Cohomologie Weil-étale et valeurs spéciales des fonctions zêta des schémas arithmétiques

Mémoire présenté pour l'obtention du

Diplôme d'habilitation à diriger les recherches

Discipline : Mathématiques Pures

par

Baptiste Morin

Institut de Mathématiques de Bordeaux

Date de soutenance : 6 juin 2017

Rapporteurs :	Ted CHINBURG
	Christopher DENINGER
	Thomas GEISSER
	Stephen LICHTENBAUM
Composition du jury :	Denis BENOIS
	Philippe CASSOU-NOGUES
	Christopher DENINGER
	Stephen LICHTENBAUM
	Jan NEKOVÁŘ
	Christophe SOULÉ

Remerciements

Je remercie Ted Chinburg, Christopher Deninger, Thomas Geisser et Steve Lichtenbaum d'avoir accepté d'écrire un rapport sur ce mémoire d'habilitation. Ils ont toute ma reconnaissance. Je remercie également les membres du jury Denis Benois, Philippe Cassou-Noguès, Christopher Deninger, Steve Lichtenbaum, Jan Nekovář et Christophe Soulé pour leur participation à la soutenance et pour avoir fait le déplacement jusqu'à Bordeaux.

Je remercie aussi Florent Jouve et Philippe Cassou-Noguès pour leurs conseils avisés depuis l'écriture du mémoire jusqu'à la soutenance. La lecture attentive par Philippe Cassou-Noguès d'une version préliminaire de ce mémoire, ainsi que ses corrections et suggestions, ont aussi été très utiles.

L'intégralité de ce travail a été réalisée d'une manière ou d'une autre en collaboration avec Matthias Flach. Ses connaissances encyclopédiques, sa gentillesse et sa hauteur de vue sur la théorie des nombres ont eu une grande influence sur mon travail et mon apprentissage. Christopher Deninger et Steve Lichtenbaum sont à l'initiative du projet extrêmement ambitieux consistant à essayer de construire des théories cohomologiques adaptées à l'étude des fonctions zêta des schémas arithmétiques. L'influence de leurs idées sur ce mémoire, qui est une modeste contribution dans cette direction, est évidente.

Le travail présenté dans ce mémoire a débuté lorsque j'étais à Caltech, s'est poursuivi à l'Université de Münster, puis à l'Institut de Mathématiques de Toulouse, et s'est terminé à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux. Je tiens à remercier mes mentors Matthias Flach, Christopher Deninger, Denis-Charles Cisinski et Philippe Cassou-Noguès ainsi que les collègues et amis que j'ai rencontrés dans ces universités, notamment Maurice Duits, Steven Frankel, Rafael Torres, Jakob Scholbach, Marcello Bernardara ainsi que toute l'équipe de théorie des nombres de Bordeaux.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Ce mémoire est un survol des articles [**15**], [**46**], [**47**], [**48**], [**49**], [**50**], [**51**] et [**16**], portant sur la cohomologie Weil-étale. Pour expliquer le contexte dans lequel se situent ces travaux, on rappelle à certains endroits du texte quelques définitions et résultats dus à C. Deninger, M. Flach, T. Geisser, S. Lichtenbaum et J. Milne.

Dans le chapitre 2, on énonce les conjectures standards relatives aux fonctions zêta des schémas arithmétiques. On donne ensuite un aperçu des programmes de Deninger et de Lichtenbaum, qui visent à la construction de théories cohomologiques permettant d'approcher ces conjectures. Le programme de Deninger prédit en particulier l'existence d'une cohomologie à support compact, donnée par des espaces vectoriels complexes $H^i_{\mathrm{dyn},c}(X,\mathcal{C})$ de dimension $\leq \infty$ munis d'un endomorphisme Θ, permettant l'interprétation spectrale de la fonction $\zeta(X,s)$ suivante :

$$\zeta(X,s) = \prod_{i=0}^{2d} \mathrm{det}_{\infty}\left(\frac{s\cdot \mathrm{Id}-\Theta}{2\pi} \mid H^i_{\mathrm{dyn,c}}(X,\mathcal{C})\right)^{(-1)^{i+1}}.$$

Le programme de Lichtenbaum prédit l'existence d'une certaine topologie Weil-étale dont la cohomologie à support compact donne des complexes parfaits $R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z})$ et $R\Gamma_{W,c}(X,\tilde{\mathbb{R}})$, des isomorphismes $H^i_{W,c}(X,\mathbb{Z})_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} H^i_{W,c}(X,\tilde{\mathbb{R}})$, et une classe fondamentale $\theta \in H^1_W(X,\tilde{\mathbb{R}})$ telle que

$$\cdots \xrightarrow{\cup\theta} H^i_{W,c}(X,\mathbb{Z})_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\cup\theta} H^{i+1}_{W,c}(X,\mathbb{Z})_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\cup\theta} \cdots$$

est un complexe acyclique dont la "caractéristique d'Euler-Poincaré" est la valeur spéciale de $\zeta(X,s)$ en $s=0$ au signe près. Ces programmes conjecturaux sont les motivations, parfois lointaines, pour le travail exposé dans ce mémoire.

Le chapitre 3 résume les articles [**15**], [**46**], [**47**] et [**49**], dans lesquels on étudie le topos Weil-étale. On rappelle d'abord les définitions, dues à Lichtenbaum, de la topologie Weil-étale d'une variété sur un corps fini et du système projectif de sites Weil-étales associés à un corps de nombres. On définit ensuite le topos Weil-étale $\overline{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)}_W$ de l'anneau d'entiers d'un corps de nombres F. On donne une description détaillée de ce topos, en explicitant ses sous-topos fermés $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})_W$ correspondant aux places $\mathfrak{p}$ ultramétriques et archimédiennes de F, son sous-topos correspondant au point générique, son topos de base $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_1)_W := B_{\mathbb{R}}$, son groupe fondamental, sa cohomologie en bas degrés, et le morphisme du topos Weil-étale sur le topos étale d'Artin-Verdier. Le topos $\overline{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)}_W$ peut être vu comme un modèle entier pour le groupe de Weil. On définit ensuite le topos Weil-étale X_W d'un schéma propre et régulier $X/\mathbb{Z}$ puis on calcule sa cohomologie à support compact $H^i_c(X_W,\tilde{\mathbb{R}})$. On définit la classe fondamentale $\theta \in H^1_W(X,\tilde{\mathbb{R}})$ telle que

$$\cdots \xrightarrow{\cup\theta} H^i_c(X_W,\tilde{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\cup\theta} H^{i+1}_c(X_W,\tilde{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\cup\theta} \cdots$$

est un complexe acyclique. Ces topos ont été introduits dans [**15**] et [**47**]. On explique enfin quelques analogies topologiques entre le topos Weil-étale et le système dynamique de Deninger, et on observe que la cohomologie de certains groupes de Weil donne une interprétation spectrale des facteurs locaux des fonctions zêta de Dedekind. Les résultats mentionnés dans ce troisième chapitre sont inconditionnels. Malheureusement, la cohomologie du topos Weil-étale à coefficients entiers est pathologique, et ne sera donc pas utilisée dans les chapitres suivants. Cependant, le topos Weil-étale fournit une certaine intuition géométrique.

Le chapitre 4 résume l'article [**48**]. On définit *conditionnellement* des complexes parfaits de groupes abéliens $R\Gamma_W(\overline{X},\mathbb{Z})$ et $R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z})$, où X est un schéma régulier et propre sur $\mathbb{Z}$. Ces complexes sont obtenus à partir de la dualité d'Artin-Verdier et du complexe de cycles de Bloch, sans définir un topos ni un quelconque objet géométrique sous-jacent. Il existe des isomorphismes $H^i_{W,c}(X,\mathbb{Z})_{\mathbb{R}}\overset{\sim}{\to} H^i_c(X_W,\tilde{\mathbb{R}})$, où $H^i_c(X_W,\tilde{\mathbb{R}})$ est la cohomologie à support compact du topos Weil-étale. Similairement, on a des isomorphismes $H^i_W(\overline{X},\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Z}_l\simeq H^i(\overline{X}_{et},\mathbb{Z}_l)$ pour tout nombre premier l, où $H^i(\overline{X}_{et},\mathbb{Z}_l)$ est la cohomologie étale l-adique. Si $X/\mathbb{F}_q$ est une variété projective lisse, alors on a un quasi-isomorphisme $R\Gamma(X_W,\mathbb{Z})\overset{\sim}{\to} R\Gamma_W(X,\mathbb{Z})$, où $R\Gamma(X_W,\mathbb{Z})$ est la cohomologie du topos Weil-étale. Conformément au programme de Lichtenbaum, on conjecture que le déterminant du complexe $R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z})$ muni du morphisme $\cup\theta$ est, au signe près, la valeur spéciale de la fonction $\zeta(X,s)$ en $s=0$. Le résultat principal de ce chapitre montre que cette description conjecturale de la valeur spéciale en $s=0$, pour les schémas projectifs lisses sur l'anneau d'entiers d'un corps de nombres, est équivalente à la conjecture de Bloch-Kato telle qu'elle a été formulée par Fontaine-Perrin-Riou [**18**]. A titre d'exemple, on traite le cas des espaces projectifs $\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_F}$ sur l'anneau d'entiers d'un corps de nombres F.

On s'intéresse aux valeurs zêta des variétés sur les corps finis dans le chapitre 5. On résume des travaux de J. Milne, S. Lichtenbaum et T. Geisser, qui donnent une description conjecturale des valeurs spéciales de $Z(X,t)$ en $t=q^{-n}$, où $X/\mathbb{F}_q$ est une variété projective lisse. Cette description de $Z^*(X,q^{-n})$ se fait en termes de la cohomologie Weil-étale $R\Gamma(X_W,\mathbb{Z}(n))$, de la classe fondamentale $e\in H^1(W_{\mathbb{F}_q},\mathbb{Z})$, et du facteur correcteur

$$\chi(X/\mathbb{F}_q,\mathcal{O}_X,n)=\sum_{i\leq n,j}(-1)^{i+j}\cdot(n-i)\cdot\dim_{\mathbb{F}_q}H^j(X,\Omega^i_{X/\mathbb{F}_q})$$

introduit par Milne dans [**43**]. Pour généraliser leur description des valeurs spéciales aux schémas arithmétiques, on a besoin d'interpréter le facteur correcteur $\chi(X/\mathbb{F}_q,\mathcal{O}_X,n)$ comme la caractéristique d'Euler-Poincaré multiplicative de la cohomologie de de Rham dérivée modulo la filtration de Hodge. Plus précisément, on prouve dans [**50**] l'égalité

$$\prod_{i\in\mathbb{Z}}\mid H^i(X,L\Omega^*_{X/\mathbb{Z}}/F^n)\mid^{(-1)^i}\;=\;q^{\chi(X/\mathbb{F}_q,\mathcal{O}_X,n)},$$

où $L\Omega^*_{X/\mathbb{Z}}/F^n$ est le complexe de de Rham dérivé d'Illusie modulo la filtration de Hodge. En remplaçant la classe fondamentale $e\in H^1(W_{\mathbb{F}_q},\mathbb{Z})$ par $\theta\in H^1(W_{\mathbb{F}_1},\mathbb{R})$, on passe de la valeur spéciale $Z^*(X,q^{-n})$ à $\zeta^*(X,n)$. Ces observations sont généralisées à tous les schémas séparés de type fini sur $\mathbb{F}_q$ dans [**51**], en supposant une certaine forme de la résolution des singularités et en utilisant le *eh*-topos introduit par Geisser [**22**] et son faisceau d'anneaux $\mathcal{O}^{eh}$.

Le chapitre 6 résume l'article [**16**] en commun avec M. Flach, et généralise les chapitres 4 et 5. On se restreint comme dans le chapitre 4 aux schémas réguliers et propres sur $\mathbb{Z}$. On définit *conditionnellement* des complexes parfaits de cohomologie Weil-étale $R\Gamma_W(\overline{X},\mathbb{Z}(n))$

et $R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n))$ dans la catégorie dérivée des groupes abéliens, ainsi que des complexes de cohomologie Weil-Arakelov $R\Gamma_{ar}(\overline{X},A(n))$ et $R\Gamma_{ar,c}(X,A(n))$ dans la catégorie dérivée des groupes abéliens localement compacts, pour $A=\mathbb{Z},\tilde{\mathbb{R}},\tilde{\mathbb{R}}/\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{Z}$. Pour X de dimension pure d et tout entier $n\in\mathbb{Z}$, on a un isomorphisme

$$R\Gamma_W(\overline{X},\mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}(R\Gamma_W(\overline{X},\mathbb{Z}(d-n)),\mathbb{Z}[-2d-1])$$

dans la catégorie dérivée des groupes abéliens, et un accouplement parfait de groupes abéliens localement compacts

$$H^i_{ar}(\overline{X},A(n))\times H^{2d+1-i}_{ar}(\overline{X},A^D(d-n))\to H^{2d+1}_{ar}(\overline{X},\tilde{\mathbb{R}}/\mathbb{Z}(d))\to\mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

où $A=\mathbb{Z},\tilde{\mathbb{R}},\tilde{\mathbb{R}}/\mathbb{Z}$ et A^D est son dual de Pontryagin. Pour tout entier $n\in\mathbb{Z}$, on a un complexe acyclique

$$(1)\qquad \cdots\xrightarrow{\cup\theta} H^i_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}(n))\xrightarrow{\cup\theta} H^{i+1}_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}(n))\xrightarrow{\cup\theta}\cdots$$

On explique ensuite de quelle manière (voir le paragraphe ci-dessous) ces complexes permettent une description conjecturale de l'ordre d'annulation et de la valeur spéciale de la fonction $\zeta(X,s)$ en $s=n$ pour tout entier $n\in\mathbb{Z}$. Comme dans le chapitre 3, notre résultat principal montre que cette description, pour les schémas projectifs lisses sur l'anneau d'entiers d'un corps de nombres, est équivalente à la conjecture de Bloch-Kato. En particulier, notre description des valeurs spéciales est vraie lorsque la conjecture de Bloch-Kato est connue. A titre d'exemple, on traite le cas des fonctions zêta de Dedekind en $s=n$ pour tout entier $n\in\mathbb{Z}$.

Le dernier chapitre est entièrement spéculatif. On conjecture l'existence des cohomologies Weil-étale et Weil-Arakelov sur les schémas séparés de type fini sur $\mathbb{Z}$ et leurs compactifications d'Arakelov. Les chapitres précédents permettent de donner une description assez précise de ces cohomologies et des morphismes de la cohomologie Weil-Arakelov dans la cohomologie Weil-étale. Enfin, on donne la liste des propriétés conjecturales reliant la cohomologie Weil-Arakelov à la cohomologie de Deninger. On conjecture par exemple l'existence d'une suite exacte longue

$$\cdots\longrightarrow H^i_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}(n))_{\mathbb{C}}\longrightarrow H^i_{\mathrm{dyn,c}}(X,\mathcal{C})\xrightarrow{\Theta-n\cdot\mathrm{Id}} H^i_{\mathrm{dyn,c}}(X,\mathcal{C})\longrightarrow H^{i+1}_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}(n))_{\mathbb{C}}\longrightarrow\cdots$$

de sorte que $\cup\theta$ coincide avec la composition $H^i_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}(n))_{\mathbb{C}}\to H^i_{\mathrm{dyn,c}}(X,\mathcal{C})\to H^{i+1}_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}(n))_{\mathbb{C}}$. En d'autres termes, $R\Gamma_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}(n))_{\mathbb{C}}$ devrait être la cohomologie absolue pour la "réalisation" donnée par la cohomologie de Deninger. La suite exacte longue ci-dessus expliquerait la formule

$$\mathrm{ord}_{s=n}\zeta(X,s)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\cdot i\cdot\dim_{\mathbb{R}}H^i_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}(n)).$$

En appliquant le foncteur "complexe tangent" T_∞ au triangle distingué

$$R\Gamma_{ar,c}(X,\mathbb{Z}(n))\to R\Gamma_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}(n))\to R\Gamma_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}/\mathbb{Z}(n))\to$$

on obtient le triangle distingué

$$R\Gamma_{dR,c}(X/\mathbb{Z})/F^n\otimes\mathbb{R}\to R\Gamma_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}(n))\to R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n))\otimes\mathbb{R}\to$$

La cohomologie Weil-étale $R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n))$ et la cohomologie de de Rham dérivée $R\Gamma_{dR,c}(X/\mathbb{Z})/F^n$ fournissent donc une structure entière sur le déterminant de $R\Gamma_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}(n))$:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\mathbb{C}}:\mathbb{C} &\xrightarrow{\sim} \bigotimes_i \det{}_{\mathbb{C}}^{(-1)^i}[H^i_{\mathrm{dyn,c}}(X,\mathcal{C}) \xrightarrow{\frac{n-\Theta}{2\pi}} H^i_{\mathrm{dyn,c}}(X,\mathcal{C})] \\
&\xrightarrow{\sim} \det{}_{\mathbb{R}} R\Gamma_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}(n))\otimes\mathbb{C} \\
&\xrightarrow{\sim} (\det{}_{\mathbb{Z}} R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n))\otimes \det{}_{\mathbb{Z}} R\Gamma_{dR,c}(X/\mathbb{Z})/F^n)_{\mathbb{C}}\,.
\end{aligned}$$

La composition $\mathbb{C}\xrightarrow{\sim}\det_{\mathbb{R}} R\Gamma_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}(n))\otimes\mathbb{C}$ des deux premiers isomorphismes ci-dessus coïncide avec la trivialisation induite par le complexe acyclique (1). L'isomorphisme $\lambda_{\mathbb{C}}$ devrait envoyer $\zeta^*(X,n)^{-1}\cdot C(X,n)$ sur un générateur de la droite $\det_{\mathbb{Z}} R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n))\otimes \det_{\mathbb{Z}} R\Gamma_{dR,c}(X/\mathbb{Z})/F^n$. On essaie de convaincre le lecteur que les résultats obtenus dans les chapitres 4, 5 et 6 peuvent être vus comme des évidences pour l'existence de ce formalisme cohomologique.

Chapitre 2

Les programmes de Deninger et de Lichtenbaum

1. Fonctions zêta des schémas arithmétiques

1.1. Définitions. On appelle schéma arithmétique tout schéma de type fini et séparé sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. La fonction zêta d'un tel schéma X est définie [**57**] par le produit infini

$$\zeta(X,s)=\prod_{x\in X_0}\left(1-N(x)^{-s}\right)^{-1}$$

qui converge dans le demi-plan complexe $\Re(s)>d$, où X_0 est l'ensemble des points fermés de X, $N(x)$ est le cardinal du corps résiduel $\mathbb{F}_x:=\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ en $x\in X_0$ et d est la dimension de Krull de X.

Considérons pour commencer le cas des schémas arithmétiques X de caractéristique p, i.e. de sorte que le morphisme $X\to\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ se factorise comme $X\to\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)\to\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Pour tout $x\in X_0$ on a $N(x)=p^{\deg(x)}$, où $\deg(x):=[\mathbb{F}_x:\mathbb{F}_p]$ est le degré de l'extension finie $\mathbb{F}_x/\mathbb{F}_p$. En posant $t=p^{-s}$, on obtient

$$\begin{aligned}\zeta(X,s) &= \prod_{x\in X_0}\left(1-p^{-s\cdot\deg(x)}\right)^{-1}\\ &= \prod_{x\in X_0}\left(1-t^{\deg(x)}\right)^{-1}\\ &= \exp\left(\sum_{m\geq 1}N_m\cdot\frac{t^m}{m}\right)\\ &=: Z(X/\mathbb{F}_p,t),\end{aligned}$$

où $N_m:=|X(\mathbb{F}_{p^m})|$ est le nombre de points de X à valeurs dans l'extension $\mathbb{F}_{p^m}$.

Si $X/\mathbb{Z}$ est un schéma arithmétique quelconque, on note $X_p:=X\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}_p$ la réduction de X modulo p. Alors on a

$$\zeta(X,s)=\prod_{p<\infty}\zeta(X_p,s)=\prod_{p<\infty}Z(X_p/\mathbb{F}_p,p^{-s})$$

où le produit est pris sur l'ensemble des nombres premiers $p>0$. Par exemple, la fonction zêta de Riemann est donnée par

$$\zeta(s):=\zeta(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}),s)=\prod_{p<\infty}\left(1-p^{-s}\right)^{-1}=\sum_{n\geq 1}n^{-s}.$$

Plus généralement, si F est un corps de nombres dont $\mathcal{O}_F$ est l'anneau des entiers, alors la fonction zêta de Dedekind du corps de nombres F est donnée par

$$\zeta_F(s) := \zeta(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F), s) = \prod_{\mathfrak{p}<\infty} \left(1 - N(\mathfrak{p})^{-s}\right)^{-1}$$

où le produit est pris sur l'ensemble des places finies $\mathfrak{p}$ du corps de nombres F. Pour tout $\lambda \in F^\times$, on a la formule du produit

$$\prod_{\mathfrak{p}} |\lambda|_{\mathfrak{p}} = 1 \tag{2}$$

où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble de toutes les places (finies et infinies) $\mathfrak{p}$ du corps de nombres F et $|-|_{\mathfrak{p}}$ est la valeur absolue normalisée définie par $\mathfrak{p}$. Cette formule est à comparer à la suivante : si Y est une courbe projective lisse sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ de corps de fonctions $K(Y)$, alors pour tout $\lambda \in K(Y)^\times$, on a

$$\prod_{y \in Y_0} |\lambda|_y = 1 \tag{3}$$

où le produit est pris sur tous les points fermés $y \in Y_0$ et $|-|_y$ est la valeur absolue normalisée du corps de fonctions $K(Y)$ définie par y. L'analogie entre (2) et (3) suggère de "compactifier" $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$ en ajoutant l'ensemble X_∞ des places archimédiennes de F : on pose

$$\overline{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)} := (\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F), X_\infty).$$

Les points de X_∞ sont ici pensés comme des points fermés de $\overline{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)}$. La fonction zêta de $\overline{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)}$ est définie par

$$\zeta(\overline{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)}, s) = \zeta(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F), s) \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \Gamma_{F_\mathfrak{p}}(s) = \prod_{\mathfrak{p}<\infty} \left(1 - N(\mathfrak{p})^{-s}\right)^{-1} \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \Gamma_{F_\mathfrak{p}}(s)$$

où $F_\mathfrak{p}$ est la complétion de F en la place $\mathfrak{p}$ et

$$\Gamma_\mathbb{R}(s) = 2^{-1/2}\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2}) \quad \text{et} \quad \Gamma_\mathbb{C}(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s).$$

Soit X un schéma arithmétique régulier projectif sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Une compactification d'Arakelov $\overline{X}$ de X est définie comme suit. La "fibre de $\overline{X}$ au dessus de $\mathbb{R}$" est la variété analytique complexe associée à $X(\mathbb{C})$ munie de l'action évidente du groupe de Galois $G_\mathbb{R}$ de l'extension $\mathbb{C}/\mathbb{R}$. Une "structure entière à l'infini" est alors donnée par le choix d'une métrique de Kähler ω sur $X(\mathbb{C})$ compatible à l'action de $G_\mathbb{R}$, i.e. telle que $F_\infty^*(\omega) = -\omega$ où $F_\infty \in G_\mathbb{R}$ est la conjugaison complexe. La fibre au-dessus d'un "voisinage de $\infty \in \overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$" est donc donnée par le couple $(X(\mathbb{C}), \omega)$ muni de son action de $G_\mathbb{R}$. On note X_∞ le quotient de cette action, et on pose $\overline{X} = (X, X_\infty)$. En particulier, si X est de caractéristique p, on a $X_\infty = \emptyset$ et $\overline{X} = X$. La fonction zêta de $\overline{X}$ est définie par

$$\zeta(\overline{X}, s) = \zeta(X, s) \cdot \zeta(X_\infty, s) = \prod_{p \leq \infty} \zeta(X_p, s)$$

où $\zeta(X_\infty, s)$ est un produit de facteurs Gamma dépendant de la structure de Hodge sur $\mathbb{R}$ définie sur la cohomologie de Betti $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$. Plus précisément, soit

$$H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=i} H^q(X(\mathbb{C}), \Omega^p) =: \bigoplus_{p+q=i} H^{p,q}$$

la décomposition de Hodge et soit

$$h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}; \quad h^{p,\pm} = \dim_{\mathbb{C}} (H^{p,p})^{F_\infty = \pm(-1)^p}$$

les nombres de Hodge. On définit

$$\zeta(X_\infty, s) := \prod_{i\in\mathbb{Z}} L_\infty(h^i(X_{\mathbb{Q}}), s)^{(-1)^i}$$

avec [**58**]

$$L_\infty(h^i(X_{\mathbb{Q}}), s) := \prod_{p<q;\ p+q=i} \Gamma_{\mathbb{C}}(s-p)^{h^{p,q}} \cdot \prod_{p=\frac{i}{2}} \Gamma_{\mathbb{R}}(s-p)^{h^{p,+}} \Gamma_{\mathbb{R}}(s-p+1)^{h^{p,-}}. \tag{4}$$

1.2. Les conjectures standards sur les fonctions zêta. Les conjectures standards relatives à ces fonctions zêta sont les suivantes. Précisons que chacune de ces conjectures dans le cas général semble être actuellement hors de portée. Par exemple, l'hypothèse de Riemann classique est la conjecture **(C3)** ci-dessous dans le cas particulier $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, et la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer est une forme précise d'un cas particulier de **(C4)** ci-dessous.

