  $E$ .
- c)  $\Pi_2(H; F) = \gamma^\infty(H; F)$  pour tout espace de Hilbert  $H$ .

*Démonstration.* — Supposons que  $F$  est de cotype 2, posons  $c = C_{2,F}^r$ , et soit  $u \in \gamma^\infty(E; F) = R^\infty(E; F)$ . On a, pour toute famille finie  $(x_1, \dots, x_N)$  d'éléments de  $E$ ,

$$\sum_{n=1}^N \|ux_n\|^2 \leq c^2 \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r_n u x_n \right\|^2 \leq c^2 \|u\|_{\gamma(E;F)} \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{n=1}^N |\langle x_n, x \rangle|^2.$$

Donc  $u \in \Pi_2(E; F)$ , et  $\pi_2(u) \leq C_{2,F}^r \|u\|_{R^\infty(E;F)}$ .

Il est clair que (b) implique (c). Supposons finalement que (c) est vérifié. Donc  $R^\infty(\ell_2, F) = \gamma^\infty(\ell_2, F) = \Pi_2(\ell_2, F)$ . Comme les injections de  $\gamma(\ell_2, F)$  et  $\Pi_2(E; F)$  dans  $\mathcal{L}(\ell_2, F)$  sont continues, le graphe de l'injection  $i : \gamma(\ell_2, F) \rightarrow \Pi_2(\ell_2, F)$  est fermé dans  $\gamma(\ell_2, F) \times \Pi_2(E; F)$ ,  $i$  est continue, et il existe une constante  $c \geq 0$  telle que  $\pi_2(u) \leq c \|u\|_{\gamma(\ell_2, F)}$  pour tout  $u \in \gamma(\ell_2, F)$ . Soit  $(x_1, \dots, x_N)$  une famille finie d'éléments de  $E$ ,  $(\lambda_m)_{m \geq 1} \in \ell_2$ . Posons  $u((\lambda_m)) = \sum_{m=1}^N \lambda_m x_m$ . Soit  $(e_n)_{n \geq 1}$  la base hilbertienne naturelle de  $\ell_2$ . On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \|x_n\|^2 &= \sum_{n=1}^N \|ue_n\|^2 \leq \pi_2^2(u) \leq c^2 \|u\|_{\gamma(\ell_2, F)}^2 = \sup_{p \geq 1} \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^p \gamma_n u e_n \right\|^2 \\ &= c^2 \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N \gamma_n u e_n \right\|^2 = c^2 \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N \gamma_n x_n \right\|^2 \leq \frac{c^2 \pi}{2} \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \right\|^2. \end{aligned}$$

Donc  $F$  est de cotype 2. □

Le résultat suivant, voir [4, Corollaire 11.16], que nous donnons sans démonstration, complète le théorème précédent.

**Théorème 4.5.** — a) *Si  $E$  est de cotype 2, alors  $\Pi_2(E; F) = \Pi_1(E; F)$ .*

- b) *Si  $E$  est de cotype  $< q < +\infty$ , alors  $\Pi_r(E; F) = \Pi_1(E; F)$  pour  $1 \leq r < q^*$ .*

Pour  $1 \leq p \leq \infty$ , notons  $\Gamma_p(E; F)$  l'ensemble des opérateurs  $u : E \rightarrow F$  admettant une factorisation de la forme  $u = v \circ w$ , avec  $v \in \mathcal{L}(E; \mathcal{L}_p(\Omega, \mu))$  et  $w \in \mathcal{L}(\mathcal{L}_p(\Omega, \mu); F)$  pour un certain espace mesuré  $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ . La proposition 2.12 de [19] montre que si  $u : H \rightarrow F$  est  $\gamma$ -radonifiant, alors  $u^* : H \rightarrow F^*$  est 2-sommant. Nous verrons plus loin un résultat un peu plus général, valable pour les applications  $\gamma$ -sommantes. Ces résultats admettent une réciproque si  $E$  est de type 2. Ceci est une conséquence du théorème suivant, voir [4, Théorème 12.10].

**Théorème 4.6.** — *Soit  $F$  un espace de Banach. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

- a)  $F$  est de type 2.
- b)  $\mathcal{L}(\ell_1; F) = \gamma(\ell_1; F)$ .
- c)  $\Gamma_1(E; F) \subset \gamma(E; F)$  pour tout espace de Banach  $E$ .