— **(C1)** La fonction $\zeta(X, s)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe $\mathbb{C}$.

— **(C2)** Si X est projectif, régulier de dimension pure d, alors il existe une équation fonctionnelle de la forme

$$\zeta(\overline{X}, s) = A \cdot B^s \cdot \zeta(\overline{X}, d-s)$$

où A et B sont des constantes réelles.

— **(C3)** (Hypothèse de Riemann) : Si X est projectif, régulier de dimension pure d, alors les zéros (resp. pôles) de $\zeta(\overline{X}, s)$ sont situés sur la droite $\Re(s) = i/2$, pour $0 \leq i \leq 2d$ impair (resp. pair).

— **(C3')** Si X est projectif, régulier de dimension pure d, alors on a

$$\zeta(\overline{X}, s) = \prod_{0\leq i\leq 2d} L(h^i(\overline{X}/\mathbb{F}_1), s)^{(-1)^{i+1}} = \frac{f_1(s)\cdots f_{2d-1}(s)}{f_0(s)\cdots f_{2d}(s)}$$

où $L(h^i(\overline{X}/\mathbb{F}_1), s)$ est une fonction holomorphe entière dans tout le plan complexe, dont les zéros sont situés sur la droite $\Re(s) = i/2$.

— **(C4)** (Forme vague) L'ordre d'annulation et le coefficient dominant dans le développement de Taylor de $\zeta(X, s)$ en $s = n \in \mathbb{Z}$ (i.e. la valeur spéciale $\zeta^*(X, n)$) peuvent être exprimés en termes d'invariants arithmétiques de X.

La conjecture **(C3')**, due à Deninger, est une vaste généralisation d'une partie des conjectures de Weil pour les variétés projectives lisses sur les corps finis. La conjecture **(C3')** implique la conjecture **(C3)**, ainsi que la conjecture **(C1)** pour les schémas projectifs réguliers. La conjecture **(C4)** semble être la plus profonde de ces conjectures. Ne serait-ce que donner un énoncé précis de **(C4)** est déjà un problème relativement difficile, et c'est d'ailleurs un des objectifs principaux du travail présenté dans ce mémoire.

Lorsque l'on se restreint aux variétés sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, les conjectures **(C1)**, **(C2)**, **(C3)** et **(C3')** sont les conjectures de Weil, qui ont été démontrées par Grothendieck et Deligne. Les preuves de ces conjectures dans ce cas reposent sur l'existence de théories permettant d'exprimer cohomologiquement la fonction zêta. Un énoncé précis de la conjecture **(C4)** se formule naturellement en termes de la cohomologie Weil-étale motivique. En supposant que la cohomologie Weil-étale motivique est de type fini (ce qui est connu par exemple dans le cas des courbes), on peut prouver un énoncé précis de **(C4)**.

2. Le programme de Deninger

L'objectif principal du programme de Deninger est la construction d'une certaine théorie cohomologique, sur la catégorie des schémas arithmétiques et leurs compactifications d'Arakelov, qui permettrait de prouver les conjectures **(C1)**–**(C3)** dans le cas général (voir [**4**], [**5**], [**9**], [**10**] et [**12**]). En d'autres termes, cette cohomologie rendrait les mêmes services que la cohomologie étale l-adique ou la cohomologie cristalline pour les variétés sur les corps finis. Cette cohomologie, dont C. Deninger conjecture l'existence, prend ses valeurs dans une catégorie d'espaces vectoriels complexes de dimension $\leq \infty$ munis d'une $\mathbb{R}$-action. C. Deninger a par exemple formulé la conjecture suivante (voir e.g. [**12**]). Pour quelques précisions sur la notation $\mathcal{X}$ utilisée ci-dessous, on renvoie au chapitre 7 Section 1.1.

CONJECTURE 2.1. *(Deninger) Sur la catégorie des schémas séparés de type fini sur $\mathbb{Z}$ et leurs compactifications d'Arakelov, il existe une théorie cohomologique d'espaces vectoriels complexes $H^*_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C})$ et $H^*_{\mathrm{dyn}}(\mathcal{X},\mathcal{C})$ munis d'une $\mathbb{R}$-action φ^t, telle que les assertions suivantes sont vraies.*

(1) On a $H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C}) = 0$ pour $i<0$ et $i>2\cdot\dim(\mathcal{X})$.

(2) On a

$$\zeta(\mathcal{X},s) = \prod_{i=0}^{2d} \det{}_\infty\Big(\frac{s\cdot\mathrm{Id}-\Theta}{2\pi} \mid H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C})\Big)^{(-1)^{i+1}}$$

où $\Theta = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\varphi^t - \mathrm{Id})$ désigne le générateur infinitésimal.

(3) Si $\mathcal{X}$ est régulier de dimension pure d, on a une dualité parfaite Θ-équivariante :

$$H^i_{\mathrm{dyn}}(\mathcal{X},\mathcal{C}(n)) \times H^{2d-i}_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C}(d-n)) \xrightarrow{\cup} H^{2d}_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C}(d)) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbb{C}(0)$$

où $\mathcal{C}(n)$ désigne $\mathcal{C}$ muni de l'action $e^{-n\cdot t}\varphi^t$.

(4) Si $\mathcal{X} \to \overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$ est projectif et régulier, il existe un $*$-opérateur de Hodge $\mathbb{C}$-antilinéaire et Θ-équivariant

$$* : H^i_{\mathrm{dyn}}(\mathcal{X},\mathcal{C}) \to H^{2d-i}_{\mathrm{dyn}}(\mathcal{X},\mathcal{C})(d-i)$$

tel que

$$\begin{array}{ccc} H^i_{\mathrm{dyn}}(\mathcal{X},\mathcal{C}) \times H^i_{\mathrm{dyn}}(\mathcal{X},\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \longmapsto & \mathrm{Tr}_{\mathcal{X}}(x\cup *y) \end{array}$$

est un produit scalaire hermitien sur $H^i_{\mathrm{dyn}}(\mathcal{X},\mathcal{C})$.

La conjecture 2.1 permettrait de prouver **(C1)**, **(C2)**, et **(C3)** via **(C3')**. Ce formalisme cohomologique conjectural implique d'autres conjectures classiques, par exemple la conjecture d'Artin ([**8**] Section 3). Il implique aussi plusieurs résultats qui ont pu être prouvés par d'autres méthodes, par exemple le fait que la fonction zêta de Riemann (et plus généralement les fonctions zêta de Dedekind) est $\frac{1}{2\pi}$-zêta-régularisable ([**5**] Theorem 3.3), le fait que ce formalisme cohomologique existe pour les facteurs locaux des fonctions L motiviques ([**4**] et [**5**]), ou encore le fait que le signe de l'équation fonctionnelle de la fonction L d'un motif orthogonal sur un corps de nombres est positif ([**8**] Section 6 et [**53**]).

C. Deninger a ensuite remarqué que cette cohomologie, conjecturalement associée à un schéma arithmétique X de dimension d, est très proche de la cohomologie feuilletée d'un système dynamique de dimension $2d+1$ muni d'un feuilletage de codimension 1 (voir [**9**] et [**10**]). Cette observation l'a amené à étudier une analogie surprenante entre les schémas arithmétiques et une certaine classe de systèmes dynamiques munis d'un feuilletage de codimension 1.

3. Le programme de Lichtenbaum

Grâce aux travaux de J. Milne, S. Lichtenbaum, B. Kahn et T. Geisser, on dispose d'une formulation précise de la conjecture **(C4)** pour les variétés sur les corps finis. Cette formulation se fait naturellement en termes de cohomologie Weil-étale (voir [**20**], [**22**], [**38**] and [**43**]). Cette conjecture peut être démontrée pour les courbes. L'objectif principal du programme de Lichtenbaum [**39**] est de développer la cohomologie Weil-étale pour tous les schémas arithmétiques (cette cohomologie n'étant précédemment définie que pour les variétés sur les corps finis) afin d'obtenir une formulation précise de la conjecture **(C4)** dans le cas général et d'étudier cette conjecture. Outre le cas des variétés sur les corps finis, S. Lichtenbaum a formulé la conjecture suivante.

Conjecture 2.2. *(Lichtenbaum) Sur la catégorie des schémas séparés de type fini* $X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$*, il existe une "topologie Weil-étale" définissant une théorie cohomologique donnée par des groupes abéliens* $H^i_{W,c}(X,\mathbb{Z})$ *et des espaces vectoriels réels* $H^i_W(X,\tilde{\mathbb{R}})$ *et* $H^i_{W,c}(X,\tilde{\mathbb{R}})$ *telle que les assertions suivantes soient vraies.*

(1) Les groupes abéliens $H^i_{W,c}(X,\mathbb{Z})$ *sont de type fini et nuls pour* $i >> 0$.

(2) La flèche des coefficients entiers vers les coefficients réels induit des isomorphismes

$$H^i_{W,c}(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{R}\simeq H^i_{W,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}).$$

(3) Il existe une classe canonique $\theta\in H^1_W(X,\tilde{\mathbb{R}})$ *telle que le cup-produit avec* θ *fasse de la suite*

$$\cdots\stackrel{\cup\theta}{\to} H^i_{W,c}(X,\tilde{\mathbb{R}})\stackrel{\cup\theta}{\to} H^{i+1}_{W,c}(X,\tilde{\mathbb{R}})\stackrel{\cup\theta}{\to}\cdots$$

un complexe borné acyclique.

(4) L'ordre d'annulation de la fonction zêta $\zeta(X,s)$ *en* $s=0$ *est donné par la formule*

$$\mathrm{ord}_{s=0}\zeta(X,s)=\sum_{i\geq 0}(-1)^i\cdot i\cdot\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}H^i_{W,c}(X,\mathbb{Z}).$$

(5) La valeur spéciale $\zeta^*(X,0)$ *est donnée au signe près par*

$$\mathbb{Z}\cdot\lambda(\zeta^*(X,0)^{-1})=\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{det}_{\mathbb{Z}}H^i_{W,c}(X,\mathbb{Z})^{(-1)^i}$$

où $\lambda:\mathbb{R}\xrightarrow{\sim}(\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{det}_{\mathbb{Z}}H^i_{W,c}(X,\mathbb{Z})^{(-1)^i})\otimes\mathbb{R}$ *est induit par (2) et (3).*

Avant d'avoir formulé la conjecture précédente, S. Lichtenbaum avait prédit [**37**] l'existence des complexes motiviques pour la topologie étale des schémas, satisfaisant une certaine liste d'axiomes, et permettant en particulier d'obtenir des théorèmes de dualité. Le complexe de cycles de Bloch est un candidat pour ces complexes motiviques, et permet en effet d'obtenir des théorèmes de dualité de type Artin-Verdier. Ces complexes motiviques joueront un rôle crucial dans les chapitres 4, 5 et 6.

Chapitre 3

Le topos Weil-étale

Ce chapitre est un survol des articles [**15**], [**46**], [**47**] et [**49**]. On rappelle au préalable les définitions dues à Lichtenbaum du topos Weil-étale d'une variété sur un corps fini [**38**] et du système projectif de sites Weil-étale associé à un corps de nombres [**39**].

1. Topos classifiants des groupes topologiques

Si G est un groupe discret ou profini, on note B_G^{sm} le topos des ensembles sur lesquels G opère continûment.

Soit Top la catégorie des espaces topologiques localement compacts. On considère la topologie $\mathcal{J}_{op}$ des recouvrements ouverts sur Top, qui est la topologie engendrée par la prétopologie pour laquelle un recouvrement $\{Y_i \to Y,\, i \in I\}$ est un recouvrement ouvert au sens usuel. On note $\mathcal{T} := \mathrm{Sh}(\mathrm{Top}, \mathcal{J}_{op})$ le topos des faisceaux sur ce site. Si G est un groupe dans $\mathcal{T}$, i.e. un faisceau en groupes sur $(\mathrm{Top}, \mathcal{J}_{op})$, on note B_G la catégorie des objets de $\mathcal{T}$ munis d'une action à gauche de G. Alors B_G est un topos, le topos classifiant de G. On a un morphisme canonique $B_G \to \mathcal{T}$, dont l'image inverse envoie un faisceau $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}$ muni de l'action triviale de G. Le topos B_G classifie les G-torseurs. En effet, soit $t : \mathcal{E} \to \mathcal{T}$ un $\mathcal{T}$-topos. Alors le groupoide des t^*G-torseurs sur $\mathcal{E}$ est (anti)-équivalent à la catégorie $\mathbf{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E}, B_G)$ des morphismes de topos $\mathcal{E} \to B_G$. En particulier, si G est abélien, un tel morphisme définit un élément du groupe abélien $H^1(\mathcal{E}, t^*G)$.

Si G est un groupe localement compact, on note encore G le groupe sur $\mathcal{T}$ qu'il représente. On définit un site pour B_G de la manière suivante. Soit Top_G la catégorie des espaces localement compacts munis d'une action à gauche de G. La topologie $\mathcal{J}_{ls}$ des sections locales sur Top_G est la topologie engendrée par la prétopologie pour laquelle $\{Y_i \to Y,\, i \in I\}$ est un recouvrement si la flèche continue $\coprod_i Y_i \to Y$ admet des sections locales. Le foncteur $\mathrm{Top}_G \to B_G$, envoyant un G-espace sur le G-faisceau qu'il représente sur $\mathcal{T}$, induit une équivalence

$$B_G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}(\mathrm{Top}_G, \mathcal{J}_{ls}).$$

Soit $\underline{G} = (G_i)_{i \in I}$ un pro-objet dans la catégorie des groupes topologiques localement compacts, ou plus généralement un pro-objet dans la catégorie des groupes sur $\mathcal{T}$. On définit le topos classifiant de $\underline{G}$ comme la limite (dans la 2-catégorie des topos) :

$$B_{\underline{G}} := \varprojlim B_{G_i}.$$

Si on calcule la limite $\varprojlim G_i$ dans la catégorie des groupes topologiques (ou dans $\mathcal{T}$), on obtient un résultat différent. En effet, la flèche évidente

$$B_{\varprojlim G_i} \longrightarrow \varprojlim B_{G_i}$$

n'est pas une équivalence. La "bonne" notion de limite d'un pro-groupe est en fait $\varprojlim B_{G_i}$. Le topos $B_{\underline{G}}$ classifie les $\underline{G}$-pro-torseurs, mais nous n'utiliserons pas ce fait dans la suite.

2. Le topos Weil-étale d'une variété sur un corps fini

Soient $\mathbb{F}_q$ un corps fini, $\overline{\mathbb{F}}_q$ une clôture algébrique et $G_{\mathbb{F}_q} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$. Le groupe de Weil $W_{\mathbb{F}_q}$ est le sous-groupe de $G_{\mathbb{F}_q}$ dont les éléments sont les puissances entières du Frobenius. On a le morphisme injectif

$$\mathbb{Z} \simeq W_{\mathbb{F}_q} \hookrightarrow G_{\mathbb{F}_q} \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$$

envoyant $1 \in \mathbb{Z}$ sur le Frobenius dans $G_{\mathbb{F}_q}$.

Si Y est un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$, on note Y_{W} son topos Weil-étale et Y_{et} son topos étale. Le topos Y_{W} a été introduit par Lichtenbaum dans [**38**]. On rappelle que Y_{et} est la catégorie des faisceaux d'ensembles sur le petit site étale de Y. On peut montrer que Y_{et} est équivalent à la catégorie des faisceaux étales sur $Y \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$ sur lesquels $G_{\mathbb{F}_q}$ opère continûment et de manière compatible à l'action de $G_{\mathbb{F}_q}$ sur $Y \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$ par son action évidente sur le deuxième facteur. Le topos Weil-étale Y_{W} est alors défini comme la catégorie des faisceaux étales sur $Y \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$ sur lesquels $W_{\mathbb{F}_q}$ opère de manière compatible à l'action de $W_{\mathbb{F}_q}$ sur $Y \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$ via $W_{\mathbb{F}_q} \hookrightarrow G_{\mathbb{F}_q}$. En particulier, on a des équivalences

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)_{\mathrm{W}} \simeq B^{sm}_{W_{\mathbb{F}_q}} \text{ et } \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)_{et} \simeq B^{sm}_{G_{\mathbb{F}_q}}$$

où $B^{sm}_{W_{\mathbb{F}_q}}$ (resp. $B^{sm}_{G_{\mathbb{F}_q}}$) est la catégorie des $W_{\mathbb{F}_q}$-ensembles (resp. des $G_{\mathbb{F}_q}$-ensembles).

On a un morphisme canonique de topos

$$\gamma_Y : Y_{\mathrm{W}} \longrightarrow Y_{et}.$$

Par exemple, pour $Y = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$, le morphisme $\gamma_Y : B^{sm}_{W_{\mathbb{F}_q}} \to B^{sm}_{G_{\mathbb{F}_q}}$ est simplement donné par le morphisme $W_{\mathbb{F}_q} \to G_{\mathbb{F}_q}$. Les topos Y_W, Y_{et} et les morphismes γ_Y sont fonctoriels en Y. En particulier on a un morphisme canonique

$$Y_{\mathrm{W}} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)_{\mathrm{W}} \tag{5}$$

et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y_{\mathrm{W}} \arrow[r, "\gamma_Y"] \arrow[d, "f_{\mathrm{W}}"] & Y_{et} \arrow[d, "f_{et}"] \\ \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)_{\mathrm{W}} \arrow[r, "\gamma_{\mathbb{F}_q}"] & \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)_{et} \end{tikzcd}$$

où $f : Y \to \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ est le morphisme structural.

THÉORÈME 3.1. *([**15**] Theorem 3.1) Le diagramme précédent est un pull-back. En d'autres termes, le morphisme induit*

$$Y_{\mathrm{W}} \xrightarrow{\sim} Y_{et} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)_{et}} \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)_{\mathrm{W}}$$

est une équivalence.

DÉFINITION 3.2. *On définit le $\mathcal{T}$-topos Weil-étale de* $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ *comme le (gros) topos classifiant*

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)_W := B_{W_{\mathbb{F}_q}}$$

et plus généralement

$$Y_W := Y_{et} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)_{et}} \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)_W$$

pour tout schéma Y séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$.

Pour tout $Y/\mathbb{F}_q$, on a ([**15**] Corollary 1)

$$Y_W \simeq Y_{\mathrm{W}} \times \mathcal{T}.$$

On peut en déduire que les topos Y_{W} et Y_W ont la même cohomologie (voir [**15**] Corollary 2). Le théorème suivant montre l'intérêt du topos Weil-étale par rapport au topos étale.

Théorème 3.3. *Soit $Y/\mathbb{F}_q$ une variété projective lisse. Alors les groupes $H^i(Y_W, \mathbb{Z})$ sont de type fini pour tout $i \in \mathbb{Z}$.*

Le fait que les groupes $H^i(Y_W, \mathbb{Z})$ soient de type fini contraste avec la cohomologie étale. On a par exemple

$$H^i(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)_W, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0 \text{ pour } i = 0, 1, \geq 2$$

alors que

$$H^i(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)_{et}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, 0 \text{ pour } i = 0, 1, 2, \geq 3.$$

T. Geisser a calculé le foncteur $R\gamma_{Y,*}$.

Théorème 3.4. *(Geisser [**20**]) Soit $\mathcal{F}^{\cdot}$ un complexe borné supérieurement de faisceaux abéliens sur Y_{et}. On a un isomorphisme*

$$R(\gamma_{Y,*})(\mathbb{Z}) \otimes^L \mathcal{F}^{\cdot} \xrightarrow{\sim} R(\gamma_{Y,*})\gamma_Y^* \mathcal{F}^{\cdot}$$

et un triangle distingué

$$\mathbb{Q}[-2] \xrightarrow{a} \mathbb{Z}[0] \to R(\gamma_{Y,*})(\mathbb{Z}) \to .$$

En particulier, on a un triangle distingué

$$R\Gamma(Y_{et}, \mathbb{Q})[-2] \xrightarrow{a} R\Gamma(Y_{et}, \mathbb{Z}) \to R\Gamma(Y_W, \mathbb{Z}) \to . \tag{6}$$

Remarque 3.5. *On explique de manière heuristique la deuxième assertion du résultat précédent. La "fibre homotopique" du morphisme $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)_W \to \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)_{et}$ est donnée par le produit fibré*

$$\begin{aligned} B_{W_k} \times_{B_{G_k}} \mathrm{Set} &\simeq \varprojlim \left(B_{W_k} \times_{B_{G_{k'/k}}} \mathrm{Set}\right) \\ &\simeq \varprojlim \left(B_{W_k} \times_{B_{G_{k'/k}}} (B_{G_{k'/k}}/E_{G_{k'/k}})\right) \\ &\simeq \varprojlim B_{W_{k'}} \end{aligned}$$

où la limite est prise sur l'ensemble des sous-extensions finie $\overline{k}/k'/k$. Le "type d'homotopie" du topos $\varprojlim B_{W_{k'}}$ est la limite homotopique des $K(W_{k'}, 1) = K(\mathbb{Z}, 1)$. En d'autres termes, $\varprojlim B_{W_{k'}}$ a le type d'homotopie du solénoide $\mathbb{V} := \mathbb{Q}^D = \varprojlim \mathbb{S}^1$. Le théorème 3.1 montre que la "fibre homotopique" du morphisme $\gamma_Y : Y_W \to Y_{et}$ au-dessus d'un point $\mathrm{Set} \to Y_{et}$, donnée par

$$Y_W \times_{Y_{et}} \mathrm{Set} \simeq B_{W_k} \times_{B_{G_k}} Y_{et} \times_{Y_{et}} \mathrm{Set} \simeq B_{W_k} \times_{B_{G_k}} \mathrm{Set} \simeq \varprojlim B_{W_{k'}}$$

est donc "constante au-dessus de Y_{et}", et a le type d'homotopie du solénoide.

3. Le topos étale d'Artin-Verdier

On renvoie à ([**15**] Section 4) pour plus de détails sur cette section. Soit X un schéma séparé de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. On note $X(\mathbb{C})$ l'ensemble des points complexes de X muni de la topologie complexe. On considère l'action évidente de $G_{\mathbb{R}} := \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ sur $X(\mathbb{C})$, on munit $X_\infty := X(\mathbb{C})/G_{\mathbb{R}}$ de la topologie quotient, et on note $\overline{X} := (X, X_\infty)$. Ensemblistement, $\overline{X}$ est la réunion disjointe $X \coprod X_\infty$. La topologie de Zariski sur $\overline{X}$ est définie comme suit. Un ouvert (U, D) de $\overline{X}$ est donné par sous-schéma ouvert $U \subset X$ et un sous-espace ouvert $D \subset U_\infty$. On définit la catégorie $\mathrm{Et}_{\overline{X}}$ des $\overline{X}$-schémas étales comme suit. Un $\overline{X}$-schéma étale est une flèche $f : (U, D) \to (X, X_\infty)$, où $U \to X$ est un morphisme étale au sens usuel et D est un sous-espace ouvert dans U_∞. On demande que la flèche $f_\infty : D \to X_\infty$ soit non-ramifiée au sens que $f_\infty(d) \in X(\mathbb{R})$ si et seulement si $d \in D \cap U(\mathbb{R})$. Un $\overline{X}$-schéma étale $\overline{U}$ est dit connexe (resp. irréductible) lorsqu'il est connexe (resp. irréductible) en tant qu'espace topologique. Un morphisme $(U, D) \to (U', D')$ dans la catégorie $\mathrm{Et}_{\overline{X}}$ est donné par un morphisme de X-schémas étales $U \to U'$ induisant une flèche $D \to D'$. La topologie étale $\mathcal{J}_{et}$ sur $\mathrm{Et}_{\overline{X}}$ est engendrée par la prétopologie pour laquelle un recouvrement est une famille surjective.

Notation 3.6. *On note le topos étale d'Artin-Verdier de $\overline{X}$ par*

$$\overline{X}_{et} := \mathrm{Sh}(\mathrm{Et}_{\overline{X}}, \mathcal{J}_{et}).$$

Soient X et Y des schémas séparés de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Un morphisme $f : X \to Y$ induit une flèche $\bar{f} : \overline{X} \to \overline{Y}$ et un morphisme de topos $\bar{f}_{et} : \overline{X}_{et} \to \overline{Y}_{et}$. Le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Et}_{\overline{X}} & \longrightarrow & \mathrm{Et}_X \\ (U, D) & \longmapsto & U \end{array}$$

est continu et exact à gauche. Il induit une immersion ouverte de topos :

$$\phi : X_{et} \xrightarrow{\sim} \overline{X}_{et}/y(X, \emptyset) \longrightarrow \overline{X}_{et}$$

où X_{et} est le topos étale usuel de X, et $yX := y(X, \emptyset)$ est un sous-objet de l'objet final de $\overline{X}_{et}$.

Soit $\mathrm{Sh}(X_\infty)$ le topos des faisceaux sur X_∞, i.e. la catégorie des espaces étalés sur X_∞. On considère $\mathrm{Sh}(X_\infty)$ comme un site muni de la topologie canonique $\mathcal{J}_{can}$. On a un foncteur continu et exact à gauche

$$\begin{array}{cccc} u_\infty^* : & (\mathrm{Et}_{\overline{X}}, \mathcal{J}_{et}) & \longrightarrow & (\mathrm{Sh}(X_\infty), \mathcal{J}_{can}) \\ & (U, D) & \longmapsto & D \to X_\infty \end{array}.$$

Il induit un morphisme de topos

$$u_\infty : \mathrm{Sh}(X_\infty) \longrightarrow \overline{X}_{et}$$

qui est le complémentaire fermé du sous-topos ouvert $X_{et} \hookrightarrow \overline{X}_{et}$. En effet, on a la

Proposition 3.7. *On a une décomposition ouverte-fermée :*

$$\phi : X_{et} \longrightarrow \overline{X}_{et} \longleftarrow \mathrm{Sh}(X_\infty) : u_\infty$$

Le foncteur de recollement $u_\infty^* \phi_*$ peut être explicité comme suit. On a un morphisme

$$\alpha : \mathrm{Sh}(G_{\mathbb{R}}, X(\mathbb{C})) \longrightarrow X_{et}$$

où $\mathrm{Sh}(G_{\mathbb{R}}, X(\mathbb{C}))$ est le topos des faisceaux $G_{\mathbb{R}}$-équivariants sur $X(\mathbb{C})$, i.e. la catégorie des espaces étalés $G_{\mathbb{R}}$-équivariants au-dessus de $X(\mathbb{C})$. La flèche α est définie par le foncteur (continu et exact à gauche) qui envoie un X-schéma étale U sur l'espace étalé $G_{\mathbb{R}}$-équivariant $U(\mathbb{C}) \to X(\mathbb{C})$.

Par ailleurs, le morphisme quotient $p : X(\mathbb{C}) \to X(\mathbb{C})/G_{\mathbb{R}} = X_\infty$ induit un morphisme de topos

$$(\pi^*, \pi_*) : \mathrm{Sh}(G_{\mathbb{R}}, X(\mathbb{C})) \longrightarrow \mathrm{Sh}(X_\infty)$$

où $\pi_* = p_*^{G_{\mathbb{R}}}\mathcal{F}$ est le sous-faisceau de $p_*\mathcal{F}$ formé des sections fixées par $G_{\mathbb{R}}$, i.e. pour tout ouvert $D \subset X_\infty$ on a $p_*^{G_{\mathbb{R}}}\mathcal{F}(D) := \mathcal{F}(p^{-1}D)^{G_{\mathbb{R}}}$. Alors on a une identification de foncteurs

$$u_\infty^*\phi_* \cong \pi_*\alpha^* : X_{et} \longrightarrow \mathrm{Sh}(X_\infty).$$

On considère la catégorie $(\mathrm{Sh}(X_\infty), X_{et}, \pi_*\alpha^*)$ définie par recollement ([**1**] IV.9.5.1) : un objet de cettte catégorie est un triplet (F, E, σ) où F est un objet de $\mathrm{Sh}(X_\infty)$, E un objet de X_{et} et σ une flèche $\sigma : F \to \pi_*\alpha^*E$. Les morphismes $(F, E, \sigma) \to (F', E', \sigma')$ sont définis de manière évidente.

Corollaire 3.8. *On a une équivalence*

$$\begin{array}{ccc} \overline{X}_{et} & \longrightarrow & (\mathrm{Sh}(X_\infty), X_{et}, \pi_*\alpha^*) \\ \mathcal{F} & \longmapsto & (u_\infty^*\mathcal{F}, \phi^*\mathcal{F}, \sigma_{\mathcal{F}}) \end{array}$$

où la flèche

$$\sigma_{\mathcal{F}} : u_\infty^*\mathcal{F} \to \pi_*\alpha^*\phi^*\mathcal{F} \simeq u_\infty^*\phi_*\phi^*\mathcal{F}$$

est induite par le morphisme d'adjonction.

4. Groupes de Weil

Le groupe de Weil a été introduit par A. Weil dans [**61**]. Cette section reprend la présentation de J. Tate [**60**].

Soit F un corps global. Si $\mathfrak{p}$ est une place de F on note $F_{\mathfrak{p}}$ la complétion de F relativement à $\mathfrak{p}$, $F_{\mathfrak{p}}^\times$ le groupe topologique des éléments non-nuls de $F_{\mathfrak{p}}$ et $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^\times$ le sous-groupe compact maximal de $F_{\mathfrak{p}}^\times$. En particulier si $\mathfrak{p}$ est une place finie alors $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^\times$ est le groupe des unités de l'anneau $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$. Si $\mathfrak{p}$ est une place archimédienne complexe (resp. réelle) alors $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^\times = \{z \in \mathbb{C}^\times, |z| = 1\}$ (resp. $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^\times \simeq \{\pm 1\}$). On note $\mathbb{A}_F^\times$ le groupe des idèles et $C_F := \mathbb{A}_F^\times/F^\times$ le groupe des classes d'idèles. Si S est un ensemble fini de places de F, on note

$$C_{F,S} := C_F / \prod_{\mathfrak{p} \notin S} \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^\times$$

le groupe des classes de S-idèles. Si F est un corps local (resp. fini) alors C_F désigne le groupe topologique $F^\times$ (resp. $\mathbb{Z}$).

4.1. Definition. Soit F un corps global, local, ou fini, dont on choisit une clôture séparable $\overline{F}/F$. On note $G_F := \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ le groupe de Galois absolu de F. Un groupe de Weil de F est un triplet $(W_F, \gamma_F, \{r_E\})$ où W_F est un groupe topologique et $\gamma_F : W_F \to G_F$ un morphisme de groupes topologiques dont l'image est dense. Si $\overline{F}/E/F$ est la sous-extension finie correspondant au sous-groupe ouvert $G_E \subseteq G_F$, on pose $W_E := \gamma_F^{-1}(G_E)$. Alors $r_E : C_E \xrightarrow{\sim} W_E^{ab}$ est un isomorphisme de groupes topologiques. On note W_E^c le plus petit sous groupe fermé de W_E contenant les commutateurs. Si E/F est galoisienne, on pose $W_{E/F} := W_F/W_E^c$. Le triplet $(W_F, \gamma_F, \{r_E\})$ doit satisfaire les conditions suivantes.

— **(W1)** Pour toute sous-extension finie $\overline{F}/E/F$, le morphisme
$$C_E \xrightarrow{\sim} W_E^{ab} \to G_E^{ab}$$
est le morphisme de réciprocité de la théorie du corps de classe.

— **(W2)** Soient $w \in W_F$ et $\sigma = \gamma_F(w) \in G_F$. Pour toute sous-extension finie $\overline{F}/E/F$, la flèche $W_E^{ab} \to W_{E^\sigma}^{ab}$, donnée par conjugaison par w, correspond via r_E et r_{E^σ} à la flèche $C_E \to C_{E^\sigma}$ induite par σ.

— **(W3)** Pour $\overline{F}/E'/E/F$, la flèche de transfert $W_E^{ab} \to W_{E'}^{ab}$ correspond via r_E et $r_{E'}$ à la flèche $C_E \to C_{E'}$ induite par l'inclusion $E \subseteq E'$.

— **(W4)** La flèche $W_F \xrightarrow{\sim} \varprojlim W_{E/F}$, où E/F parcourt les sous-extensions galoisiennes finies de $\overline{F}/F$, est un isomorphisme.

— **(W5)** Pour $\overline{F}/E'/E/F$, la flèche $W_{E'}^{ab} \to W_E^{ab}$ induite par l'inclusion $W_{E'} \hookrightarrow W_E$ correspond, via r_E et $r_{E'}$, à la norme $\mathrm{Nm} : C_{E'} \to C_E$.

On peut montrer que l'axiome **(W5)** est en fait une conséquence des axiomes **(W1)–(W4)**. Les axiomes précédents entrainent que le groupe de Weil $W_{E/F}$ d'une extension galoisienne finie E/F définit une extension de groupes localement compacts
$$1 \to C_E \simeq W_E^{ab} \to W_{E/F} \to G_{E/F} \to 1 \tag{7}$$
dont la classe dans
$$H^2(G_{E/F}, C_E) \simeq \widehat{H}^0(G_{E/F}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/[E:F]\cdot\mathbb{Z}$$
est la "classe fondamentale" de la théorie du corps de classe. On peut choisir les extensions (7), lorsque E/F parcourt les sous-extensions galoisiennes finies de $\overline{F}/F$, de sorte que les morphismes continus $W_{E/F} \to G_{E/F}$ définissent un système projectif. On définit alors W_F et le morphisme de groupes localement compacts
$$\gamma_F : W_F := \varprojlim W_{E/F} \longrightarrow G_F := \varprojlim G_{E/F}.$$

4.2. Exemples. Si F est un corps fini, $W_F \simeq \mathbb{Z}$ et la flèche $\mathbb{Z} \simeq W_F \to G_F$ envoie 1 sur le Frobenius. Si F est un corps local non-archimédien (resp. un corps de fonctions sur un corps fini) dont le corps résiduel (resp. le corps des constantes) est le corps fini k, alors $W_F \simeq G_F \times_{G_k} W_k$ et la flèche $W_F \to G_F$ est la projection. Si $F \simeq \mathbb{C}$, on a $W_F \simeq \mathbb{C}^\times$. Si $F \simeq \mathbb{R}$, alors W_F est donné par l'extension non-triviale
$$1 \to \mathbb{C}^\times \to W_\mathbb{R} \to G_\mathbb{R} \to 1$$
où $G_\mathbb{R}$ opère sur $\mathbb{C}^\times$ par conjugaison complexe.

Si F est un corps de nombres, la flèche $\gamma_F : W_F \to G_F$ est surjective et son noyau $W_F^0 = \mathrm{Ker}(\gamma_F)$ est la composante connexe de l'identité dans W_F. Alors $W_F^0 \simeq \varprojlim C_E^0$, où E/F parcourt les sous-extensions galoisiennes finies de $\overline{F}/F$, les flèches de transition sont données par les normes, et C_E^0 est la composante connexe de l'identité dans C_E. La structure de C_E^0 est donnée par l'isomorphisme
$$C_E^0 \simeq \mathcal{O}_F^\times \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{V} \times (\mathbb{S}^1)^{r_2} \times \mathbb{R}$$
où $\mathbb{V} := \mathbb{Q}^D = \varprojlim \mathbb{S}^1$ est le solénoide et r_2 est l'ensemble des places complexes de E. Le groupe de Weil d'un corps de nombres est unique à un automorphisme intérieur par un élément de W_F^0 près.

4.3. Morphismes de Weil. Soient F un corps global, $\overline{F}/F$ une clôture séparable, $G_F := \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ son groupe de Galois, et $(W_F, \gamma_F, \{r_E\})$ un groupe de Weil pour F. Soit $\mathfrak{p}$ une place de F. On choisit une clôture séparable $\overline{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}$ et $(W_{F_{\mathfrak{p}}}, \gamma_{F_{\mathfrak{p}}}, \{r_{E_{\mathfrak{p}}}\})$ un groupe de Weil pour $F_{\mathfrak{p}}$. On choisit maintenant un F-plongement $i : \overline{F} \to \overline{F}_{\mathfrak{p}}$. Il induit un morphisme injectif $G_{F_{\mathfrak{p}}} \to G_F$. Si E/F est une extension finie, on pose $E_{\mathfrak{p}} = i(E)F_{\mathfrak{p}}$. Alors il existe un morphisme continu injectif

$$\theta_{\mathfrak{p}} : W_{F_{\mathfrak{p}}} \longrightarrow W_F$$

tel que les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd} W_{F_{\mathfrak{p}}} \arrow[r] \arrow[d] & G_{F_{\mathfrak{p}}} \arrow[d] \\ W_F \arrow[r] & G_F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E_{\mathfrak{p}}^{\times} \arrow[r] \arrow[d] & W_{E_{\mathfrak{p}}}^{ab} \arrow[d] \\ C_E \arrow[r] & W_E^{ab} \end{tikzcd}$$

commutent, où la flèche $E_{\mathfrak{p}}^{\times} \to C_E$ envoie $\alpha_{\mathfrak{p}} \in E_{\mathfrak{p}}^{\times}$ sur l'idèle dont la composante en $\mathfrak{p}$ est $\alpha_{\mathfrak{p}}$ et les autres composantes sont 1. Un tel morphisme $W_{F_{\mathfrak{p}}} \to W_F$ est unique si $\mathfrak{p}$ est ultramétrique, et unique à conjugaison par un élément de la composante neutre W_F^0 près si $\mathfrak{p}$ est archimédienne.

5. Choix et notations

Dans toute la suite, F désigne un corps de nombres, et on pose

$$X := \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F) \text{ et } \overline{X} := \overline{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)}.$$

On aura besoin des choix et notations suivantes.

NOTATION 3.9. *On choisit :*
— *une clôture algébrique* $\overline{F}/F$ *;*
— *un groupe de Weil* $(W_F, \gamma_F, \{r_E\})$ *;*
— *pour chaque place* $\mathfrak{p}$ *de* F*, une clôture séparable* $\overline{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}$ *;*
— *pour chaque place* $\mathfrak{p}$*, un groupe de Weil* $(W_{F_{\mathfrak{p}}}, \gamma_{F_{\mathfrak{p}}}, \{r_{E_{\mathfrak{p}}}\})$ *;*
— *pour chaque place* $\mathfrak{p}$*, un* F*-plongement* $i : \overline{F} \to \overline{F}_{\mathfrak{p}}$ *et un morphisme de groupes de Weil*

$$\theta_{\mathfrak{p}} : W_{F_{\mathfrak{p}}} \longrightarrow W_F.$$

On note $W^1_{F_{\mathfrak{p}}}$ le sous-groupe compact maximal de $W_{F_{\mathfrak{p}}}$. On définit le groupe de Weil du "corps résiduel $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$" comme suit :

$$W_{\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}} := W_{F_{\mathfrak{p}}}/W^1_{F_{\mathfrak{p}}}.$$

Bien que le corps résiduel $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$ n'existe pas lorsque $\mathfrak{p}$ est archimédienne, son groupe de Weil est bien défini et on a $W_{\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}} \simeq \mathbb{R}$. Pour toute place $\mathfrak{p}$, on a un morphisme surjectif

$$W_{F_{\mathfrak{p}}} \longrightarrow W_{\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}}.$$

On considère le morphisme canonique de groupes topologiques

$$W_F \longrightarrow W_F^{ab} \simeq C_F \xrightarrow{\mathrm{Nm}} \mathbb{R}_+^{\times} \xrightarrow{\log} \mathbb{R}. \tag{8}$$

Le groupe topologique $\mathbb{R}$ joue le rôle du groupe de Weil du "corps des constantes" qui n'existe pas. On note

$$W_{\mathbb{F}_1} := \mathbb{R}.$$

La flèche (8) ci-dessus est à comparer à la suivante. Si K est le corps de fonctions d'une courbe projective lisse géométriquement connexe sur le corps fini $\mathbb{F}_q$, on a un morphisme canonique

$$W_K \longrightarrow W_K^{ab} \simeq C_K \xrightarrow{\mathrm{Nm}} q^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} W_{\mathbb{F}_q}.$$

Les choix faits dans la notation 3.9 fournissent aussi les groupes de Galois suivants. On a $G_F := \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, $G_{F_\mathfrak{p}} := \mathrm{Gal}(\overline{F}_\mathfrak{p}/F_\mathfrak{p})$. On note $I_\mathfrak{p} \subseteq G_{F_\mathfrak{p}}$ le groupe d'inertie et on a $G_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}} \simeq G_{F_\mathfrak{p}}/I_\mathfrak{p}$. Notons que si $\mathfrak{p}$ est une place archimédienne, on a $I_\mathfrak{p} = G_{F_\mathfrak{p}}$, et ce groupe est soit trivial soit d'ordre 2. On a donc $G_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}} = \{1\}$ pour toute place archimédienne $\mathfrak{p}$.

6. Le système projectif des sites Weil-étales de Lichtenbaum

On conserve les choix et notations posés dans la section 5. Soient $\overline{F}/E/F$ une sous-extension galoisienne finie et S un ensemble fini non vide de places de F contenant toutes les places ramifiées dans E. On note encore S l'ensemble des places de E au-dessus de S. On considère le quotient $W_{E/F,S}$ du groupe $W_{E/F}$ par le sous groupe normal compact

$$\prod_{\mathfrak{q}\notin S} \mathcal{O}_{E_\mathfrak{q}}^\times \hookrightarrow C_E \hookrightarrow W_{E/F}.$$

On obtient un morphisme d'extensions

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & C_E \arrow[r] \arrow[d] & W_{E/F} \arrow[r] \arrow[d] & G_{E/F} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & C_{E,S} \arrow[r] & W_{E/F,S} \arrow[r] & G_{E/F} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les surjections canoniques. Ces deux extensions définissent d'ailleurs la même classe dans $H^2(G_{E/F}, C_E) \simeq H^2(G_{E/F}, C_{E,S})$. Alors la flèche

$$W_F \xrightarrow{\sim} \varprojlim W_{E/F,S}$$

est un isomorphime de groupes topologiques, où $(E/F,S)$ parcourt l'ensemble des sous-extensions galoisiennes finies de $\overline{F}/F$ munies d'un ensemble fini S de places de F contenant toutes les places ramifiées dans E.