Ce résultat est énoncé dans [4] en utilisant la classe des opérateurs presque sommants, qui est confondue dans [4] avec la classe  $R^\infty(E; F) = \gamma^\infty(E; F)$  des opérateurs Rademacher-sommants. Cette confusion n'est pas gênante dans ce cas, puisqu'un espace de Banach de type 2 ne contient pas de sous-espace fermé isomorphe à  $c_0$ . Il est élémentaire que (c) implique (b) qui implique (a), compte tenu du fait que  $\gamma_\infty(E; F) = R^\infty(E; F)$  pour tout espace de Banach  $E$ . Nous renvoyons à

[4, Chapitre 12] pour la démonstration que (a) implique (c). Notons que l'inégalité de Grothendieck joue un rôle essentiel dans cette preuve : si  $u : \mathcal{L}_1(\Omega, \mu) \rightarrow F$  est un opérateur borné, et si  $F$  est de type 2, il résulte de l'inégalité donnée à [4, page 245] que  $u \in \gamma^\infty(\mathcal{L}_1(\Omega, \mu), F)$  et que l'on a

$$(8) \quad \|u\|_{\gamma^\infty(\mathcal{L}_1(\Omega, \mu); F)} \leq T_2^\gamma(F) K_G \|u\|$$

où  $K_G$  désigne la constante de Grothendieck. On obtient alors le résultat suivant, voir [4, Corollaire 12.21].

**Corollaire 4.7.** — *Soit  $E$  un espace de Banach, soit  $F$  un espace de Banach de type 2, et soit  $u \in \mathcal{L}(E; F)$ . Si  $u^* \in \mathcal{L}(F^*; E^*)$  est 2-sommant, alors  $u$  est  $\gamma$ -radonifiant.*

*Démonstration.* — Il résulte du théorème de factorisation de Pietsch qu'il existe un compact  $K$  et une mesure de probabilité sur  $K$  tels que  $u^* = w \circ i \circ j$ , où  $j : \mathcal{C}(K) \subset \mathcal{L}_\infty(\mu) \rightarrow \mathcal{L}_2(\mu)$  est l'injection canonique, où  $i : F^* \rightarrow \mathcal{C}(K)$  est isométrique et où  $w : \mathcal{L}_2(K, \mu) \rightarrow E^*$  est continue. Mais on a  $j = j_0^*$ , où  $j_0 : \mathcal{L}_2(\mu) \rightarrow \mathcal{L}_1(\mu)$  est l'injection canonique. Donc  $j_0^{**}(\mathcal{L}_2(\mu)) \subset \mathcal{L}_1(\mu)$ , et  $u^{**} \in \Gamma_1(E^{**}; F^{**}) \subset \gamma^\infty(E^{**}, F^{**})$  ce qui implique que  $u \in \gamma^\infty(E; F) = \gamma(E; F)$ .  $\square$

Notons que l'hypothèse que  $F$  est de type 2 est nécessaire pour obtenir ce résultat : si  $F$  n'est pas de type 2 il existe  $u : \ell_2 \rightarrow E$  non  $\gamma$ -sommant tel que  $u^* : E^* \rightarrow \ell_2$  soit 2-sommant, voir [19, Théorème 12.3].

## 5. Extensions de Hilbert-Schmidt par relèvement

On dira qu'un opérateur  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  admet une factorisation à travers un espace de Banach  $Z$  s'il existe  $v \in \mathcal{L}(E; Z)$  et  $w \in \mathcal{L}(Z; F)$  tels que  $u = w \circ v$ , et on dira que  $u$  est universellement factorisable s'il est factorisable à travers  $Z$  pour tout espace de Banach  $Z$ . Une caractérisation profonde des opérateurs de Hilbert-Schmidt est donné par le résultat suivant, voir [4, Théorème 19.2].

**Théorème 5.1.** — *Soit  $u \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ . Alors  $u$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt si et seulement si  $u$  est universellement factorisable.*

On introduit maintenant la notion d'espace de Hilbert-Schmidt, voir [4, Chapitre 19].