Définition 3.10. *(Lichtenbaum [**39**]) Les objets de la catégorie $T_{E/F,S}$ sont les familles $(Z_0, Z_\mathfrak{p}, f_\mathfrak{p})$ définies comme suit. Z_0 est un espace topologique muni d'une action continue de $W_{E/F,S}$. Pour chaque place $\mathfrak{p}$ de F, $Z_\mathfrak{p}$ est un espace topologique muni d'une action continue de $W_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}$ et $f_\mathfrak{p} : Z_\mathfrak{p} \to Z_0$ est une flèche continue $W_{F_\mathfrak{p}}$-équivariante. Un morphisme*

$$(\phi_0, \phi_\mathfrak{p}) : (Z_0, Z_\mathfrak{p}, f_\mathfrak{p}) \longrightarrow (Z'_0, Z'_\mathfrak{p}, f'_\mathfrak{p})$$

est donné par une flèche $W_{E/F,S}$-équivariante continue $\phi_0 : Z_0 \to Z'_0$ et une famille de flèches $W_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}$-équivariantes continues $\phi_\mathfrak{p} : Z_\mathfrak{p} \to Z'_\mathfrak{p}$ telles que les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
Z_\mathfrak{p} \arrow[r, "\phi_\mathfrak{p}"] \arrow[d, "f_\mathfrak{p}"] & Z'_\mathfrak{p} \arrow[d, "f'_\mathfrak{p}"] \\
Z_0 \arrow[r, "\phi_0"] & Z'_0
\end{tikzcd}$$

commutent. On définit une prétopologie sur $T_{E/F,S}$ en déclarant qu'une famille de morphismes

$$\{(\phi_{i,0}, \phi_{i,\mathfrak{p}}) : (Z_{i,0}, Z_{i,\mathfrak{p}}, f_{i,\mathfrak{p}}) \longrightarrow (Z_0, Z_\mathfrak{p}, f_\mathfrak{p}),\ i \in I\}$$

est un recouvrement si la flèche $\coprod_{i\in I} Z_{i,0} \to Z_0$ *a des sections locales, et si la flèche* $\coprod_{i\in I} Z_{i,\mathfrak{p}} \to Z_{\mathfrak{p}}$ *a des sections locales pour toute place* $\mathfrak{p}$*. On note* $\mathcal{J}_{ls}$ *la topologie engendrée sur* $T_{E/F,S}$ *par cette prétopologie.*

Les petites limites projectives sont représentables dans $T_{E/F,S}$. De plus, la topologie $\mathcal{J}_{ls}$ sur $T_{E/F,S}$ est sous-canonique, i.e. les préfaisceaux représentables sont des faisceaux. En particulier, si A est un groupe topologique abélien alors le préfaisceau représenté par $(Z_0, Z_{\mathfrak{p}}, f_{\mathfrak{p}}) = (A, A, \mathrm{Id}_A)$ est un faisceau. On notera ce faisceau par $\tilde{A}$, ou simplement par A lorsque A est un groupe abélien discret.

Les sites $(T_{E/F,S}, \mathcal{J}_{ls})$ sont fonctoriels en $(E/F, S)$. On obtient en fait un système projectif de sites

$$\{(T_{E/F,S}, \mathcal{J}_{ls})\}_{(E/F,S)}.$$

Définition 3.11. *(Lichtenbaum* [**39**]*) Soit A un groupe topologique abélien. La "cohomologie Weil-étale" à coefficients dans $\tilde{A}$ est définie comme la limite inductive*

$$\underrightarrow{H}^i_W(\overline{X}, \tilde{A}) := \varinjlim H^i((T_{E/F,S}, \mathcal{J}_{ls}), \tilde{A}).$$

Si on note $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ alors $j_!\tilde{A} = j_!j^*\tilde{A}$ est le faisceau abélien sur $(T_{E/F,S}, \mathcal{J}_{ls})$ représenté par $(A_0, A_{\mathfrak{p}}, f_{\mathfrak{p}})$ où $A_0 = A$, $A = A_{\mathfrak{p}}$, $f_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Id}_A$ pour $\mathfrak{p}$ ultramétrique et $A_{\mathfrak{p}} = 0$, $f_{\mathfrak{p}} = 0$ pour $\mathfrak{p}$ archimédienne.

Définition 3.12. *(Lichtenbaum* [**39**]*) Soit A un groupe topologique abélien. La "cohomologie Weil-étale à support compact" à coefficients dans $\tilde{A}$ est définie comme la limite inductive*

$$\underrightarrow{H}^i_{W,c}(X, \tilde{A}) := \varinjlim H^i((T_{E/F,S}, \mathcal{J}_{ls}), j_!\tilde{A}).$$

On note

$$\mathrm{Pic}(\overline{X}) := C_{F,\emptyset} := C_F / \prod_{\mathfrak{p}\leq\infty} \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^{\times}$$

le groupe de Picard-Arakelov et $\mathrm{Pic}^1(\overline{X})$ son sous-groupe compact maximal. Notons que $\mathrm{Pic}^1(\overline{X})$ est le noyau de la norme $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathbb{R}_{>0}$. On a une suite exacte canonique de groupes compacts

$$1 \to (\mathbb{R}^{r_1+r_2})^{\Sigma}/\log(\mathcal{O}_F^{\times}/\mu_F) \to \mathrm{Pic}^1(\overline{X}) \to \mathrm{Cl}(F) \to 1.$$

où $(\mathbb{R}^{r_1+r_2})^{\Sigma}$ est le noyau de la somme $\sum : \mathbb{R}^{r_1+r_2} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{O}_F^{\times}$ est le groupe des unités de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_F$, μ_F est le groupe des racines de l'unité et $\mathrm{Cl}(F) = \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_F)$ est le groupe des classes d'idéaux.

On note A^D le dual de Pontryagin d'un groupe abélien localement compact A. La suite exacte duale de la précédente est la suite exacte

$$1 \to \mathrm{Cl}(F)^D \to \mathrm{Pic}^1(\overline{X})^D \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_F^{\times}, \mathbb{Z}) \to 1$$

de groupes abéliens de type fini.

Théorème 3.13. *(Lichtenbaum [**39**]) On a des isomorphismes*

$$\begin{aligned}
\underrightarrow{H}^i_W(\overline{X},\mathbb{Z}) &\simeq \mathbb{Z},0,\mathrm{Pic}^1(\overline{X})^D,\mu_F^D \textit{ pour } i=0,1,2,3\,;\\
\underrightarrow{H}^i_W(\overline{X},\tilde{\mathbb{R}}) &\simeq \mathbb{R},\mathbb{R},0 \textit{ pour } i=0,1,\geq 2\,;\\
\underrightarrow{H}^i_{W,c}(X,\mathbb{Z}) &\simeq 0,(\prod_{X_\infty}\mathbb{Z})/\mathbb{Z},\mathrm{Pic}^1(\overline{X})^D,\mu_F^D \textit{ pour } i=0,1,2,3\,;\\
\underrightarrow{H}^i_{W,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}) &\simeq 0,(\prod_{X_\infty}\mathbb{R})/\mathbb{R},(\prod_{X_\infty}\mathbb{R})/\mathbb{R},0 \textit{ pour } i=0,1,2,\geq 3.
\end{aligned}$$

Théorème 3.14. *(Lichtenbaum [**39**]) Pour $i=1,2$ la flèche*

$$\underrightarrow{H}^i_{W,c}(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{R}\longrightarrow \underrightarrow{H}^i_{W,c}(X,\tilde{\mathbb{R}})$$

est un isomorphisme. On a une classe fondamentale $\theta\in\underrightarrow{H}^1_W(\overline{X},\tilde{\mathbb{R}})$ telle que le cup-produit avec θ induit un isomorphisme

$$\cup\theta : \underrightarrow{H}^1_{W,c}(X,\tilde{\mathbb{R}})\xrightarrow{\sim}\underrightarrow{H}^2_{W,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}).$$

Enfin, le diagramme d'isomorphismes suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\underrightarrow{H}^1_{W,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}) \arrow[r, "\cup\theta"] & \underrightarrow{H}^2_{W,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}) \\
\underrightarrow{H}^1_{W,c}(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{R} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \underrightarrow{H}^2_{W,c}(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{R} \arrow[u] \arrow[d] \\
\left(\prod_{X_\infty}\mathbb{R}\right)/\mathbb{R} \arrow[r, "\mathrm{Reg}^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_F^\times,\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont définies ci-dessus et Reg^* *est la flèche duale du régulateur de Dirichlet*

$$\mathcal{O}_F^\times\otimes\mathbb{R}\xrightarrow{\sim}\left(\mathbb{R}^{r_1+r_2}\right)^{\Sigma}.$$

Considérons un complexe acyclique borné de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies

$$0\to\cdots\to V^{i-1}\to V^i\to V^{i+1}\to\cdots\to 0$$

muni d'isomorphismes $L^i\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}\simeq V^i$ où L^i est un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini. Alors on peut définir le déterminant $\det(L^*\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R},d^*)$ de ce complexe acyclique, au signe près, de sorte que si $V^i=0$ pour $i\neq 0,1$, alors $\det(L^*\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R},d^*)$ est le déterminant de l'isomorphisme $L^0\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}\xrightarrow{\sim}L^1\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ pour un choix quelconque de $\mathbb{Z}$-bases de L^0 et L^1. Le déterminant ainsi défini ne dépend pas, au signe près, du choix de ces bases. Si $V^i=0$ pour tout $i\in\mathbb{Z}$, alors le déterminant vaut ±1 par convention. Par ailleurs, si A est un groupe abélien de type fini, on note A_{tors} le sous-groupe de torsion maximal de A, et on pose

$$A_{cotors}:=A/A_{tors}.$$

On déduit des calculs précédents et de la formule analytique du nombre de classes le résultat suivant.

Corollaire 3.15. *(Lichtenbaum* [**39**]*) On a*

$$\zeta_F^*(0)=\pm\prod_{0\leq i\leq 3}|\underrightarrow{H}^i_{W,c}(X,\mathbb{Z})_{tors}|^{(-1)^i}\cdot\det(\underrightarrow{H}^i_{W,c}(X,\mathbb{Z})_{cotors}\otimes\mathbb{R},\cup\theta)^{-1}.$$

6.1. Pathologies. La définition précédente souffre de plusieurs pathologies. La première a été observée par M. Flach. La deuxième est moins sérieuse, et sera l'objet de la section suivante.

6.1.1. On aimerait que les groupes $\underrightarrow{H}^i_{W,c}(X,\mathbb{Z})$ soient nuls pour $i>3$, mais ce n'est pas le cas, comme le montre le théorème de M. Flach suivant.

Théorème 3.16. *(Flach* [**14**]*) Soit F un corps de nombres totalement imaginaire. Les groupes $H^i(W_F,\mathbb{Z})$ contiennent un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie pour tout $i\geq 4$ pair. Il suit que les groupes $\underrightarrow{H}^i_{W,c}(X,\mathbb{Z})$ et $\underrightarrow{H}^i_{W}(\overline{X},\mathbb{Z})$ sont non-nuls pour tout $i\geq 4$ pair.*

6.1.2. On aimerait aussi que les groupes $\underrightarrow{H}^i_{W,c}(X,-)$ et $\underrightarrow{H}^i_{W}(\overline{X},-)$ soient les groupes de cohomologie d'un site (i.e. d'un topos). On va voir que ce n'est pas le cas avec la définition précédente. On peut d'abord copier la définition du site $T_{E/F,S}$ en remplaçant le groupe $W_{E/F,S}$ par le groupe de Weil W_F. On note le site obtenu de cette manière par $(T_F,\mathcal{J}_{ls})$. On note aussi $\mathrm{Sh}(T_{E/F,S},\mathcal{J}_{ls})$ et $\mathrm{Sh}(T_F,\mathcal{J}_{ls})$ les topos associés à ces sites (i.e. les catégories des faisceaux d'ensembles sur ces sites). Les topos $\mathrm{Sh}(T_{E/F,S},\mathcal{J}_{ls})$, pour $(E/F,S)$ variable, forment donc un système projectif de topos. Les morphismes de groupes topologiques $W_F\to W_{E/F,S}$ induisent un morphisme de topos

$$\mathrm{Sh}(T_F,\mathcal{J}_{ls})\longrightarrow\varprojlim\mathrm{Sh}(T_{E/F,S},\mathcal{J}_{ls})$$

où la limite est prise dans la 2-catégorie des topos.

Proposition 3.17. *(*[**45**] *4.41) Le morphisme induit*

$$\underrightarrow{H}^i_W(\overline{X},\mathbb{Z})\to H^i(\mathrm{Sh}(T_F,\mathcal{J}_{ls}),\mathbb{Z})$$

n'est pas un isomorphisme pour $i=2,3$. Pire, il n'existe pas d'isomorphisme entre le membre de gauche et le membre de droite pour $i=2,3$.

On peut aussi montrer que les flèches

$$H^i(\varprojlim\mathrm{Sh}(T_{E/F,S},\mathcal{J}_{ls}),\mathbb{Z})\to H^i(\mathrm{Sh}(T_F,\mathcal{J}_{ls}),\mathbb{Z})$$

sont des isomorphismes pour $i\leq 3$. On voit donc que ni le topos $\mathrm{Sh}(T_F,\mathcal{J}_{ls})$ ni le topos $\varprojlim\mathrm{Sh}(T_{E/F,S},\mathcal{J}_{ls}),\mathbb{Z})$ ne fournit la cohomologie Weil-étale, ne serait-ce qu'en degrés $i\leq 3$.

7. Le topos Weil-étale $\overline{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)}_W$

Dans cette section on répond à la question posée dans la section 6.1.2 en définissant le topos Weil-étale $\overline{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)}_W$, où F est un corps de nombres. Ce topos a été introduit et étudié dans [**15**] et [**47**]. On conserve les choix et notations posés dans la section 5. En particulier F désigne un corps de nombres, et on pose $\overline{X}:=\overline{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)}$. On dispose donc des groupes de Weil W_F, $W_{F_\mathfrak{p}}$, $W_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}$, et des morphismes $W_{F_\mathfrak{p}}\to W_F$ et $W_{F_\mathfrak{p}}\to W_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}$ pour toute place $\mathfrak{p}$.

Notation 3.18. *Pour toute place $\mathfrak{p}$ de F, on a une équivalence* $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})_{et}\simeq B^{sm}_{G_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}}$ *ainsi qu'un plongement fermé de topos*

$$u_\mathfrak{p}:\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})_{et}\longrightarrow\overline{X}_{et}.$$

Notons que si $\mathfrak{p}$ *est une place archimédienne, alors* $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})_{et} \simeq \mathrm{Set}$ *est le topos des ensembles (voir Section 5) et* $u_{\mathfrak{p}}$ *est un point du topos* $\overline{X}_{et}$. *Pour toute place* $\mathfrak{p}$ *de* F *on définit le topos Weil-étale*

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})_W := B_{W_{\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}}}.$$

Enfin, on définit le "topos Weil-étale de base" :

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_1)_W := B_{W_{\mathbb{F}_1}} := B_{\mathbb{R}}.$$

On définit maintenant le topos Weil-étale $\overline{X}_W$.

Définition 3.19. *([**15**], [**47**]) Soit* $T_{\overline{X}}$ *la catégorie suivante. Les objets de* $T_{\overline{X}}$ *sont les familles* $(Z_0, Z_{\mathfrak{p}}, f_{\mathfrak{p}})$ *définies comme suit.* Z_0 *est un espace topologique muni d'une action continue de* W_F. *Pour chaque place* $\mathfrak{p}$ *de* F, $Z_{\mathfrak{p}}$ *est un espace topologique muni d'une action continue de* $W_{\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}}$, *et* $f_{\mathfrak{p}} : Z_{\mathfrak{p}} \to Z_0$ *est une flèche continue* $W_{F_{\mathfrak{p}}}$*-équivariante. On impose les propriétés suivantes :*

- *La flèche* $f_{\mathfrak{p}}$ *est un homéomorphisme pour presque toute place* $\mathfrak{p}$, *et* $f_{\mathfrak{p}}$ *est une flèche injective continue pour toute place* $\mathfrak{p}$.
- *Pour toute place* $\mathfrak{p}$, $Z_{\mathfrak{p}}$ *est localement compact.*
- *L'action de* W_F *sur* Z_0 *se factorise par* $W_{K/F}$, *pour une sous-extension galoisienne* $\overline{F}/K/F$.

Un morphisme

$$\phi : (Z_0, Z_{\mathfrak{p}}, f_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow (Z'_0, Z'_{\mathfrak{p}}, f'_{\mathfrak{p}})$$

est donné par une flèche W_F*-équivariante continue* $\phi_0 : Z_0 \to Z'_0$ *induisant pour toute place* $\mathfrak{p}$ *une flèche continue* $Z_{\mathfrak{p}} \to Z'_{\mathfrak{p}}$, *qui est automatiquement* $W_{\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}}$*-équivariante. Les limites projectives finies sont représentables dans la catégorie* $T_{\overline{X}}$. *On définit une prétopologie sur* $T_{\overline{X}}$ *en déclarant qu'une famille de morphismes*

$$\{\phi_i : (Z_{i,0}, Z_{i,\mathfrak{p}}, f_{i,\mathfrak{p}}) \longrightarrow (Z_0, Z_{\mathfrak{p}}, f_{\mathfrak{p}}),\ i \in I\}$$

est un recouvrement si la flèche $\coprod_{i\in I} Z_{i,\mathfrak{p}} \to Z_{\mathfrak{p}}$ *admet des sections locales pour toute place* $\mathfrak{p}$. *On note encore* $\mathcal{J}_{ls}$ *la topologie engendrée sur* $T_{\overline{X}}$ *par cette prétopologie.*

On définit enfin le topos Weil-étale $\overline{X}_W := \mathrm{Sh}(T_{\overline{X}}, \mathcal{J}_{ls})$

On commence par justifier la notation $\overline{X}_W$ et le terme de "topos Weil-étale". Soit Y une courbe projective lisse sur un corps fini, de corps de fonctions K. En remplaçant dans la définition 3.19 le corps de nombres F par le corps de fonctions K, les groupes des Weil W_F et $W_{F_{\mathfrak{p}}}$ par W_K et $W_{K_{\mathfrak{p}}}$, on obtient le site $(T_Y, \mathcal{J}_{ls})$. Le résultat suivant s'obtient à partir de ([**47**] Theorem 3.34).

Théorème 3.20. *On a une équivalence*

$$\mathrm{Sh}(T_Y, \mathcal{J}_{ls}) \simeq Y_W$$

où le $\mathcal{T}$*-topos Weil-étale* Y_W *est défini dans la section 2.*

Revenons au cas du corps de nombres F. Le morphisme de groupes topologiques

$$W_F \longrightarrow W_F^{ab} \simeq C_F \xrightarrow{\mathrm{Nm}} \mathbb{R}_+^{\times} \xrightarrow{\log} \mathbb{R}$$

induit, pour toute place $\mathfrak{p}$, un morphisme $W_{F_\mathfrak{p}} \to \mathbb{R}$ qui induit à son tour un morphisme $W_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}} \to \mathbb{R}$. Ces morphismes de groupes topologiques définissent un morphisme de topos

$$\mathfrak{f}_{\overline{X}} : \overline{X}_W \longrightarrow B_{\mathbb{R}} =: \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_1)_W$$

En composant $\mathfrak{f}_{\overline{X}}$ avec le morphisme canonique $B_{\mathbb{R}} \to \mathcal{T}$, on obtient

$$t_{\overline{X}} : \overline{X}_W \longrightarrow \mathcal{T}.$$

Définition 3.21. *La classe fondamentale* $\theta_{\overline{X}} \in H^1(\overline{X}_W, \mathbb{R})$ *est la classe (voir Section 1) du* $\mathcal{T}$*-morphisme* $\mathfrak{f}_{\overline{X}} : \overline{X}_W \to B_{\mathbb{R}}$.

En remplaçant dans la définition 3.19 "espace topologique" par "ensemble fini" et les groupes de Weil W_F, $W_{K/F}$, $W_{F_\mathfrak{p}}$ et $W_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}$ par les groupes de Galois G_F, $G_{K/F}$, $G_{F_\mathfrak{p}}$ et $G_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}$, on obtient un site équivalent au site étale d'Artin-Verdier $\mathrm{Et}_{\overline{X}}$. L'équivalence en question est canoniquement définie à partir des choix de la notation 3.9. Il suit que les flèches

$$W_F \to G_F \ , \ W_{F_\mathfrak{p}} \to G_{F_\mathfrak{p}} \text{ et } W_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}} \to G_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}$$

induisent canoniquement un morphisme de topos ([**15**] Proposition 5.4)

$$\gamma : \overline{X}_W \longrightarrow \overline{X}_{et}$$

sur le topos étale d'Artin-Verdier. Le foncteur

$$\begin{array}{ccc} T_{\overline{X}} & \longrightarrow & B_{W_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}} := \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})_W \\ (Z_0, Z_\mathfrak{p}, f_\mathfrak{p}) & \longmapsto & Z_\mathfrak{p} \end{array}$$

est exact à gauche est continu. Il induit donc un morphisme

$$i_\mathfrak{p} : \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})_W \longrightarrow \overline{X}_W$$

qui rend d'ailleurs le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})_W & \xrightarrow{\gamma_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}} & \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})_{et} \\ \downarrow{\scriptstyle i_\mathfrak{p}} & & \downarrow{\scriptstyle u_\mathfrak{p}} \\ \overline{X}_W & \xrightarrow{\quad\gamma\quad} & \overline{X}_{et} \end{array}$$

Théorème 3.22. *(*[**15**] *Theorem 5.1) Pour toute place* $\mathfrak{p}$ *de* F*, le diagramme précédent est un pull-back. En d'autres termes, le morphisme induit*

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})_W \longrightarrow \overline{X}_W \times_{\overline{X}_{et}} \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})_{et}$$

est une équivalence. En particulier $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})_W \to \overline{X}_W$ *est un plongement fermé.*

La proposition suivante complète la description de $\overline{X}_W$ au-dessus des points fermés de $\overline{X}$.

Proposition 3.23. *Le morphisme composé*

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})_W \xrightarrow{i_\mathfrak{p}} \overline{X}_W \xrightarrow{\mathfrak{f}_{\overline{X}}} \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_1)_W$$

est le morphisme $B_{W_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}} \to B_{\mathbb{R}}$ *induit par le morphisme*

$$\begin{array}{ccc} W_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{Frob}_\mathfrak{p} & \longmapsto & \log(N(\mathfrak{p})) \end{array}$$

pour $\mathfrak{p}$ *ultramétrique, et par l'identité*

$$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : W_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}} = \mathbb{R} \xrightarrow{=} \mathbb{R}$$

pour $\mathfrak{p}$ archimédienne.

On peut aussi se demander quelle est la structure du topos Weil-étale au-dessus du point générique. On a un morphisme canonique $B_{W_F} \to \overline{X}_W$ induit par le foncteur continu et exact à gauche

$$\begin{array}{ccc} T_{\overline{X}} & \longrightarrow & B_{W_F} \\ (Z_0, Z_{\mathfrak{p}}, f_{\mathfrak{p}}) & \longmapsto & Z_0 \end{array}.$$

Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} B_{W_F} \arrow[r] \arrow[d] & B^{sm}_{G_F} \simeq \mathrm{Spec}(F)_{et} \arrow[d, "u_0"] \\ \overline{X}_W \arrow[r, "\gamma"] & \overline{X}_{et} \end{tikzcd}$$

On considère maintenant le pro-groupe localement compact

$$\underline{W}_F := \{W_{E/F,S}\}_{(E/F,S)}$$

indexé sur l'ensemble partiellement ordonné des extensions galoisiennes finies E/F munies d'un ensemble fini S de places de F contenant toutes celles qui se ramifient dans E. Le topos classifiant $B_{\underline{W}_F}$ de ce pro-groupe localement compact est défini comme dans la section 1.

Proposition 3.24. *([**15**] Proposition 5.2) Le diagramme précédent induit une équivalence*

$$B_{W_F} \longrightarrow B_{\underline{W}_F} \xrightarrow{\sim} \overline{X}_W \times_{\overline{X}_{et}} \mathrm{Spec}(F)_{et}.$$

En particulier $B_{\underline{W}_F} \to \overline{X}_W$ est un plongement (non-fermé) de topos.

Si $\overline{U}$ est un object de $\mathrm{Et}_{\overline{X}}$ (i.e. un $\overline{X}$-schéma étale), on définit son topos Weil-étale comme la localisation

$$\overline{U}_W := \overline{X}_W/\gamma^*(\overline{U}) \longrightarrow \overline{X}_W \tag{9}$$

au-dessus de $\overline{X}_W$. Par exemple, le topos Weil-étale de $X = (\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F), \emptyset)$ est

$$X_W := \overline{X}_W/\gamma^*(X).$$

Un $\mathcal{T}$-point de $\overline{U}_W$ est une section du morphisme

$$t_{\overline{U}} : \overline{U}_W \longrightarrow \overline{X}_W \longrightarrow \mathcal{T}.$$

On suppose $\overline{U}$ connexe et on choisit un point géométrique $q_{\overline{U}} : \mathrm{Spec}(\overline{F}) \to \overline{U}$ au-dessus du point $q_{\overline{X}} : \mathrm{Spec}(\overline{F}) \to \overline{X}$ donné par $\overline{F}/F$. Le point générique de $\overline{U}$ est de la forme $\mathrm{Spec}(E)$, où E/F est une extension finie, et le point géométrique $q_{\overline{X}}$ plonge E dans $\overline{F}$. On dispose donc de $W_E \subseteq W_F$. Pour chaque point fermé $\mathfrak{q}$ de $\overline{U}$, on a une flèche

$$W^1_{E_{\mathfrak{q}}} \to W_{E_{\mathfrak{q}}} \to W_E.$$

Soit $N_{\overline{U}}$ la clôture du sous-groupe normal engendré par les images de ces morphismes, pour tout point fermé $\mathfrak{q}$ de $\overline{U}$. On note

$$W(\overline{U}, p_{\overline{U}}) := W_E/N_{\overline{U}}.$$

On peut voir $W(\overline{U}, p_{\overline{U}})$ comme la limite projective d'un système projectif strict de groupes localement compacts de dimensions finies. Ce système projectif est un pro-groupe localement compact strict $\underline{W}(\overline{U}, p_{\overline{U}})$.

Soit $\mathcal{S}$ un topos arbitraire et soit $\mathcal{E} \to \mathcal{S}$ un $\mathcal{S}$-topos. Si $\mathcal{E}$ est connexe et localement connexe au-dessus de $\mathcal{S}$ et muni d'un $\mathcal{S}$-point $p : \mathcal{S} \to \mathcal{E}$, on peut définir le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{E}, p)$ comme un "pro-groupe" dans $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{S}$ est le topos des ensembles et $\mathcal{E}$ le topos associé à un espace topologique E, alors $\mathcal{E}$ est connexe et localement connexe si l'espace E l'est. Si de plus E est localement simplement connexe, alors $\pi_1(\mathcal{E}, p)$ est le pro-groupe constant $\pi_1(E, p)$.

Théorème 3.25. *([**47**] Theorem 4.27) Pour tout $\overline{X}$-schéma étale connexe $\overline{U}$, on a :*
— *le morphisme $t_{\overline{U}} : \overline{U}_W \to \mathcal{T}$ est connexe et localement connexe ;*
— *un point géométrique $q_{\overline{U}}$ comme ci-dessus induit un $\mathcal{T}$-point $p_{\overline{U}}$ de $\overline{U}_W$;*
— *un isomorphisme de pro-groupes topologiques*

$$\pi_1(\overline{U}_W, p_{\overline{U}}) \simeq \underline{W}(\overline{U}, p_{\overline{U}})$$

fonctoriel en $(\overline{U}, p_{\overline{U}})$.

Remarque 3.26. *On peut définir la catégorie* $\mathrm{SLC}_{\mathcal{T}}(\overline{U}_W)$ *des sommes de faisceaux sur $\overline{U}_W$ localement constants au-dessus de $\mathcal{T}$ (voir* [**47**] *Section 4.5). Le résultat précédent montre que cette catégorie est équivalente au topos classifiant du pro-groupe localement compact $\underline{W}(\overline{U}, p_{\overline{U}})$. De manière moins formelle, $\underline{W}(\overline{U}, p_{\overline{U}})$ classifie les faisceaux localement constants sur $\overline{U}_W/\mathcal{T}$.*

Le morphisme γ induit, pour tout $\overline{U}$ connexe muni d'un point géométrique $q_{\overline{U}}$, un morphisme

$$\pi_1(\overline{U}_W, p_{\overline{U}}) \longrightarrow \pi_1(\overline{U}_{et}, q_{\overline{U}})$$

dont l'image est dense. D'autre part, on déduit du théorème précédent un isomorphisme

$$r_{\overline{U}} : C_{\overline{U}} \xrightarrow{\sim} \underline{W}(\overline{U}, p_{\overline{U}})^{ab} \xrightarrow{\sim} \pi_1(\overline{U}_W, p_{\overline{U}})^{ab}$$

où

$$C_{\overline{U}} := C_{K(\overline{U})} / \prod_{\mathfrak{p} \in \overline{U}} \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^{\times}$$

est le groupe classes de S-idèles du corps de nombres associé à $\overline{U}$ (le spectre de $K(\overline{U})$ est le point générique de $\overline{U}$). On peut montrer que le triplet $(\overline{X}_W, \gamma, \{r_{\overline{U}}\})$ satisfait une liste d'axiomes analogues aux axiomes **(W1)–(W5)** (voir [**47**] Theorem 6.12) ; il peut-être vu comme un "modèle entier pour le groupe de Weil".

Corollaire 3.27. *([**46**] Theorem 6.15) On a $\gamma_*(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et $R^1\gamma_*(\mathbb{Z}) = 0$. Pour tout $\overline{X}$-schéma étale connexe $\overline{U} = (U, U_\infty)$ de corps de fonctions $K(\overline{U})$, on a*

$$R^2\gamma_*(\mathbb{Z})(\overline{U}) \simeq \left(C^{0,1}_{K(\overline{U})} / \prod_{\mathfrak{p} \in U_\infty - U(\mathbb{R})} \mathbb{S}^1 \right)^D \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{O}^{\times}_{K(\overline{U})}, \mathbb{Q}) \bigoplus \sum_{\mathfrak{p} \in r_2(K(\overline{U})) - U_\infty} \mathbb{Z}.$$

Corollaire 3.28. *([**46**] Corollary 6.16, [**47**] Corollary 6.13). Supposons que le corps de nombres F est totalement imaginaire. On a $\gamma_*(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $R^1\gamma_*(\mathbb{Z}) = 0$, le faisceau $R^2\gamma_*(\mathbb{Z})$ est acyclique pour le foncteur des sections globales, et on a*

$$H^0(\overline{X}_{et}, R^2\gamma_*(\mathbb{Z})) = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_F^{\times}, \mathbb{Q}).$$

On obtient un triangle distingué

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_F^{\times}, \mathbb{Q})[-3] \to R\Gamma(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}) \to R\Gamma(\overline{X}_{et}, \tau^{\leq 2}R\gamma_*\mathbb{Z}) \to \tag{10}$$

et le complexe $R\Gamma(\overline{X}_{et}, \tau^{\leq 2}R\gamma_*\mathbb{Z})$ calcule la cohomologie Weil-étale conjecturale.

Corollaire 3.29. *La cohomologie du topos Weil-étale fournit des groupes isomorphes à ceux définis par Lichtenbaum en degrés* $i \leq 3$*. Plus précisément, pour* $A = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ *et* $i \leq 3$*, les groupes* $H^i(\overline{X}_W, \tilde{A})$ *et* $H^i_c(X_W, \tilde{A})$ *sont isomorphes aux groupes* $\underrightarrow{H}^i_W(\overline{X}, \tilde{A})$ *et* $\underrightarrow{H}^i_{W,c}(X, \tilde{A})$*.*

Le fait que le topos Weil-étale est défini au-dessus du topos des espaces topologiques $\mathcal{T}$ implique en particulier que l'on peut considérer les faisceaux (resp. les faisceaux abéliens) constants associés aux espaces topologiques (resp. aux groupes topologiques abéliens), et que les groupes de cohomologie et les groupes d'homotopie de $\overline{X}_W$ sont munis de topologies. Par exemple, pour tout groupe abélien localement compact A, on a

$$H^1_{\mathcal{T}}(\overline{U}_W, \tilde{A}) := R^1(t_{\overline{U},*})(\tilde{A}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\pi_1(\overline{U}_W, p_{\overline{U}}), A)$$

où $\underline{\mathrm{Hom}}(\pi_1(\overline{U}_W, p_{\overline{U}}), A)$ est muni de la topologie compacte-ouverte. Les groupes $H^1_c(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{F,S})_W, \tilde{\mathbb{S}}^1)$ et $H^2_c(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{F,S})_W, \tilde{\mathbb{S}}^1)$ sont des groupes abéliens compacts. La classe fondamentale θ permet de définir le produit alterné des volumes de ces deux groupes compacts, et on a

$$\frac{\mathrm{Vol}\left(H^2_c(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{F,S})_W, \tilde{\mathbb{S}}^1)\right)}{\mathrm{Vol}\left(H^1_c(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{F,S})_W, \tilde{\mathbb{S}}^1)\right)} = \pm\zeta^*(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{F,S}), 0)^{-1}.$$

8. Le topos Weil-étale d'un schéma arithmétique

Le topos Weil-étale d'un schéma arithmétique X régulier et propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ est défini dans l'article [**15**]. On montre d'abord le résultat suivant.

Théorème 3.30. *(*[**15**] *Proposition 5.5) Le morphisme canonique*

$$\overline{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)}_W \longrightarrow \overline{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)}_{et} \times_{\overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}_{et}} \overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}_W$$

est une équivalence, où $\overline{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)}_W$ *et* $\overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}_W$ *sont définis dans la section 7.*

Théorème 3.31. *(*[**15**] *Proposition 6.3) Soit* Y *un schéma séparé de type fini sur un corps fini* $\mathbb{F}_q$*. Alors le morphisme canonique*

$$Y_W \xrightarrow{\sim} Y_{et} \times_{\overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}_{et}} \overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}_W$$

est une équivalence, où Y_W *est défini dans la section 2.*

Les deux résultats précédents suggèrent la définition suivante.

Définition 3.32. *(*[**15**] *Definition 10) Pour tout schéma* X *propre sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$*, on définit le topos Weil-étale* $\overline{X}_W$ *comme le 2-produit fibré*

$$\overline{X}_W := \overline{X}_{et} \times_{\overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}_{et}} \overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}_W.$$

On retrouve donc les définitions précédentes pour $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$ et pour X de caractéristique p. Les projections donnent les morphismes

$$\gamma_{\overline{X}} : \overline{X}_W \longrightarrow \overline{X}_{et}$$

et

$$\mathfrak{f}_{\overline{X}} : \overline{X}_W \longrightarrow \overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}_W \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_1)_W := B_{\mathbb{R}}.$$

Définition 3.33. *La classe fondamentale* $\theta_{\overline{X}} \in H^1(\overline{X}_W, \tilde{\mathbb{R}})$ *est la classe (voir Section 1) du* $\mathcal{T}$*-morphisme* $\mathfrak{f}_{\overline{X}} : \overline{X}_W \to B_{\mathbb{R}}$*.*

Pour tout $\overline{X}$-schéma étale $\overline{U}$ on a canoniquement

$$\overline{U}_W := \overline{X}_W/\gamma^*_{\overline{X}}(\overline{U}) \simeq \overline{U}_{et} \times_{\overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}_{et}} \overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}_W.$$

Soit X un schéma propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. On a la décomposition ouverte-fermée

$$\phi : X_W \longrightarrow \overline{X}_W \longleftarrow \mathrm{Sh}(X_\infty) \times B_{\mathbb{R}} : i_\infty.$$

En d'autres termes, le sous-topos fermé de $\overline{X}_W$ au-dessus de la place archimédienne $\infty \in \overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$ s'identifie au topos produit $\mathrm{Sh}(X_\infty) \times B_{\mathbb{R}}$, qui peut être vu comme le topos associé à l'action triviale du groupe topologique $\mathbb{R}$ sur l'espace X_∞. Le sous-topos ouvert de $\overline{X}_W$ au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ s'identifie à X_W.

On se restreint à partir de maintenant aux schémas réguliers et propres sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Pour un faisceau abélien $\mathcal{F}$ sur X_W, on définit la cohomologie à support compact à coefficients dans $\mathcal{F}$:

$$R\Gamma_c(X_W, \mathcal{F}) := R\Gamma(\overline{X}_W, \phi_!\mathcal{F}).$$

On calcule la cohomologie $H^*(\overline{X}_W, \tilde{\mathbb{R}})$ et la cohomologie à support compact $H^*_c(X_W, \tilde{\mathbb{R}})$, où $\tilde{\mathbb{R}}$ est le faisceau associé au groupe $\mathbb{R}$ muni de la topologie standard. Ces espaces vectoriels réels sont de dimensions finies, nuls en degrés $> 2 \cdot \dim(X)$. On prouve le résultat suivant.

Théorème 3.34. *([**15**] Theorems 7.1, 8.1, 8.2) Soit X un schéma régulier et propre sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. *Pour tout $\overline{X}$-schéma étale $\overline{U}$ le morphisme $\mathfrak{f}_{\overline{U}} : \overline{U}_W \to B_{\mathbb{R}}$ induit un quasi-isomorphisme*

$$R\Gamma(B_{\mathbb{R}}, \tilde{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\overline{U}_W, \tilde{\mathbb{R}}).$$

On a un quasi-isomorphisme

$$R\Gamma_c(X_W, \tilde{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(X_{et}, \mathbb{R}) \oplus R\Gamma_c(X_{et}, \mathbb{R})[-1]$$

et un triangle distingué

$$R\Gamma_c(X_{et}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}[0] \to R\Gamma(G_{\mathbb{R}}, R\Gamma(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}).$$

Le cup-produit avec la classe $\theta_{\overline{X}} \in H^1(\overline{X}_W, \tilde{\mathbb{R}})$ définit un morphisme

$$R\Gamma_c(X_W, \tilde{\mathbb{R}}) \to R\Gamma_c(X_W, \tilde{\mathbb{R}})[1]$$

qui s'identifie au morphisme composé

$$R\Gamma_c(X_{et}, \mathbb{R}) \oplus R\Gamma_c(X_{et}, \mathbb{R})[-1] \to R\Gamma_c(X_{et}, \mathbb{R}) \to R\Gamma_c(X_{et}, \mathbb{R})[1] \oplus R\Gamma_c(X_{et}, \mathbb{R})$$

obtenu en composant la projection et l'inclusion évidentes. En particulier, la suite

$$\cdots \stackrel{\cup\theta}{\to} H^{i-1}_c(X_W, \tilde{\mathbb{R}}) \stackrel{\cup\theta}{\to} H^i_c(X_W, \tilde{\mathbb{R}}) \stackrel{\cup\theta}{\to} H^{i+1}_c(X_W, \tilde{\mathbb{R}}) \stackrel{\cup\theta}{\to} \cdots$$

est un complexe borné acyclique. On a de plus

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \cdot \dim_{\mathbb{R}} H^i_c(X_W, \tilde{\mathbb{R}}) = 0.$$

On considère la fibre générique $X_{\mathbb{Q}}$ du schéma arithmétique X. La fonction $L(h^i(X_{\mathbb{Q}}), s)$ du motif $h^i(X_{\mathbb{Q}})$, et on pose

$$\Lambda(h^i(X_{\mathbb{Q}}), s) := L(h^i(X_{\mathbb{Q}}), s) \cdot L_\infty(h^i(X_{\mathbb{Q}}), s)$$

où $L_\infty(h^i(X_{\mathbb{Q}}),s)$ est définie comme en (4). Il est conjecturé que les fonctions $\Lambda(h^i(X_{\mathbb{Q}}),s)$ admettent un prolongement méromorphe dans tout le plan complexe, et qu'elles satisfont une équation fonctionnelle de la forme

$$\Lambda(h^i(X_{\mathbb{Q}}),s)=\epsilon(h^i(X_{\mathbb{Q}}),s)\cdot\Lambda(h^{2(d-1)-i}(X_{\mathbb{Q}}),d-s) \tag{11}$$

où $\epsilon(h^i(X_{\mathbb{Q}}),s)=A\cdot B^s$.

Théorème 3.35. *([**15**] Theorem 9.1) Soit X un schéma régulier et propre sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$*. Si les fonctions $\Lambda(h^i(X_{\mathbb{Q}}),s)$ satisfont l'équation fonctionnelle (11), alors*

$$\mathrm{ord}_{s=0}\zeta(X,s)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\cdot i\cdot\dim_{\mathbb{R}}H^i_c(X_W,\tilde{\mathbb{R}}).$$

On note cependant que les groupes de cohomologie $H^i(\overline{X}_W,\mathbb{Z})$ et $H^i_c(X_W,\mathbb{Z})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ explosent en degrés $i\geq 3$ pairs.

9. Analogie avec le système dynamique de Deninger

On se restreint pour simplifier au cas des anneaux d'entiers de corps de nombres $\overline{X}=\overline{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)}$.

9.1. Le système dynamique $\mathrm{M}_{\overline{X}}$ imaginé par C. Deninger devrait avoir (voir [**11**] Section 2) les propriétés suivantes :
— $\mathrm{M}_{\overline{X}}$ est muni d'une action continue du groupe topologique $\mathbb{R}$;
— chaque place ultramétrique $\mathfrak{p}$ de F doit correspondre à une $\mathbb{R}$-orbite fermée de longueur $\log(N(\mathfrak{p}))$, i. e. à une immersion fermée

$$\mathbb{R}/\log(N(\mathfrak{p}))\cdot\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathrm{M}_{\overline{X}}$$

$\mathbb{R}$-équivariante, où $\mathbb{R}$ opère sur $\mathbb{R}/\log(N(\mathfrak{p}))\cdot\mathbb{Z}$ par translations à gauche ;
— chaque place archimédienne $\mathfrak{p}|\infty$ de F doit correspondre à un point fixe $x_{\mathfrak{p}}\in\mathrm{M}_{\overline{X}}$ sous l'action de $\mathbb{R}$.

Dans la mesure où un topos est une généralisation d'un espace topologique, le topos Weil-étale $\overline{X}_W$ possède ces trois propriétés. En effet, le morphisme

$$\mathfrak{f}_{\overline{X}}:\overline{X}_W\longrightarrow B_{\mathbb{R}}$$

traduit le fait que $\overline{X}_W$ est un "espace généralisé" muni d'une $\mathbb{R}$-action. Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont des espaces généralisés munis de $\mathbb{R}$-actions, i.e. des $B_{\mathbb{R}}$-topos, alors un morphisme $\mathbb{R}$-équivariant $\mathcal{S}\to\mathcal{S}'$ est simplement un morphisme de $B_{\mathbb{R}}$-topos. Un isomorphisme (resp. une immersion fermée, resp. une immersion ouverte) $\mathbb{R}$-équivariant $\mathcal{S}\tilde{\to}\mathcal{S}'$ est simplement une équivalence (resp. une immersion fermée, resp. une immersion ouverte) de $B_{\mathbb{R}}$-topos. Le topos classifiant $B_{\mathbb{R}}$ est le topos associé au point muni de l'action triviale de $\mathbb{R}$. Un point fixe de $\mathcal{S}$ sous l'action de $\mathbb{R}$ est une immersion fermée $B_{\mathbb{R}}\to\mathcal{S}$ qui est une section du morphisme de structure $\mathcal{S}\to B_{\mathbb{R}}$.

Si $\mathfrak{p}$ est une place ultramétrique de F, on note $\mathbb{M}_{\mathfrak{p}}$ l'espace $\mathbb{R}/\log(N(\mathfrak{p}))\mathbb{Z}$ muni de son action de $\mathbb{R}$ par translation, et on note $\mathbf{Sh}(\mathbb{R},\mathbb{M}_{\mathfrak{p}})$ le topos des gros faisceaux $\mathbb{R}$-équivariants sur $\mathbb{M}_{\mathfrak{p}}$. Par définition, on a $\mathbf{Sh}(\mathbb{R},\mathbb{M}_{\mathfrak{p}}):=B_{\mathbb{R}}/y(\mathbb{R},\mathbb{M}_{\mathfrak{p}})$, où $y(\mathbb{R},\mathbb{M}_{\mathfrak{p}})$ est l'objet de $B_{\mathbb{R}}$ représenté par l'action de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{M}_{\mathfrak{p}}=\mathbb{R}/\log(N(\mathfrak{p}))\mathbb{Z}$. La $\mathbb{R}$-action sur $\mathbb{M}_{\mathfrak{p}}$ se traduit par le morphisme de localisation

$$f_{\mathfrak{p}}:\mathbf{Sh}(\mathbb{R},\mathbb{M}_{\mathfrak{p}}):=B_{\mathbb{R}}/y(\mathbb{R},\mathbb{M}_{\mathfrak{p}})\longrightarrow B_{\mathbb{R}}.$$

On a alors une équivalence de $B_{\mathbb{R}}$-topos

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Sh}(\mathbb{R}, \mathbb{M}_{\mathfrak{p}}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "f_{\mathfrak{p}}"'] & \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})_W \arrow[d, "\mathfrak{f}\circ i_{\mathfrak{p}}"] \\ & B_{\mathbb{R}} \end{tikzcd}$$

Dans ce language, le théorème 3.22 et la proposition 3.23 se reformulent de la manière suivante.