**Définition 5.2.** — Soit  $E$  un espace de Banach. On dit que  $E$  est un espace de Hilbert-Schmidt si tout opérateur  $u : H_1 \rightarrow H_2$  admettant une factorisation à travers  $E$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt, et on note HS la classe des espaces de Hilbert-Schmidt.

Il est clair que  $E \in \text{HS}$  si et seulement si  $E^* \in \text{HS}$ . La classe des espaces de Hilbert-Schmidt contient les classes  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_\infty$ , mais elle est beaucoup plus vaste. Par exemple si  $E$  est un sous-espace fermé de  $\mathcal{C}(K)$  tel que  $\mathcal{C}(K)/E$  soit réflexif, alors il résulte de [4, Théorème 15.13] que  $\mathcal{L}(E; F) = \Pi_2(E; F)$  pour tout espace de Banach  $F$  de cotype 2, et en particulier pour tout espace de Hilbert, donc  $E$  est un espace de Hilbert-Schmidt. De même si  $Z$  est un sous-espace réflexif de  $\mathcal{L}_1(\mu)$  alors l'espace quotient  $\mathcal{L}_1(\mu)/Z$  a la "propriété de Grothendieck", c'est à dire que tout opérateur  $u : \mathcal{L}_1(\mu)/Z \rightarrow \ell_2$  est absolument sommant, donc a fortiori 2-sommant, et  $\mathcal{L}_1(\mu)/Z$  est un espace de Hilbert-Schmidt. Ainsi l'algèbre de Banach  $H^\infty(\mathbb{D})$  des fonctions holomorphes bornées sur le disque unité ouvert  $\mathbb{D}$ , ainsi que l'algèbre du disque  $\mathcal{A}(\mathbb{D})$  formée des fonctions holomorphes sur  $\mathbb{D}$  admettant un prolongement continu au disque unité fermé sont en tant qu'espaces de Banach des espaces de Hilbert-Schmidt.

Par contre aucun espace  $K$ -convexe ne peut être un espace de Hilbert-Schmidt, voir [4, page 443], ce qui signifie qu'aucun espace de type non trivial ne peut être un espace de Hilbert-Schmidt, d'après un célèbre théorème de Pisier [17] ou [4, Théorème 13.3].

**Définition 5.3.** — On dit qu'un opérateur  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  est pré-Hilbert-Schmidt si  $w \circ u \circ v$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt pour tout couple d'opérateurs bornés  $v \in \mathcal{L}(H_1; E)$  et  $w \in \mathcal{L}(F; H_2)$ , où  $H_1$  et  $H_2$  désignent des espaces de Hilbert quelconques. L'ensemble des opérateurs pré Hilbert-Schmidt de  $E$  dans  $F$  sera noté  $\text{PS}_2(E; F)$ .

Il est clair que  $u \in \text{PS}_2(E; F)$  si et seulement si  $u^* \in \text{PS}_2(F^*; E^*)$ , que  $\text{PS}_2(E; F) = \mathcal{L}(E; F)$  si  $E$  ou  $F$  est un espace espace de Hilbert-Schmidt, et que  $\text{PS}_2(H_1; H_2) = \text{S}_2(H_1; H_2)$  si  $H_1$  et  $H_2$  sont des espaces de Hilbert. L'observation suivante est une reformulation d'un résultat bien connu, voir [19, page 50].

**Proposition 5.4.** — *Soit  $E$  un espace de Banach, et  $H$  un espace de Hilbert. Alors  $\text{PS}_2(E; H) = \Pi_2(E; H)$ .*

*Démonstration.* — Par le corollaire 3.10 on a  $\Pi_2(E; H) \subset \text{PS}_2(E; H)$ . Soit  $u \in \text{PS}_2(E; H)$ , et soit  $(x_n)_{n \geq 1} \in \ell_2^{\text{faible}}(E)$ . On a, pour  $N \geq M \geq 1$ , et une suite  $(\lambda_n)_{n \geq 1} \in \ell_2$ ,

$$\left\| \sum_{n=M}^N \lambda_n x_n \right\| = \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left| \sum_{n=M}^N \lambda_n \langle x_n, x^* \rangle \right| \leq \left( \sum_{n=M}^N \lambda_n^2 \right)^{1/2} \|(x_n)_{n \geq 1}\|_{\ell_2^{\text{faible}}(E)}.$$