Proposition 3.36. *Le topos $\overline{X}_W$ est défini au-dessus de $B_{\mathbb{R}}$. Pour toute place ultramétrique $\mathfrak{p}$ de F, on a une immersion fermée $\mathbb{R}$-équivariante*

$$i_{\mathfrak{p}} : \mathbf{Sh}(\mathbb{R}, \mathbb{M}_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow \overline{X}_W,$$

c'est à dire une $\mathbb{R}$-orbite fermée de longueur $\log(N(\mathfrak{p}))$ dans $\overline{X}_W$. Pour toute place archimédienne $\mathfrak{p}$ de F, on a une immersion fermée $\mathbb{R}$-équivariante

$$i_{\mathfrak{p}} : \mathbf{Sh}(\mathbb{R}, x_{\mathfrak{p}}) = B_{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{X}_W,$$

c'est à dire un point de $\overline{X}_W$ fixe sous l'action de $\mathbb{R}$.

9.2. Facteurs locaux des fonctions zêta de Dedekind. Dans cette section, on reformule deux résultats de C. Deninger en termes Weil-étales.

9.2.1. *Facteurs locaux ultramétriques.* (Cette section est basée sur une remarque de M. Flach).

On peut remplacer la catégorie Top des espaces topologiques localement compacts dans ce qui précède par la catégorie Sm des variétés différentiables $\mathcal{C}^{\infty}$. On considère alors $\mathbb{R}$ comme un groupe de Lie. On note $\mathcal{T}^{\infty}$ et $B_{\mathbb{R}}^{\infty}$ les topos obtenus. On note aussi $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})_W^{\infty} := B_{W_{\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}}}^{\infty}$ le topos des objets de $\mathcal{T}^{\infty}$ munis d'une $W_{\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}}$-action. Alors le morphisme canonique $W_{\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}} \to \mathbb{R}$ induit le morphisme (voir Proposition 3.23)

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})_W^{\infty} \longrightarrow B_{\mathbb{R}}^{\infty}.$$

Soit maintenant $f_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to B_{\mathbb{R}}^{\infty}$ un $B_{\mathbb{R}}^{\infty}$-topos. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur $\mathcal{S}$. Le complexe $Rf_{\mathcal{S},*}\mathcal{F}$ est un complexe de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur $\mathcal{T}^{\infty}$ muni d'une $\mathbb{R}$-action. En évaluant $R(f_{\mathcal{S},*})\mathcal{F}$ sur le point $\{*\}$, i.e. sur l'objet final de $\mathcal{T}^{\infty}$, on obtient le complexe

$$R\Gamma_{\mathrm{dyn}}(\mathcal{S}, \mathcal{F}) := (R(f_{\mathcal{S},*})\mathcal{F})(\{*\})$$

de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels munis de $\mathbb{R}$-actions. On note encore $\tilde{\mathbb{C}}$ le faisceau de $\mathbb{C}$-vectoriels de $B_{\mathbb{R}}^{\infty}$ représenté par $\mathbb{C}$ muni de la $\mathbb{R}$-action triviale. Son image inverse le long de $f_{\mathcal{S}}$ définit un faisceau de $\mathbb{C}$-vectoriels sur $\mathcal{S}$ que l'on note encore $\tilde{\mathbb{C}}$. On peut donc considérer $R\Gamma_{\mathrm{dyn}}(\mathcal{S}, \tilde{\mathbb{C}})$.

Théorème 3.37. *(Deninger) Le complexe $R\Gamma_{\mathrm{dyn}}(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})_W^{\infty}, \tilde{\mathbb{C}})$ est concentré en degré 0, et on a*

$$R\Gamma_{\mathrm{dyn}}(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})_W^{\infty}, \tilde{\mathbb{C}}) \simeq \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{M}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{C})[0]$$

où $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{M}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{C})$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^{\infty}$ à valeurs complexes sur $\mathbb{M}_{\mathfrak{p}}$ muni de la $\mathbb{R}$-action induite par celle définie sur $\mathbb{M}_{\mathfrak{p}}$. L'opérateur infinitésimal Θ de cette action est donc l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dx}$, et on a

$$\zeta(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}), s) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \det{}_{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}(\Theta - s \cdot \mathrm{Id}) \mid H^i_{\mathrm{dyn}}(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})_W^{\infty}, \tilde{\mathbb{C}}) \right)^{(-1)^{i+1}}.$$

On donne la preuve de la première affirmation ci-dessous, car elle n'est pas disponible dans la littérature. La deuxième affirmation est due à C. Deninger.

Démonstration. Soit M un objet de Sm muni d'une $\mathbb{R}$-action $\mathcal{C}^\infty$. Par le plongement de Yoneda, cette action définit un objet $y(\mathbb{R}, M)$ de $B_{\mathbb{R}}^\infty$ et on note $\mathbf{Sh}^\infty(\mathbb{R}, M) := B_{\mathbb{R}}^\infty / y(\mathbb{R}, M)$ le topos des "gros faisceaux $\mathbb{R}$-équivariants $\mathcal{C}^\infty$ sur M". Alors le morphisme

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})_W^\infty \longrightarrow B_{\mathbb{R}}^\infty$$

s'identifie à

$$f_{\mathfrak{p}} : \mathbf{Sh}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{M}_{\mathfrak{p}}) := B_{\mathbb{R}}^\infty / y(\mathbb{R}, \mathbb{M}_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow B_{\mathbb{R}}^\infty$$

où $\mathbb{M}_{\mathfrak{p}} := \mathbb{R}/\log(N(\mathfrak{p})) \cdot \mathbb{Z}$ est muni de sa $\mathbb{R}$-action. On considère le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}^\infty/\mathbb{M}_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{g_{\mathfrak{p}}} & \mathcal{T}^\infty \\ \downarrow q & & \downarrow p \\ \mathbf{Sh}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{M}_{\mathfrak{p}}) & \xrightarrow{f_{\mathfrak{p}}} & B_{\mathbb{R}}^\infty \end{array}$$

où tous les morphismes sont des morphismes de localisation. Il suit que $p^* R(f_{\mathfrak{p},*}) \simeq R(g_{\mathfrak{p},*}) q^*$. On obtient $p^* R(f_{\mathfrak{p},*}) f_{\mathfrak{p}}^* \tilde{\mathbb{C}} \simeq R(g_{\mathfrak{p},*}) g_{\mathfrak{p}}^* \tilde{\mathbb{C}}$, où p^* est le foncteur "oubli de la $\mathbb{R}$-action". De plus, $g_{\mathfrak{p}}^* \tilde{\mathbb{C}} = \mathcal{C}^\infty(-, \mathbb{C})$ est le faisceau des fonctions complexes $\mathcal{C}^\infty$, i.e.

$$g_{\mathfrak{p}}^* \tilde{\mathbb{C}}(M \to \mathbb{M}_q) \simeq \tilde{\mathbb{C}}(M) = \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C}).$$

Comme le faisceau $\mathcal{C}^\infty(-, \mathbb{C})$ est acyclique pour le foncteur des section globales, on en déduit la première affirmation. Le spectre de l'opérateur $\Theta = \frac{d}{dx}$ sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{C})$ est $\frac{2\pi i}{\log(N(\mathfrak{p}))} \cdot \mathbb{Z}$ où toutes les valeurs propres sont simples. On obtient le résultat grâce à ([**5**] Proposition 2.3). $\square$

9.2.2. *Groupes de Weil archimédiens et facteurs Gamma.* Soit $\mathfrak{p}$ une place archimédienne du corps de nombres F. On a donc $F_{\mathfrak{p}} = \mathbb{R}$ ou $F_{\mathfrak{p}} = \mathbb{C}$. Soit $W_{F_{\mathfrak{p}}}$ le groupe de Weil correspondant et soit $B_{W_{F_{\mathfrak{p}}}}$ son espace classifiant. On considère la cohomologie $H^*(B_{W_{F_{\mathfrak{p}}}}, \mathbb{R})$ à coefficients dans le groupe abélien *discret* $\mathbb{R}$. Cette cohomologie possède une structure de Hodge qui induit une $\mathbb{R}$-action, dont on note Θ le générateur infinitésimal. Le résultat suivant est une reformulation de ([**4**] Proposition 2.1).

Théorème 3.38. [**49**] *Quelle que soit $\mathfrak{p} \mid \infty$, on a*

$$\zeta_{F_{\mathfrak{p}}}(s) = \det{}_\infty \left(\frac{1}{2\pi}(\Theta - s \cdot \mathrm{Id}) \mid H_*(B_{W_{F_{\mathfrak{p}}}}, \mathbb{R}) \right)^{-1}$$

où $\zeta_{F_{\mathfrak{p}}}(s)$ désigne le facteur Gamma correspondant.

On remarque que la $\mathbb{R}$-action sur $H_*(B_{W_{F_{\mathfrak{p}}}}, \mathbb{R})$ est définie par la structure de Hodge, et non pas par le morphisme $B_{W_{F_{\mathfrak{p}}}} \to B_{\mathbb{R}}$ (qui induirait l'action triviale).

Chapitre 4

Valeurs zêta des schémas arithmétiques en $s = 0$

Les théorèmes 3.34 et 3.35 montrent que la cohomologie du topos Weil-étale à coefficients réels est raisonnable, i.e. elle satisfait la conjecture 2.2(3), ainsi que la conjecture 2.2(4) au moins pour les schémas propres réguliers dont les fonctions L de la fibre générique satisfont le prolongement méromorphe et l'équation fonctionnelle. Cependant, la cohomologie du topos Weil-étale à coefficients entiers est pathologique en degrés $i \geq 4$. On donne dans ce chapitre une définition *conditionnelle* de la "bonne" cohomologie Weil-étale à coefficients entiers, sans définir de topos (ni un quelconque objet géométrique) sous-jacent.

1. Les complexes de cycles de Bloch

Pour un schéma régulier X et un entier $n \geq 0$, on note $\mathbb{Z}(n)(X) := z^n(X, 2n - *)$ le complexe de cycles de Bloch, pour lequel on renvoie à [**2**], [**19**], [**21**], [**23**], [**34**] et [**35**]. Ce complexe est contravariant pour les morphismes plats, et définit un complexe de faisceaux $\mathbb{Z}(n)$ sur le petit site étale de X. On a $\mathbb{Z}(0) \simeq \mathbb{Z}[0]$ et $\mathbb{Z}(1) \simeq \mathbb{G}_m[-1]$, où $\mathbb{Z}[0]$ est le faisceau étale constant $\mathbb{Z}$ placé en degré 0 et $\mathbb{G}_m[-1]$ est le faisceau du groupe multiplicatif placé en degré 1. Si A est un groupe abélien, on pose $A(n) := \mathbb{Z}(n) \otimes_{\mathbb{Z}} A$. On note $H^i(X_{et}, A(n))$ (resp. $H^i(X, A(n)))$ l'hypercohomologie pour la topologie étale (resp. pour la topologie de Zariski) à coefficients dans le complexe $A(n)$.

Conjecture 4.1. *Si X est régulier, propre et de dimension pure d, alors les groupes d'hypercohomologie étale $H^i(X_{et}, \mathbb{Z}(d))$ sont de type fini pour $0 \leq i \leq 2d$.*

On définit dans [**48**] une classe $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$ de schémas arithmétiques contenant les schémas géométriquement cellulaires, et certaines variétés sur les corps finis (entre autres les produits de courbes et les variétés abéliennes). On montre (voir [**48**] Proposition 5.10) que les schémas de $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$ satisfont la conjecture 4.1. Ce résultat est basé sur la génération finie et le calcul du rang de la K-théorie des anneaux d'entiers [**3**], la suite spectrale motivique [**34**]

$$H^p(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F), \mathbb{Z}(-q/2)) \Longrightarrow K_{-p-q}(\mathcal{O}_F)$$

ainsi que sur un résultat de pureté étale pour le complexe de Bloch démontré par Geisser dans [**23**] à partir de la conjecture de Bloch-Kato.

2. Les complexes Weil-étales

Si X est séparé de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, on considère l'espace topologique quotient $X_\infty := X(\mathbb{C})/G_{\mathbb{R}}$ où $X(\mathbb{C})$ est muni de la topologie complexe, et on pose $\overline{X} := (X, X_\infty)$. On note $\overline{X}_{et}$ le topos étale d'Artin-Verdier. On a un plongement fermé $u_\infty : \mathrm{Sh}(X_\infty) \to \overline{X}_{et}$, où $\mathrm{Sh}(X_\infty)$ est le topos des faisceaux sur X_∞. Le topos Weil-étale $X_{\infty,W} \simeq \mathrm{Sh}(X_\infty) \times B_{\mathbb{R}}$ au-dessus de la place archimédienne doit être vu comme l'espace topologique X_∞ muni de l'action triviale du groupe topologique $\mathbb{R}$. On montre le résultat suivant.

Théorème 4.2. *([**48**], Theorem 1.3) Soit X un schéma régulier et propre sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. *Supposons que $X \in \mathcal{L}(\mathbb{Z})$, ou plus généralement que les composantes connexes de X satisfont la conjecture 4.1. Alors il existe des complexes $R\Gamma_W(\overline{X}, \mathbb{Z})$ et $R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z})$, dans la catégorie dérivée des groupes abéliens, tels que les assertions suivantes soient vraies.*

— *Si X est de dimension pure d, on a un triangle distingué*

$$R\mathrm{Hom}(\tau^{\geq 0} R\Gamma(X, \mathbb{Q}(d)), \mathbb{Q}[-2d-2]) \to R\Gamma(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}) \to R\Gamma_W(\overline{X}, \mathbb{Z}) \to . \tag{12}$$

— *Le complexe $R\Gamma_W(\overline{X}, \mathbb{Z})$ est fonctoriel.*

— *Il existe un unique morphisme $i_\infty^* : R\Gamma_W(\overline{X}, \mathbb{Z}) \to R\Gamma(X_{\infty,W}, \mathbb{Z})$ tel que le carré suivant commute.*

$$\begin{tikzcd} R\Gamma(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "u_\infty^*"] & R\Gamma_W(\overline{X}, \mathbb{Z}) \arrow[d, "i_\infty^*"] \\ R\Gamma(X_\infty, \mathbb{Z}) \arrow[r] & R\Gamma(X_{\infty,W}, \mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

On définit $R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z})$ de sorte que l'on ait un triangle distingué

$$R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}) \to R\Gamma_W(\overline{X}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_\infty^*} R\Gamma(X_{\infty,W}, \mathbb{Z}) \to . \tag{13}$$

— *Les groupes de cohomologie $H^i_W(\overline{X}, \mathbb{Z})$ et $H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z})$ sont de type fini pour tout i et nuls pour $i < 0$ et $i > 2d + 1$.*

— *Les groupes de cohomologie $H^i_W(\overline{X}, \mathbb{Z})$ forment un modèle entier pour la cohomologie l-adique : pour tout nombre premier l et tout $i \in \mathbb{Z}$ on a un isomorphisme canonique*

$$H^i_W(\overline{X}, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_l \simeq H^i(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}_l).$$

— *Si X est de caractéristique p alors on a un isomorphisme canonique*

$$R\Gamma(X_W, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_W(X, \mathbb{Z})$$

où $R\Gamma(X_W, \mathbb{Z})$ est la cohomologie du topos Weil-étale.

— *Si $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$ est le spectre de l'anneau d'entiers d'un corps de nombres totalement imaginaire, alors on a un isomorphisme canonique*

$$R\Gamma_W(\overline{X}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \tau^{\leq 3} R\Gamma(\overline{X}_W, \mathbb{Z})$$

où $\tau^{\leq 3} R\Gamma(\overline{X}_W, \mathbb{Z})$ est le complexe tronqué du complexe défini dans [**39**].

Le triangle distingué (12) ci-dessus a été suggéré par, et généralise, les triangles distingués (6) et (10). On explique maintenant la définition de $R\Gamma_W(\overline{X}, \mathbb{Z})$ et la preuve du résultat précédent. Le complexe Weil-étale $R\Gamma_W(\overline{X}, \mathbb{Z})$ est défini comme le cône d'une flèche

$$\alpha_X : R\mathrm{Hom}(\tau^{\geq 0} R\Gamma(X, \mathbb{Q}(d)), \mathbb{Q}[-2d-2]) \longrightarrow R\Gamma(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}),$$

où α_X est défini par dualité étale. Cette construction est analogue à celle du groupe de Weil, qui est défini comme la limite projective des extensions des groupes de Galois $G_{E/F}$ par les groupes de classes d'idèles C_E, cette extension étant elle-même définie par la théorie du corps de classes.

Précisons comment α_X est défini. Si $X(\mathbb{R}) = \emptyset$, un théorème de Geisser [**23**] donne une dualité parfaite

$$H^i(X_{et}, \mathbb{Z}/m) \times H^{2d+1-i}(X_{et}, \mathbb{Z}/m(d)) \to H^{2d+1}(X_{et}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d)) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

de groupes abéliens finis, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et tout entier $m > 0$. Si $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, ce résultat n'est vrai qu'à la 2-torsion près. Pour remédier à ce problème, on étend le complexe dualisant $\mathbb{Z}(d)$

sur $\overline{X}_{et}$ en considérant $\mathbb{Z}(d)^{\overline{X}} := \tau^{\leq 2d} R\varphi_* \mathbb{Z}(d)$. On note $\mathbb{Z}(d)^{\overline{X}}$ simplement par $\mathbb{Z}(d)$. Alors on peut déduire de [**23**] une dualité parfaite de groupes abéliens finis :

$$H^i(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}/m) \times H^{2d+1-i}(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}/m(d)) \to H^{2d+1}(\overline{X}_{et}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d)) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Si X satisfait la conjecture de génération finie 4.1, on peut en déduire un isomorphisme

$$H^i(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(H^{2d+2-i}(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}(d))_{\geq 0}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

pour tout $i \geq 1$, où $H^j(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}(d))_{\geq 0} := 0$ pour $j < 0$ et $H^j(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}(d))_{\geq 0} := H^j(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}(d))$ pour $j \geq 0$. En particulier, $H^i(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z})$ n'est en général pas de type fini, mais de co-type fini (i.e. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-dual d'un groupe abélien de type fini) pour $i \geq 2$. On définit le morphisme $H^i(\alpha_X)$ comme la composition

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(H^{2d+2-i}(X, \mathbb{Q}(d))_{\geq 0}, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(H^{2d+2-i}(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}(d))_{\geq 0}, \mathbb{Q}) \\ & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(H^{2d+2-i}(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}(d))_{\geq 0}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ & \xleftarrow{\sim} & H^i(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}). \end{array}$$

On remarque alors qu'il existe un unique morphisme α_X dans la catégorie dérivée induisant les morphismes $H^i(\alpha_X)$ sur la cohomologie. Soit maintenant $R\Gamma_W(\overline{X}, \mathbb{Z})$ un objet de la catégorie dérivée muni du triangle (12). Ce triangle induit une suite exacte

$$0 \to H^i(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z})_{\mathrm{codiv}} \to H^i_W(\overline{X}, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(H^{2d+1-i}(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}(d))_{\geq 0}, \mathbb{Z}) \to 0$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$, où $H^i(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z})_{\mathrm{codiv}}$ désigne le quotient du groupe de co-type fini $H^i(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z})$ par son sous-groupe divisible maximal. Sous la conjecture 4.1, les groupes abéliens $H^i_W(\overline{X}, \mathbb{Z})$ sont donc de type fini, et nuls pour $i < 0$ et $i > 2d+1$. On montre alors facilement qu'un objet de la catégorie dérivée $R\Gamma_W(\overline{X}, \mathbb{Z})$ muni du triangle (12) est défini à un isomorphisme unique près. On montre aussi que le morphisme α_X est fonctoriel en X, et donc que $R\Gamma_W(\overline{X}, \mathbb{Z})$ l'est aussi.

Pour définir le morphisme i_∞^*, il faut voir que le morphisme

$$R\mathrm{Hom}(\tau^{\geq 0} R\Gamma(X, \mathbb{Q}(d)), \mathbb{Q}[-2d-2]) \xrightarrow{\alpha_X} R\Gamma(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{u_\infty^*} R\Gamma(X_\infty, \mathbb{Z})$$

est nul. C'est une conséquence des conjectures de Weil. En effet, si p est un premier $\neq l$ au-dessus duquel X a bonne réduction, alors $H^i(X_{\overline{\mathbb{F}}_p, et}, \mathbb{Q}_l)$ est de poids i, et n'a donc pas d'élément invariant sous l'action du Frobenius pour $i \geq 1$. On peut en déduire que le sous-groupe divisible maximal $\left(H^i(X_{\overline{\mathbb{Q}}, et}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{G_\mathbb{Q}}\right)_{div}$ de $H^i(X_{\overline{\mathbb{Q}}, et}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{G_\mathbb{Q}}$ est trivial pour $i \geq 1$. Il suit que $u_\infty^* \circ \alpha_X = 0$, et donc que i_∞^* existe. On montre alors que i_∞^* est uniquement déterminé dans la catégorie dérivée, par l'argument qui garantit le fait que $R\Gamma(\overline{X}_\infty, \mathbb{Z})$ est défini à un isomorphisme canonique près. Il existe donc un objet $R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z})$ tel que l'on ait un triangle distingué (13). Cependant, $R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z})$ n'est défini qu'à isomorphisme non-canonique près.

En appliquant au triangle (12) le foncteur de complétion l-adique $(-)\widehat{\otimes}\mathbb{Z}_l$, au sens dérivé, on obtient un isomorphisme

$$R\Gamma(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}_l) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z})\widehat{\otimes}\mathbb{Z}_l \xrightarrow{\sim} R\Gamma_W(\overline{X}, \mathbb{Z})\widehat{\otimes}\mathbb{Z}_l.$$

Comme le complexe $R\Gamma_W(\overline{X}, \mathbb{Z})$ est parfait, on a des isomorphismes

$$H^i(R\Gamma_W(\overline{X}, \mathbb{Z})\widehat{\otimes}\mathbb{Z}_l) \simeq H^i_W(\overline{X}, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_l$$

où $(-) \otimes \mathbb{Z}_l$ est le produit tensoriel naïf. Il suit que $H^*_W(\overline{X}, \mathbb{Z})$ est un modèle entier pour la cohomologie l-adique.

Soit maintenant X une variété sur un corps fini. Les deux complexes $R\Gamma(X_W, \mathbb{Z})$ et $R\Gamma_W(X, \mathbb{Z})$ sont définis de deux manières différentes. Le complexe $R\Gamma(X_W, \mathbb{Z})$, qui est le complexe de cohomologie du topos Weil-étale, est le cône du morphisme

$$R\Gamma(X_{et}, \mathbb{Q})[-2] \xrightarrow{a_X} R\Gamma(X_{et}, \mathbb{Z})$$

alors que $R\Gamma_W(X, \mathbb{Z})$ est défini comme le cône du morphisme α_X. On montre que l'on a un quasi-isomorphisme canonique

$$R\Gamma(X_{et}, \mathbb{Q})[-2] \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}(\tau^{\geq 0} R\Gamma(X, \mathbb{Q}(d)), \mathbb{Q}[-2d-2])$$

rendant commutatif le carré qu'on imagine. On obtient un unique isomorphisme dans la catégorie dérivée

$$R\Gamma(X_W, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_W(X, \mathbb{Z})$$

induisant un isomorphisme de triangles distingués.

Si maintenant $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$ où F est un corps de nombres totalement imaginaire, on montre que le triangle (12) est isomorphe au triangle (10). On en déduit

$$R\Gamma_W(\overline{X}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\overline{X}_{et}, \tau^{\leq 2} R\gamma_* \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \tau^{\leq 3} R\Gamma(\overline{X}_{et}, R\gamma_* \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \tau^{\leq 3} R\Gamma(\overline{X}_W, \mathbb{Z}).$$

Remarque 4.3. *Pour les variétés propres lisses Y sur un corps fini, on a donc deux définitions pour la cohomologie Weil-étale, données par $R\Gamma(Y_W, \mathbb{Z}) := \mathrm{Cone}(a_Y)$ et $R\Gamma_W(Y, \mathbb{Z}) := \mathrm{Cone}(\alpha_Y)$. Parmi ces deux définitions, seule la deuxième se généralise aux schémas plats sur $\mathbb{Z}$. En effet, prenons le cas d'un corps de nombres $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$. L'analogue du morphisme α_Y ci-dessus est*

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_F^\times, \mathbb{Q})[-3] \longrightarrow R\Gamma(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}),$$

qui est bien défini, et qui s'obtient d'ailleurs à partir du topos Weil-étale $\overline{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)}_W$. L'analogue du morphisme a_Y ci-dessus serait un morphisme

$$R\Gamma_c(X_{et}, \mathbb{Q})[-2] \xrightarrow{?} R\Gamma(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}).$$

Mais il n'existe pas de choix canonique pour un tel morphisme ; on a bien un quasi-isomorphisme canonique

$$\left((\prod_{\mathfrak{p} \in X_\infty} \mathbb{R})/\mathbb{R} \right)[-3] \simeq R\Gamma_c(X_{et}, \mathbb{R})[-2] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_F^\times, \mathbb{R})[-3],$$

induit par le régulateur, mais ce morphisme n'est pas rationnel.

3. Fonctions zêta en $s = 0$.

On rappelle que le théorème 3.34 donne une décomposition en somme directe

$$R\Gamma_c(X_W, \tilde{\mathbb{R}}) \simeq R\Gamma_c(X_{et}, \mathbb{R}) \oplus R\Gamma_c(X_{et}, \mathbb{R})[-1],$$

où X_W est le topos Weil-étale, et un triangle distingué

$$R\Gamma_c(X_{et}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}[0] \to R\Gamma(G_{\mathbb{R}}, R\Gamma(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}).$$

Le cup-produit avec la classe $\theta_{\overline{X}} \in H^1(\overline{X}_W, \tilde{\mathbb{R}})$ définit un morphisme

$$R\Gamma_c(X_W, \tilde{\mathbb{R}}) \to R\Gamma_c(X_W, \tilde{\mathbb{R}})[1]$$

qui s'identifie au morphisme composé

$$R\Gamma_c(X_{et},\mathbb{R})\oplus R\Gamma_c(X_{et},\mathbb{R})[-1]\rightarrow R\Gamma_c(X_{et},\mathbb{R})\rightarrow R\Gamma_c(X_{et},\mathbb{R})[1]\oplus R\Gamma_c(X_{et},\mathbb{R})$$

obtenu en composant la projection et l'inclusion évidentes. En particulier, la suite

$$(14)\qquad \cdots\stackrel{\cup\theta}{\rightarrow} H_c^{i-1}(X_W,\tilde{\mathbb{R}})\stackrel{\cup\theta}{\rightarrow} H_c^{i}(X_W,\tilde{\mathbb{R}})\stackrel{\cup\theta}{\rightarrow} H_c^{i+1}(X_W,\tilde{\mathbb{R}})\stackrel{\cup\theta}{\rightarrow}\cdots$$

est un complexe borné acyclique.

On peut *choisir* dans la catégorie dérivée un objet $R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{R}$ muni du triangle (13), ainsi qu'un isomorphisme

$$(15)\qquad R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{R}\simeq R\Gamma_c(X_{et},\mathbb{R})\oplus R\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\tau_{\geq 0}R\Gamma(X,\mathbb{R}(d)),\mathbb{R}[-2d-1]).$$

compatible au triangle (13) en un certain sens. Une fois ces choix faits, la définition de la flèche

$$(16)\qquad R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{R}\rightarrow R\Gamma_c(X_W,\tilde{\mathbb{R}})$$

nécessite la conjecture suivante de Beilinson. On rappelle la définition de la cohomologie de Deligne :

$$R\Gamma_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}},\mathbb{R}(n)):=R\Gamma(G_{\mathbb{R}},X(\mathbb{C}),\mathbb{R}(n)_{\mathcal{D}}),$$

où $\mathbb{R}(n)_{\mathcal{D}}$ est le complexe de faisceaux $G_{\mathbb{R}}$-équivariants sur $X(\mathbb{C})$ concentré en degrés $[0,n]$

$$(2i\pi)^n\mathbb{R}\rightarrow\Omega^1_{X(\mathbb{C})/\mathbb{C}}\rightarrow\cdots\rightarrow\Omega^{n-1}_{X(\mathbb{C})/\mathbb{C}}$$

où $\Omega^i_{X(\mathbb{C})/\mathbb{C}}$ est le faisceau des i-formes différentielles holomorphes sur la variété analytique complexe $X(\mathbb{C})$. On peut voir le complexe $\mathbb{R}(n)_{\mathcal{D}}$ comme un "pull-back homotopique" $(2i\pi)^n\mathbb{R}\times^h_{\Omega^*_{X(\mathbb{C})/\mathbb{C}}} F^n\Omega^*_{X(\mathbb{C})/\mathbb{C}}$ mesurant de quelle manière la cohomologie de Betti se comporte vis à vis de la filtration de Hodge. On suppose que X est régulier, plat et propre sur $\mathbb{Z}$, et de dimension pure d.

Conjecture 4.4. *(Beilinson) Le régulateur*

$$H^{2d-1-i}(X,\mathbb{Q}(d))_{\mathbb{R}}\rightarrow H^{2d-1-i}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}},\mathbb{R}(d))$$

est un isomorphisme pour $i\geq 1$ et on a une suite exacte

$$0\rightarrow H^{2d-1}(X,\mathbb{Q}(d))_{\mathbb{R}}\rightarrow H^{2d-1}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}},\mathbb{R}(d))\rightarrow CH^0(X_{\mathbb{Q}})^*_{\mathbb{R}}\rightarrow 0.$$

La conjecture 4.4 et la dualité pour la cohomologie de Deligne

$$H^i_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}},\mathbb{R}(0))\times H^{2d-1-i}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}},\mathbb{R}(d))\rightarrow H^{2d-1}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}},\mathbb{R}(d))\rightarrow\mathbb{R},$$

qui est une dualité parfaite entre espaces vectoriels réels de dimensions finies, fournissent un isomorphisme

$$(17)\qquad \mathrm{Reg}^*:R\Gamma_c(X_{et},\mathbb{R})\xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\tau^{\geq 0}R\Gamma(X,\mathbb{R}(d)),\mathbb{R}[-2d]).$$

En d'autres termes, Reg^* est la flèche duale du régulateur de Beilinson. On définit alors (16) de sorte que le carré suivant commute :

$$\begin{tikzcd} R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{R} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "(16)"] & R\Gamma_c(X_{et},\mathbb{R})\oplus R\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\tau^{\geq 0}R\Gamma(X,\mathbb{R}(d)),\mathbb{R}[-2d-1]) \arrow[d, "(1{,}(\mathrm{Reg}^*)^{-1}[-1])"] \\ R\Gamma_c(X_W,\tilde{\mathbb{R}}) \arrow[r, "\sim"] & R\Gamma_c(X_{et},\mathbb{R})\oplus R\Gamma_c(X_{et},\mathbb{R})[-1] \end{tikzcd}$$

Sous la conjecture 4.4, les choix de $R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z})$ et de (15) faits ci-dessus induisent

$$H^i_{W,c}(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{R}\xrightarrow{\sim} H^i_c(X_W,\mathbb{R})$$

et un isomorphisme

$$\left(\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}}\det{}_{\mathbb{Z}}H^i_{W,c}(X,\mathbb{Z})^{(-1)^i}\right)\otimes\mathbb{R}\xrightarrow{\sim}\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}}\det{}_{\mathbb{R}}H^i_c(X_W,\mathbb{R})^{(-1)^i}. \tag{18}$$

On peut montrer que $\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}}\det_{\mathbb{Z}}H^i_{W,c}(X,\mathbb{Z})^{(-1)^i}$ et l'isomorphisme (18) ne dépendent pas des choix de $R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z})$ et de (15) faits ci-dessus. On considère l'isomorphisme

$$\lambda:\mathbb{R}\xrightarrow{\sim}\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}}\det{}_{\mathbb{R}}H^i_c(X_W,\mathbb{R})^{(-1)^i}\xrightarrow{\sim}\left(\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}}\det{}_{\mathbb{Z}}H^i_{W,c}(X,\mathbb{Z})^{(-1)^i}\right)\otimes\mathbb{R},$$

où le premier isomorphisme est induit par (14), et le deuxième est l'inverse de (18).

Théorème 4.5. *([**48**], Theorem 1.5) Supposons que X satisfait les conjectures 4.1 et 4.4.*

- *Les assertions (1), (2) et (3) de la conjecture 2.2 sont vraies pour X. Plus précisément, les groupes abéliens $H^i_{W,c}(X,\mathbb{Z})$ sont de type fini pour tout $i\in\mathbb{Z}$, nuls pour $i<0$ et $i>2d+1$; on a un isomorphisme $H^i_{W,c}(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{R}\simeq H^i_c(X_W,\tilde{\mathbb{R}})$; et le cup-produit avec $\theta\in H^1(X_W,\tilde{\mathbb{R}})$ fournit le complexe borné acyclique (14).*
- *Supposons que X est projectif sur $\mathbb{Z}$. Alors l'assertion (4) de la conjecture 2.2, i.e. l'identité*
$$\mathrm{ord}_{s=0}\zeta(X,s)=\sum_{i\geq 0}(-1)^i\cdot i\cdot\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}H^i_{W,c}(X,\mathbb{Z}),$$
*est équivalente à la conjecture de Soulé [**59**] concernant l'ordre d'annulation de $\zeta(X,s)$ en $s=0$.*
- *Supposons que X est projectif lisse sur $\mathcal{O}_F$. Alors l'assertion (5) de la conjecture 2.2, i.e. l'identité*
$$\mathbb{Z}\cdot\lambda(\zeta^*(X,0)^{-1})=\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}}\det{}_{\mathbb{Z}}H^i_{W,c}(X,\mathbb{Z})^{(-1)^i},$$
*est équivalente à la conjonction pour tous les premier l de la conjecture de Bloch-Kato [**18**] pour le motif $\bigoplus_{i=0}^{2d-2}h^i(X_F)[-i]$ où $X_F:=X\otimes_{\mathcal{O}_F}F$.*

La première assertion du théorème 4.5 a été expliquée avant l'énoncé du théorème. La deuxième assertion est presque immédiate. En effet, elle s'obtient grâce à (15), (17) et à la reformulation due à S. Bloch [**2**] de la conjecture de C. Soulé [**59**] sous la forme suivante :

$$\mathrm{ord}_{s=0}\zeta(X,s)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^{i+1}\mathrm{dim}_{\mathbb{Q}}H^{2d-i}(X,\mathbb{Q}(d)).$$

La troisième assertion est le vrai contenu du théorème 4.5. On renvoie à ([**48**] Section 4.3) pour la preuve de ce résultat. On en déduit des exemples simples pour lesquels la conjecture 2.2 est vraie.

Corollaire 4.6. *([**48**], Theorem 1.6) Pour tout corps de nombres F, la conjecture 2.2 est vraie pour $X=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$.*

Soit X un schéma projectif lisse sur $\mathcal{O}_X(X)=\mathcal{O}_F$, où F est un corps de nombres abélien. Supposons que X_F admet une décomposition cellulaire lisse et que $X\in\mathcal{L}(\mathbb{Z})$. Alors la conjecture 2.2 est vraie pour X.

Pour illustrer la deuxième assertion de ce corollaire, on considère l'espace projectif $X = \mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_F}$, où $\mathcal{O}_F$ est l'anneau d'entiers d'un corps de nombres totalement imaginaire. D'après [**3**], $K_i(\mathcal{O}_F)$ est de type fini pour tout $i \geq 0$ et fini pour $i \neq 0$ pair. Les groupes de cohomologie Weil-étale $H^*_W(\overline{X}, \mathbb{Z})$ sont donnés par les identifications et suites exactes suivantes.

$$\begin{array}{rcl} H^i_W(\overline{X},\mathbb{Z}) & = & \mathbb{Z} \text{ pour } i=0, \\ & = & 0 \text{ for } i=1, \\ 0 \to Cl(F)^D \to H^2_W(\overline{X},\mathbb{Z}) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_F^\times,\mathbb{Z}) \to 0, \\ & = & \mu_F^D \text{ pour } i=3, \\ 0 \to K_2(\mathcal{O}_F)^D \to H^4_W(\overline{X},\mathbb{Z}) & \to & \mathrm{Hom}(K_3(\mathcal{O}_F),\mathbb{Z}) \to 0, \\ & = & (K_3(\mathcal{O}_F)_{tor})^D \text{ pour } i=5, \\ & ... & \\ 0 \to K_{2n}(\mathcal{O}_F)^D \to H^{2n+2}_W(\overline{X},\mathbb{Z}) & \to & \mathrm{Hom}(K_{2n+1}(\mathcal{O}_F),\mathbb{Z}) \to 0, \\ & = & (K_{2n+1}(\mathcal{O}_F)_{tor})^D \text{ pour } i=2n+3, \\ & = & 0 \text{ for } i > 2n+3. \end{array}$$

Le complexe acyclique

$$\cdots \xrightarrow{\cup\theta} H^i_{W,c}(X,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\cup\theta} H^{i+1}_{W,c}(X,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\cup\theta} \cdots$$

est canoniquelment isomorphe à

$$0 \longrightarrow (\prod_{F\hookrightarrow\mathbb{C}} \mathbb{R})^{G_\mathbb{R}}/\mathbb{R} \xrightarrow{r_1^*} \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_F^\times,\mathbb{R}) \xrightarrow{0} (\prod_{F\hookrightarrow\mathbb{C}} (2i\pi)^{-1}\mathbb{R})^{G_\mathbb{R}} \xrightarrow{r_2^*} \mathrm{Hom}(K_3(\mathcal{O}_F),\mathbb{R}) \xrightarrow{0} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{0} (\prod_{F\hookrightarrow\mathbb{C}} (2i\pi)^{-n}\mathbb{R})^{G_\mathbb{R}} \xrightarrow{r_{n+1}^*} \mathrm{Hom}(K_{2n+1}(\mathcal{O}_F),\mathbb{R}) \xrightarrow{0} 0$$

où les isomorphismes r_m^* sont duaux des régulateurs. On obtient

$$\lambda_X^{-1}\left(\det_\mathbb{Z} R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z})\right) = \left(\frac{w}{h\cdot R_1} \cdot \frac{|K_3(\mathcal{O}_F)_{tor}|}{|K_2(\mathcal{O}_F)|\cdot R_2} \cdot \cdots \cdot \frac{|K_{2n+1}(\mathcal{O}_F)_{tor}|}{|K_{2n}(\mathcal{O}_F)|\cdot R_{n+1}}\right)\cdot\mathbb{Z}$$

où $R_m := \det(r_m)$ est le régulateur de Beilinson. Comme on a

$$\zeta^*(\mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_F},0) = \zeta_F^*(0)\cdot\zeta_F^*(-1)\cdot ... \cdot \zeta_F^*(-n)$$

on voit que la conjecture 2.2 redonne la conjecture classique de Lichtenbaum (voir [**36**] 4.2) pour les corps totalement imaginaires. Cependant, si le corps de nombre F admet des plongements réels, alors les identifications précédentes ne sont vraies qu'à la 2-torsion près, et la conjecture 2.2 corrige (voir [**36**] 2.6) la conjecture classique ([**36**] 4.2). Par exemple, si $F/\mathbb{Q}$ est abélien, alors la conjecture 2.2 pour $X = \mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_F}$ est vraie pour tout $n \geq 0$ par le corollaire 4.6.

Chapitre 5

Valeurs zêta des variétés sur les corps finis

Des travaux de Milne, Lichtenbaum et Geisser donnent une description des valeurs spéciales des fonctions zêta des variétés sur les corps finis en $s = n$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$. D'autre part, on a donné dans le chapitre 4 une description des valeurs spéciales des fonctions zêta des schémas arithmétiques en $s = 0$. On voudrait donc obtenir une description des valeurs spéciales des fonctions zêta des schémas arithmétiques en $s = n$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, qui généralise les deux précédentes. Il est pour cela nécessaire d'obtenir une telle description pour les variétés sur les corps finis qui puisse se généraliser aux schémas plats sur $\mathbb{Z}$, ce qui n'est pas directement le cas avec la description de Milne, Lichtenbaum et Geisser. C'est le but de l'article [**50**]. On aura aussi besoin de généraliser cette description aux variétés singulières [**51**].

1. Le cas des variétés projectives lisses

1.1. La conjecture de Milne-Lichtenbaum-Geisser. Un résultat de Milne ([**43**] Theorem 0.1) décrit les valeurs spéciales de la fonction zêta d'une variété projective lisse sur un corps fini satisfaisant la conjecture de Tate. Ce résultat se formule de manière plus naturelle en termes de cohomologie Weil-étale motivique, comme l'ont montré Lichtenbaum [**38**] et Geisser [**20**].

Soient $\mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique p et X une variété projective lisse sur $\mathbb{F}_q$. On reprend les notations de la section 2 du chapitre 3. En particulier, on note X_{et} son topos étale, X_W son topos Weil-étale et $\gamma_X : X_W \to X_{et}$ le morphisme canonique. Pour $n \geq 0$, le complexe de cycles de Bloch $\mathbb{Z}(n)$ est un complexe de faisceaux abéliens sur X_{et}. On a par exemple $\mathbb{Z}(n) \simeq \mathbb{Z}[0]$ et $\mathbb{Z}(1) \simeq \mathbb{G}_m[-1]$. Pour $n < 0$ on définit

$$\mathbb{Z}(n) := \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n)[-1] := \bigoplus_{l \neq p} \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n)[-1] := \bigoplus_{l \neq p} \varinjlim \underline{\mathrm{Hom}}(\mu_{l^\nu}^{\otimes -n}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)[-1]$$

où l parcourt l'ensemble des nombres premiers $\neq p$ et la limite inductive est prise sur les entiers positifs ν. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on note encore $\mathbb{Z}(n)$ son image inverse par γ_X sur X_W, et on considère les groupes d'hypercohomologie $H^i(X_W, \mathbb{Z}(n))$ du complexe de faisceaux $\mathbb{Z}(n)$ sur X_W.

La classe fondamentale

$$e \in H^1(W_{\mathbb{F}_q}, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(W_{\mathbb{F}_q}, \mathbb{Z})$$

est définie comme le morphisme envoyant $\mathrm{Frob} \in W_{\mathbb{F}_q}$ sur $1 \in \mathbb{Z}$. On note encore $e \in H^1(X_W, \mathbb{Z})$ le pull-back de e le long du morphisme (5). Le cup-produit avec e définit donc un morphisme $H^i(X_W, \mathbb{Z}(n)) \stackrel{\cup e}{\to} H^{i+1}(X_W, \mathbb{Z}(n))$. Cette flèche $\cup e$ peut aussi être définie directement à partir de l'isomorphisme

$$R\Gamma(X_W, \mathbb{Z}(n)) \simeq R\Gamma(W_{\mathbb{F}_q}, R\Gamma((X \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q)_{et}, \mathbb{Z}(n))$$

Le fait que $e \cup e \in H^2(W_{\mathbb{F}_q}, \mathbb{Z}) = 0$ implique immédiatement $\cup e \circ \cup e = 0$. On obtient le complexe de groupes abéliens

$$\cdots \xrightarrow{\cup e} H^i(X_W, \mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\cup e} H^{i+1}(X_W, \mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\cup e} \cdots \tag{19}$$

On considère la caractéristique d'Euler multiplicative du complexe (19) :

$$\chi(H^*(X_W, \mathbb{Z}(n)), \cup e) := \prod_{i\in\mathbb{Z}} \left| \left(\frac{\mathrm{Ker}\left(H^i(X_W, \mathbb{Z}(n)) \overset{\cup e}{\to} H^{i+1}(X_W, \mathbb{Z}(n))\right)}{\mathrm{Im}\left(H^{i-1}(X_W, \mathbb{Z}(n)) \overset{\cup e}{\to} H^i(X_W, \mathbb{Z}(n))\right)} \right) \right|^{(-1)^i}.$$

On note que $\chi(H^*(X_W, \mathbb{Z}(n)), \cup e)$ n'est bien définie que si les groupes de cohomologie de (19) sont finis pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et nuls pour presque tout i. Enfin, le facteur correcteur de Milne $q^{\chi(X/\mathbb{F}_q, \mathcal{O}_X, n)}$ est défini par la formule

$$\chi(X/\mathbb{F}_q, \mathcal{O}_X, n) = \sum_{i\leq n, j} (-1)^{i+j} \cdot (n-i) \cdot \dim_{\mathbb{F}_q} H^j(X, \Omega^i_{X/\mathbb{F}_q}).$$

où $\Omega^i_{X/\mathbb{F}_q}$ est le faisceau des différentielles et $H^j(X, \Omega^i_{X/\mathbb{F}_q})$ la cohomologie du faisceau cohérent $\Omega^i_{X/\mathbb{F}_q}$ sur le schéma X. Rappelons que

$$Z(X/\mathbb{F}_q, t) := \prod_{x\in X_0} (1 - t^{\deg(x)})^{-1}$$

est la fonction zêta de $X/\mathbb{F}_q$. On note aussi ρ_n l'ordre du pôle de $Z(X/\mathbb{F}_q, t)$ en q^{-n}. On peut alors formuler la conjecture suivante.