la série  $\sum_n \lambda_n x_n$  converge donc dans  $E$ , et on obtient un opérateur borné  $w : \ell_2 \rightarrow E$  en posant  $u(\lambda_n)_{n \geq 1} = \sum_{n=1}^N \lambda_n x_n$  pour  $(\lambda_n)_{n \geq 1} \in \ell_2$ . Soit  $i \in \mathcal{L}(H)$  l'application identité, et soit  $(e_n)_{n \geq 1}$  la base hilbertienne naturelle de  $\ell_2$ . Alors  $w \circ u = w \circ u \circ i \in \text{S}_2(E; H)$  et on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u x_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|(w \circ u) e_n\|^2 = \|w \circ u\|_{\text{S}_2(E; H)}^2 < +\infty,$$

ce qui montre que  $u$  est 2-sommant.  $\square$

Comme  $u \in \text{PS}_2(E; F)$  si et seulement si  $u^* \in \text{PS}_2(F^*; E^*)$ , on a le corollaire suivant.

**Corollaire 5.5.** — *Soit  $F$  un espace de Banach, et soit  $H$  un espace de Hilbert. Alors  $u \in \text{PS}_2(H; F)$  si et seulement si  $u^* : F^* \rightarrow H$  est 2-sommant. En particulier si  $u \in \gamma^\infty(H; F)$ , alors  $u^*$  est 2-sommant.*

En utilisant le théorème 4.20 de [4] on obtient une caractérisation des espaces de Hilbert-Schmidt mentionnée dans les Notes du Chapitre 19 de [4].

**Théorème 5.6.** — *Soit  $E$  un espace de Banach. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

- a)  $E$  est un espace de Hilbert-Schmidt.
- b)  $u^*$  est 2-sommant pour tout espace de Banach  $F$  et pour tout opérateur 2-sommant  $u \in \mathcal{L}(F; E)$ .
- c)  $\mathcal{L}(E; H) = \Pi_2(E; H)$  pour tout espace de Hilbert  $H$ .
- d)  $u$  est 2-sommant pour tout espace de Banach  $F$  et pour tout  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  tel que  $u^*$  est 2-sommant.
- e)  $\mathcal{L}(E^*; H) = \Pi_2(E^*; H)$  pour tout espace de Hilbert  $H$ .

*Démonstration.* — L'équivalence de (b)–(e) est donnée par le théorème 4.20 de [4], et il est clair que si (c) est vérifié alors tout opérateur  $u : H_1 \rightarrow H_2$  qui factorise à travers  $E$  est 2-sommant, donc de Hilbert-Schmidt. Ainsi,  $E$  est un espace de Hilbert-Schmidt. Réciproquement si  $E$  est un espace de Hilbert-Schmidt alors pour tout espace de Hilbert  $H$ ,  $\mathcal{L}(E; H) = \text{PS}_2(E; H)$  et par la proposition 5.4,  $\text{PS}_2(E; H) = \Pi_2(E; H)$ , donc (c) est vérifié.  $\square$

**Théorème 5.7.** — *Soit  $E$  un espace de Banach, et soit  $F$  un espace de Banach de type 2. Alors  $\text{PS}_2(E; F) = \gamma(E; F)$ .*

*Démonstration.* — Par le corollaire 3.10 et en remarquant que  $\gamma(H) = \ell_2(H)$  on a  $\gamma(E; F) \subset \text{PS}_2(E; F)$ . Soit maintenant  $u \in \text{PS}_2(E; F)$ , et soit  $v \in \mathcal{L}(\ell_2; E)$ . On a  $u^* \in \text{PS}_2(F^*; E^*)$ , donc  $(u \circ v)^* = v^* \circ u^* \in \Pi_2(F^*; \ell_2)$  par la proposition 5.4. Il résulte alors du corollaire 4.7 que  $u \circ v : \ell_2 \rightarrow F$  est  $\gamma$ -radonifiant.

Soit  $(x_n)_{n \geq 1} \in \ell_2^{\text{faible}}(E)$ . De même que plus haut, on voit qu'il existe  $v \in \mathcal{L}(\ell_2; E)$  tel que  $u v e_n = x_n$  pour tout  $n \geq 1$ ,  $(e_n)_{n \geq 1}$  désignant la base hilbertienne naturelle de  $\ell_2$ . Soit  $(\gamma_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{L}_2(\Omega, \mathbb{P})$



une suite gaussienne. Alors la série  $\sum_n \gamma_n x_n = \sum_n \gamma_n (u \circ v) e_n$  est convergente dans  $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathbb{P})$ , ce qui montre que  $u \in \gamma(E; F)$ .  $\square$

Si  $U \subset \mathcal{L}(E; F)$ , on pose  $U^* \stackrel{\text{def}}{=} \{u^*\}_{u \in U}$ . Comme  $\text{PS}_2(E; F)^* = \text{PS}_2(F^*; E^*)$ , on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 5.8.** — *Soit  $E$  un espace de Banach tel que  $E^*$  soit de type 2. Alors pour tout espace de Banach  $F$  on a  $\text{PS}_2(E; F)^* = \gamma(F^*; E^*)$ .*

Comme les espaces  $\ell_p$  sont de type  $\min(2, p)$ , on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 5.9.** — *Soient  $E, F$  des espaces de Banach quelconques. Alors pour  $p \geq 2$  on a  $\text{PS}_2(E; \ell_p) = \gamma(E; \ell_p)$  et pour  $p \in [1, 2]$ ; on a  $\text{PS}_2(\ell_p; F)^* = \gamma(F^*; \ell_{p^*})$*

Notons que le corollaire permet de décrire concrètement les éléments de diagonaux  $\text{PS}_2(\ell_p; \ell_q)$  si  $1 \leq p \leq 2$ , ou si  $2 \leq q < +\infty$ . En effet des calculs effectués par Linde et Pietsch dans [13, 14], complétés par des calculs de Maurey mentionnés dans [13], donnent une description des opérateurs diagonaux  $\gamma$ -sommants  $u_\sigma : (x_n)_{n \geq 1} \rightarrow (\sigma_n x_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{L}(\ell_p; \ell_q)$  associés à une suite  $\sigma = (\sigma_n)_{n \geq 1}$  : on obtient le tableau suivant, qui caractérise les suites  $\sigma$  telles que  $u_\sigma \in \gamma(\ell_p; \ell_q)$ . et dans certains cas les suites  $\sigma$  telles que  $u_\sigma \in \text{PS}_2(\ell_p; \ell_q)$

$p$	$q$	$u_\sigma \in \gamma(\ell_p; \ell_q)$
$1 \leq p < 2$	$1 \leq q < 2p/2-p$	$\sigma \in \ell_r, 1/r = 1/2 - 1/p + 1/q$
$1 \leq p < 2$	$q \geq 2p/2-p$	$\sigma \in \ell_\infty$
$2 \leq p < +\infty$	$q \geq 1$	$\sigma \in \ell_q$

En appliquant ces résultats à  $u_\sigma$  et à  $u_\sigma^* \in \mathcal{L}(\ell_{q^*}; \ell_{p^*})$ , on peut caractériser les suites  $\sigma$  telles que  $u_\sigma \in \text{PS}_2(\ell_p; \ell_q)$  pour  $1 \leq p < 2$ ,  $1 \leq q < +\infty$  et pour  $2 \leq p < +\infty$ ,  $2 \leq q < +\infty$  (nous renvoyons à [13, 14] pour le cas où  $p = +\infty$  et/ou  $q = +\infty$ ).

$p$	$q$	$u_\sigma \in \text{PS}_2(\ell_p; \ell_q)$
$1 \leq p < 2$	$1 \leq q < 2p/2-p$	$\sigma \in \ell_r, 1/r = 1/2 - 1/p + 1/q$
$1 \leq p < 2$	$q \geq 2p/2-p$	$\sigma \in \ell_\infty$
$2 \leq p < +\infty$	$q \geq 2$	$\sigma \in \ell_q$

Nous concluons cet article par la conjecture suivante, qui est vérifiée d'après le théorème de factorisation de Pietsch par tout opérateur  $u$  tel que  $u$  ou  $u^*$  soit  $p$ -sommant avec  $p \leq 2$ .

**Conjecture 5.10.** — *Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach. Alors tout opérateur pré-Hilbert-Schmidt  $u : E \rightarrow F$  se factorise à travers un espace de Hilbert-Schmidt.*

## Références

- [1] Abdillah, S.A. Extensions au cadre Banachique de la notion d'opérateur de Hilbert-Schmidt, thèse, Université de Bordeaux, 2012.
- [2] Abdillah, S.A., Esterle, J., Haak, B. *Opérateurs  $\gamma$ -radonifiants et opérateurs presque sommants*, en préparation.
- [3] Blasco, O., Tarieladze, V., Vidal, R. *K-convexity and duality for almost summing operators*. Georgian Mathematical Journal Volume 7(2000), Number 2, 245-268.
- [4] Diestel, J., Jarchow, H., Tonge, A. Absolutely summing operators. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 43. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [5] Dales, H. G., Banach Algebras and Automatic Continuity, London Mathematical Society Monographs. New Series, 24. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.
- [6] Grothendieck, A. *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*. (French) [Summary of the metric theory of topological tensor products] Reprint of Bol. Soc. Mat. So Paulo 8 (1953), 1-79.

- [7] Grothendieck, A. *Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires.* (French) Ann. Inst. Fourier Grenoble 4 (1952), 73112 (1954).
- [8] Hoffmann-Jørgensen, J. *Sums of independent Banach space valued random variables*, Studia Math. 52(1974), 159 – 186.
- [9] Kwapiień, S. *On operators factorizable through  $L_p$  space.* Actes du Colloque d'Analyse Fonctionnelle de Bordeaux (Univ. de Bordeaux, 1971), pp. 215-225. Bull. Soc. Math. France, Mem. No. 3132, Soc. Math. France, Paris, 1972.
- [10] Kwapiień, S. *Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients*, Studia Math. 44 (1972), 583-595.
- [11] Kahane, J-P., "Some Random Series of Functions", second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol.5, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [12] Latala, R., Oleszkiewicz, K. *On the best constant in the Khinchin-Kahane inequality*, Studia Math. 109(1994), n.1, 101-104.
- [13] Linde, W., Pietsch, A. *Applications  $\gamma$ -sommantes dans les espaces de Banach*, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. A 277 (1973), 247-248.
- [14] Linde, W., Pietsch, A. *Mappings of Gaussian measures of cylindrical sets in Banach Spaces*, Teor. Verojatnost. i Primenen. 19 (1974), 472-487, English translation in Theory Probab. Appl. 19(1974), 445-460.
- [15] Maurey, B. *Espaces de cotype  $p$ ,  $0 < p \leq 2$* , Séminaire Maurey-Schwartz (1972-1973), exposé no 7.C. R. Acad. Sci. Paris Sr. A-B 277 (1973).
- [16] Pisier, G., *Les inégalités de Khintchine-Kahane, d'après C. Borell*, Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1977-1978), exp. no 7, 1-14.
- [17] Pisier, G., *Holomorphic semigroups and the geometry of Banach spaces*, Ann. of Math. 115 (1982), 375-392.
- [18] Van Neerven, J., *Stochastic Evolution Equations*. ISEM Lecture Notes 2007/08. April, 18, 2008.
- [19] Van Neerven, J.,  *$\gamma$ -Radonifying Operators - a survey*, The AMSI-ANU Workshop on Spectral Theory and Harmonic Analysis, 1-61, Proc. Centre Math. Appl. Austral. Nat. Univ., 44, Austral. Nat. Univ., Canberra, 2010.

---

27 juin 2014

S.A. ABDILLAH, Université des Comores, Rue de la Corniche, B.P2585 Moroni (Comores)

*E-mail* : [intissoir2002@hotmail.fr](mailto:intissoir2002@hotmail.fr)

J. ESTERLE, Institut de Mathématiques de Bordeaux, Université Bordeaux 1, 351, cours de la Libération, 33405 Talence CEDEX, FRANCE • *E-mail* : [esterle@math.u-bordeaux.fr](mailto:esterle@math.u-bordeaux.fr)

B.H. HAAK, Institut de Mathématiques de Bordeaux, Université Bordeaux 1, 351, cours de la Libération, 33405 Talence CEDEX, FRANCE • *E-mail* : [bernhard.haak@math.u-bordeaux.fr](mailto:bernhard.haak@math.u-bordeaux.fr)