Conjecture 5.1. $\mathbf{C}(X, n)$ *(Geisser-Lichtenbaum,* [**38**], [**20**]*) Pour toute variété projective lisse $X/\mathbb{F}_q$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\lim_{t\to q^{-n}} Z(X, t) \cdot (1 - q^n t)^{\rho_n} = \pm\chi(H^*(X_W, \mathbb{Z}(n)), \cup e) \cdot q^{\chi(X/\mathbb{F}_q, \mathcal{O}_X, n)}.$$

La première assertion et la deuxième assertion du théorème suivant sont dues à Lichtenbaum et Geisser respectivement.

Théorème 5.2. *(Lichtenbaum-Geisser-Milne)*
— *La conjecture $\mathbf{C}(X, 0)$ est vraie pour toute variété projective lisse $X/\mathbb{F}_q$* [**38**].
— *Si $H^i(X_W, \mathbb{Z}(n))$ est de type fini pour tout $i \in \mathbb{Z}$, alors $\mathbf{C}(X, n)$ est vraie* [**20**].

1.2. Reformulation en termes de cohomologie de de Rham dérivée.

1.2.1. *Trivialisation canonique d'un complexe borné à groupes de cohomologie finis.* Soit C un objet de la catégorie dérivée des groupes abéliens tel que les groupes $H^i(C)$ sont finis pour tout i et nuls pour presque tout $i \in \mathbb{Z}$. On a un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_C : \mathbb{Q} &\overset{\sim}{\to} \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} \det{}^{(-1)^i}_{\mathbb{Q}}(0) \\ &\overset{\sim}{\to} \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} \det{}^{(-1)^i}_{\mathbb{Q}}(H^i(C)_{\mathbb{Q}}) \\ &\overset{\sim}{\to} \left(\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} \det{}^{(-1)^i}_{\mathbb{Z}} H^i(C)\right)_{\mathbb{Q}} \\ &=: (\det_{\mathbb{Z}}(C))_{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

tel que

$$\mathfrak{t}_C\left(\prod_{i\in\mathbb{Z}}|H^i(C)|^{(-1)^{i+1}}\cdot\mathbb{Z}\right)=\det_{\mathbb{Z}}(C).$$

Notons que $\mathfrak{t}_C$ induit

$$\mathfrak{t}_C\otimes\mathbb{R}:\mathbb{R}\xrightarrow{\sim}(\det_{\mathbb{Z}}(C))_{\mathbb{R}}.$$

On appelle $\mathfrak{t}_C$ (ou parfois $\mathfrak{t}_C\otimes\mathbb{R}$) la *trivialisation canonique* de C. Par exemple on peut définir $\pm\chi(H^*(X_W,\mathbb{Z}(n)),\cup e)$ grâce à la trivialisation canonique du complexe (19).

1.2.2. Soit X un schéma régulier propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Une première approche [**41**] pour généraliser la conjecture 5.1 aux schémas sur $\mathbb{Z}$ consistait à essayer de définir des nombres généralisant $\chi(H^*(X_W,\mathbb{Z}(n)),\cup e)$ et $q^{\chi(X/\mathbb{F}_q,\mathcal{O}_X,n)}$. On explique brièvement pourquoi de tels nombres n'existent pas. On définira plus tard la droite fondamentale

$$\Delta(X/\mathbb{Z},n):=\det_{\mathbb{Z}}R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n))\otimes_{\mathbb{Z}}\det_{\mathbb{Z}}R\Gamma_{dR}(X/\mathbb{Z})/F^n$$

et sa trivialisation

$$\mathbb{R}\xrightarrow{\sim}\Delta(X/\mathbb{Z},n)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R},$$

en remplaçant la classe fondamentale $e\in H^1(W_{\mathbb{F}_q},\mathbb{Z})$ par la classe fondamentale

$$\theta:=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\in H^1(\mathbb{R},\mathbb{R})=:H^1(W_{\mathbb{F}_1},\mathbb{R}).$$

Contrairement à ce qui se passe pour les variétés sur les corps finis, ou encore dans le cas $n\leq 0$, il n'existe en général pas de trivialisation canonique $\mathbb{R}\xrightarrow{\sim}\det_{\mathbb{Z}}R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n))\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$. Similairement, il n'existe en général pas de trivialisation canonique $\mathbb{R}\xrightarrow{\sim}\det_{\mathbb{Z}}R\Gamma_{dR}(X/\mathbb{Z})/F^n\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$. Il n'est donc pas possible de généraliser la caractéristique d'Euler $\chi(H^*(X_W,\mathbb{Z}(n)),\cup e)$, ni de définir un nombre généralisant le facteur correcteur de Milne : seul le "produit" de ces deux nombres existe. Ce point de vue suggère que le facteur correcteur de Milne doit simplement être donné par la caractéristique d'Euler multiplicative de $R\Gamma_{dR}(X/\mathbb{Z})/F^n$.

1.2.3. Revenons au cas d'une variété projective lisse sur un corps fini $X/\mathbb{F}_q$, que l'on considère comme un schéma sur $\mathbb{Z}$. Il y a alors lieu de remplacer $Z(X,t)$ par $\zeta(X,s)=Z(X,q^{-s})$, la classe fondamentale e par θ, le faisceau cotangent $\Omega^1_{X/\mathbb{F}_q}\simeq L_{X/\mathbb{F}_q}$ par le complexe cotangent $L_{X/\mathbb{Z}}$ et le complexe de de Rham tronqué $\Omega^*_{X/\mathbb{F}_q}/F^n:=\Omega^{*<n}_{X/\mathbb{F}_q}$ par le complexe de de Rham dérivé d'Illusie $L\Omega^*_{X/\mathbb{Z}}/F^n$ modulo F^n, où F^* est la filtration de Hodge (voir [**29**] VIII.2.1). Le théorème 5.3 ci-dessous assure que le complexe $R\Gamma(X,L\Omega^*_{X/\mathbb{Z}}/F^n)$ est à cohomologie bornée et que ses groupes de cohomologie sont finis. On dispose donc de sa trivialisation canonique

$$\mathbb{R}\xrightarrow{\sim}\left(\det_{\mathbb{Z}}R\Gamma(X,L\Omega^*_{X/\mathbb{Z}}/F^n)\right)_{\mathbb{R}}\tag{20}$$

Rappelons que $W_{\mathbb{F}_q}\simeq\mathbb{Z}$ est engendré par le Frobenius Frob. On considère la flèche $\mathfrak{f}:W_{\mathbb{F}_q}\to W_{\mathbb{F}_1}:=\mathbb{R}$ envoyant Frob sur $\log(q)$, et on définit $\theta=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\in H^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Alors $\mathfrak{f}^*\theta\in H^1(W_{\mathbb{F}_q},\mathbb{R})$ envoie le Frobenius Frob $\in W_{\mathbb{F}_q}$ sur $\log(q)\in\mathbb{R}$, alors que $e\in H^1(W_{\mathbb{F}_q},\mathbb{R})$ envoie Frob sur $1\in\mathbb{R}$. On a

$$R\Gamma(X_W,\mathbb{Z}(n))_{\mathbb{R}}\simeq R\Gamma(W_{\mathbb{F}_q},R\Gamma(X_{\overline{\mathbb{F}}_q,et},\mathbb{Z}(n))_{\mathbb{R}}).$$

Il suit que le cup-produit avec la classe $\mathfrak{f}^*\theta\in H^1(W_{\mathbb{F}_q},\mathbb{R})$ définit une flèche

$$H^i(X_W,\mathbb{Z}(n))_{\mathbb{R}}\xrightarrow{\cup\theta}H^{i+1}(X_W,\mathbb{Z}(n))_{\mathbb{R}}$$

qui diffère de

$$H^i(X_W,\mathbb{Z}(n))_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\cup e} H^{i+1}(X_W,\mathbb{Z}(n))_{\mathbb{R}}$$

par un facteur $\log(q)$. On obtient donc un complexe acyclique borné d'espaces vectoriels réels de dimension finies :

$$\cdots \xrightarrow{\cup\theta} H^i(X_W,\mathbb{Z}(n))_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\cup\theta} H^{i+1}(X_W,\mathbb{Z}(n))_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\cup\theta} \cdots$$

Ce complexe induit une trivialisation

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} (\det_{\mathbb{Z}} R\Gamma(X_W,\mathbb{Z}(n)))_{\mathbb{R}} \tag{21}$$

Si les groupes $H^i(X_W,\mathbb{Z}(n))$ sont de type fini pour tout i et nuls pour presque tout $i\in\mathbb{Z}$, la droite fondamentale

$$\Delta(X/\mathbb{Z},n) := \det_{\mathbb{Z}} R\Gamma(X_W,\mathbb{Z}(n)) \otimes_{\mathbb{Z}} \det_{\mathbb{Z}} R\Gamma(X, L\Omega^*_{X/\mathbb{Z}}/F^n) \tag{22}$$

est bien définie et le produit des trivialisations (20) et (21) définit

$$\lambda : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \Delta(X/\mathbb{Z},n)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}.$$

On montre le résultat suivant.

Théorème 5.3. [**50**] *Soit X un schéma propre et lisse sur $\mathbb{F}_q$ et soit $n\in\mathbb{Z}$ un entier. Alors le complexe $R\Gamma(X, L\Omega^*_{X/\mathbb{Z}}/F^n)$ est à cohomologie bornée, ses groupes de cohomologie sont finis et on a*

$$\prod_{i\in\mathbb{Z}} \mid H^i(X, L\Omega^*_{X/\mathbb{Z}}/F^n) \mid^{(-1)^i} \; = \; q^{\chi(X/\mathbb{F}_q,\mathcal{O}_X,n)}.$$

Ce résultat permet de donner une description des valeurs spéciales des fonctions zêta des variétés sur les corps finis qui pourra se généraliser aux schémas plats sur $\mathbb{Z}$. En effet, on a le

Corollaire 5.4. [**50**] *Soit X une variété projective lisse sur un corps fini telle que les groupes $H^i(X_W,\mathbb{Z}(n))$ sont de type fini pour tout i. Alors on a*

$$\begin{aligned}\Delta(X/\mathbb{Z},n) &= \mathbb{Z}\cdot\lambda\left(\log(q)^{\rho_n}\cdot\chi(H^*(X_W,\mathbb{Z}(n)),\cup e)^{-1}\cdot q^{-\chi(X/\mathbb{F}_q,\mathcal{O}_X,n)}\right)\\ &= \mathbb{Z}\cdot\lambda\left(\zeta^*(X,n)^{-1}\right)\end{aligned}$$

où $\rho_n := -\mathrm{ord}_{s=n}\zeta(X,s)$ est l'ordre du pôle de $\zeta(X,s)$ en $s=n$.

En d'autres termes, la conjecture 5.1 est équivalente à la suivante.

Conjecture 5.5. *Pour toute variété projective lisse $X/\mathbb{F}_q$ et tout $n\in\mathbb{Z}$, on a*

$$\Delta(X/\mathbb{Z},n) = \mathbb{Z}\cdot\lambda\left(\zeta^*(X,n)^{-1}\right).$$

2. Généralisation au cas des schémas séparés de type fini sur un corps fini

2.1. La conjecture de Geisser.

2.1.1. *Le eh-topos.* Soit $d \geq 0$ un entier positif et k un corps. On note $\mathbf{Sch}^d/k$ la catégorie des schémas de dimension $\leq d$ séparés et de type fini sur k. La eh-topologie sur $\mathbf{Sch}^d/k$ est définie comme suit.

DÉFINITION 5.6. *(Geisser, [**22**] Definition 2.1) La eh-topologie sur $\mathbf{Sch}^d/k$ est la topologie de Grothendieck engendrée par les familles couvrantes suivantes :*
— *les familles couvrantes pour la topologie étale ;*
— *les éclatements généralisés : si on a un carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{i'} & X' \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

où f est propre et i un plongement fermé, tel que f induise un isomorphisme $X' - Z' \xrightarrow{\sim} X - Z$, alors $(X' \xrightarrow{f} X, Z \xrightarrow{i} X)$ est une famille couvrante.

On note $\mathrm{PSh}(\mathbf{Sch}^d/k)$ la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur $\mathbf{Sch}^d/k$, et $\mathrm{Sh}_{eh}(\mathbf{Sch}^d/k)$ le topos des faisceaux d'ensembles sur la catégorie $\mathbf{Sch}^d/k$ munie de la eh-topologie. On a un morphisme de topos

$$\mathrm{Sh}_{eh}(\mathbf{Sch}^d/k) \longrightarrow \mathrm{Sh}_{et}(\mathbf{Sch}^d/k)$$

dont le foncteur image inverse est le foncteur eh-faisceau associé. On remarque que le foncteur

$$y : \mathbf{Sch}^d/k \hookrightarrow \mathrm{PSh}(\mathbf{Sch}^d/k) \to \mathrm{Sh}_{eh}(\mathbf{Sch}^d/k),$$

obtenu en composant le plongement de Yoneda et le foncteur faisceau associé, n'est pas pleinement fidèle. Il suit que la eh-topologie n'est pas sous-canonique. Par exemple, si X^{red} désigne le sous-schéma réduit fermé maximal de $X \in \mathbf{Sch}^d/k$, alors la flèche induite $yX^{\mathrm{red}} \to yX$ est un isomorphisme. Si U est un objet de $\mathbf{Sch}^d/k$ et $\mathcal{F}$ un eh-faisceau sur $\mathbf{Sch}^d/k$, on choisit une compactification de Nagata $U \hookrightarrow X$ dont le complémentaire fermé est $Z \hookrightarrow X$ (de sorte que X est propre sur k et U est ouvert dense dans X), et on définit

$$R\Gamma_c(U_{eh}, \mathcal{F}) := \mathrm{Cone}\,(R\Gamma(X_{eh}, \mathcal{F}) \to R\Gamma(Z_{eh}, \mathcal{F}))\,[-1]$$

où $R\Gamma(X_{eh}, -)$ est le foncteur dérivé total du foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X)$ des sections au-dessus de X. Alors $R\Gamma_c(U_{eh}, \mathcal{F})$ ne dépend pas de la compactification choisie ([**22**] Proposition 3.2). De plus, $R\Gamma_c(U_{eh}, \mathcal{F})$ est contravariant pour les morphismes propres et covariant pour les immersions ouvertes. Pour une décomposition ouverte-fermée $(U \xrightarrow{j} X \xleftarrow{i} Z)$, on a un triangle distingué

$$R\Gamma_c(U_{eh}, \mathcal{F}) \to R\Gamma_c(X_{eh}, \mathcal{F}) \to R\Gamma_c(Z_{eh}, \mathcal{F}) \to .$$

Le premier intérêt du eh-topos $\mathrm{Sh}_{eh}(\mathbf{Sch}^d/k)$ est qu'il permet de définir une cohomologie à support compact à coefficients arbitraires, alors que la cohomologie étale à support compact n'est bien définie que pour les coefficients de torsion, car le théorème du changement de base propre en cohomologie étale n'est vrai en général qu'à cette condition. Un autre avantage du topos $\mathrm{Sh}_{eh}(\mathbf{Sch}^d/k)$ provient du fait que, sous la condition $\mathbf{R}(k,d)$ ci-dessous, tout schéma $X \in \mathbf{Sch}^d/k$ est localement lisse pour la eh-topologie. Cette conjecture $\mathbf{R}(k,d)$ est la forme forte de la résolution des singularités pour des schémas de $\mathbf{Sch}^d/k$ suivante. On note $\mathbf{Sm}^d/k \subseteq \mathbf{Sch}^d/k$ la sous-catégorie pleine formée des schémas lisses sur k.

DÉFINITION 5.7. *(Geisser, [**22**] Definition 2.4) On note $\mathbf{R}(k,d)$ les deux conditions suivantes :*

— *pour tout schéma intègre séparé $X \in \mathbf{Sch}^d/k$, il existe un morphisme $f : Y \to X$ propre et birationnel, avec $Y \in \mathbf{Sm}^d/k$;*
— *pour tout $X \in \mathbf{Sm}^d/k$ et tout morphisme $f : Y \to X$ propre et birationnel, il existe une suite d'éclatements le long de centres lisses*
$$X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 = X$$
telle que la composition $X_n \to X$ se factorise par f.

Si la condition $\mathbf{R}(k, d)$ est vérifiée, alors on a un morphisme canonique
$$\rho : \mathrm{Sh}_{eh}(\mathbf{Sch}^d/k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}_{eh}(\mathbf{Sm}^d/k) \longrightarrow \mathrm{Sh}_{Zar}(\mathbf{Sm}^d/k)$$
où $\mathrm{Sh}_{eh}(\mathbf{Sm}^d/k)$ est le topos des faisceaux sur la catégorie $\mathbf{Sm}^d/k$ munie de la topologie induite par la eh-topologie sur $\mathbf{Sch}^d/k$ via le foncteur d'inclusion $\mathbf{Sm}^d/k \subseteq \mathbf{Sch}^d/k$, et $\mathrm{Sh}_{Zar}(\mathbf{Sm}^d/k)$ est le topos des faisceaux sur la catégorie $\mathbf{Sm}^d/k$ munie de la topologie de Zariski.

2.1.2. Soit maintenant un corps fini $\mathbb{F}_q$. Le Wh-topos $\mathrm{Sh}_{Wh}(\mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q)$ de $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ est défini comme la catégorie des faisceaux d'ensembles sur $\mathbf{Sch}^d/\overline{\mathbb{F}}_q$ munis d'une structure $W_{\mathbb{F}_q}$-équivariante. On a un morphisme canonique
$$\gamma : \mathrm{Sh}_{Wh}(\mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q) \longrightarrow \mathrm{Sh}_{eh}(\mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q).$$
Si $\mathcal{F}$ est un faisceau abélien sur $\mathrm{Sh}_{Wh}(\mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q)$, et $U \in \mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q$ on note $R\Gamma(U_{Wh}, \mathcal{F})$ sa cohomologie. On a donc un isomorphisme canonique
$$R\Gamma(U_{Wh}, \mathcal{F}) \simeq R\Gamma(W_{\mathbb{F}_q}, R\Gamma(U_{eh}, \mathcal{F}))$$
qui est fonctoriel en U. Soit X une compactification de U de complémentaire fermé Z. On définit alors
$$R\Gamma_c(U_{Wh}, \mathcal{F}) := \mathrm{Cone}\left(R\Gamma(X_{Wh}, \mathcal{F}) \to R\Gamma(Z_{Wh}, \mathcal{F})\right)[-1].$$
Il suit que
$$R\Gamma_c(U_{Wh}, \mathcal{F}) \simeq R\Gamma(W_{\mathbb{F}_q}, R\Gamma(U_{eh}, \mathcal{F}))$$
ne dépend pas de la compactification choisie, et que, pour une décomposition ouverte-fermée $(U \xrightarrow{j} X \xleftarrow{i} Z)$, on a un triangle distingué
$$R\Gamma_c(U_{Wh}, \mathcal{F}) \to R\Gamma_c(X_{Wh}, \mathcal{F}) \to R\Gamma_c(Z_{Wh}, \mathcal{F}) \to .$$

2.1.3. *Enoncé de la conjecture.* On dispose du eh-topos $\mathrm{Sh}_{eh}(\mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q)$ et, sous la condition $\mathbf{R}(\mathbb{F}_q, d)$, du morphisme ρ ci-dessus. On considère le préfaisceau abélien Ω^i sur $\mathbf{Sm}^d/\mathbb{F}_q$ donné par $X \mapsto \Omega^i_{X/\mathbb{F}_q}(X)$, où $\Omega^i_{X/\mathbb{F}_q} := \Lambda^i \Omega^1_{X/\mathbb{F}_q}$ est le faisceau des différentielles. Alors Ω^i est un faisceau pour la topologie de Zariski, et définit donc un faisceau abélien sur $\mathrm{Sh}_{Zar}(\mathbf{Sm}^d/\mathbb{F}_q)$. On obtient le faisceau abélien $\rho^{-1}\Omega^i$ sur $\mathrm{Sh}_{eh}(\mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q)$ pour tout entier i. La généralisation de Geisser du facteur correcteur de Milne est définie par la formule
$$\chi^{eh}_c(X/\mathbb{F}_q, \mathcal{O}, n) := \sum_{i \le n, j \in \mathbb{Z}} (-1)^{i+j} \cdot (n-i) \cdot \dim_{\mathbb{F}_q} H^j_c(X_{eh}, \rho^{-1}\Omega^i).$$

Pour tout entier $n \geq 0$, le complexe motivique $\mathbb{Z}(n)$ de Voevodsky définit un complexe de faisceaux abéliens sur $\mathrm{Sh}_{Zar}(\mathbf{Sm}^d/\mathbb{F}_q)$. On note encore $\mathbb{Z}(n)$ son image inverse par ρ et γ sur les topos $\mathrm{Sh}_{eh}(\mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q)$ et $\mathrm{Sh}_{Wh}(\mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q)$ respectivement. Pour $n < 0$ on considère le faisceau
$$\mathbb{Z}(n) := \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n)[-1] := \bigoplus_{l \neq p} \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n)[-1] := \bigoplus_{l \neq p} \varinjlim \underline{\mathrm{Hom}}(\mu_{l^\nu}^{\otimes -n}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)[-1]$$

sur le topos étale $\mathrm{Sh}_{et}(\mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q)$, et on note encore $\mathbb{Z}(n)$ son image inverse sur $\mathrm{Sh}_{eh}(\mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q)$ (resp. sur $\mathrm{Sh}_{Wh}(\mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q)$) via le morphisme $\mathrm{Sh}_{eh}(\mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q) \to \mathrm{Sh}_{et}(\mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q)$ (resp. via $\mathrm{Sh}_{Wh}(\mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q) \to \mathrm{Sh}_{et}(\mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q)$). Pour tout $X \in \mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on définit

$$R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)) := R\Gamma_c(X_{Wh}, \mathbb{Z}(n)).$$

Alors on a un isomorphisme canonique

$$R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)) := R\Gamma_c(X_{Wh}, \mathbb{Z}(n)) \simeq R\Gamma(W_{\mathbb{F}_q}, R\Gamma_c(X_{eh}, \mathbb{Z}(n))).$$

La classe fondamentale $e \in H^1(W_{\mathbb{F}_q}, \mathbb{Z})$ définit donc un morphisme $H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)) \stackrel{\cup e}{\to} H^{i+1}_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))$. Le fait que $e \cup e \in H^2(W_{\mathbb{F}_q}, \mathbb{Z}) = 0$ implique à nouveau que $\cup e \circ \cup e = 0$. On obtient le complexe de groupes abéliens

$$\cdots \xrightarrow{\cup e} H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\cup e} H^{i+1}_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\cup e} \cdots \tag{23}$$

Si les groupes de cohomologie de ce complexe (23) sont finis en tout degré et nuls en presque tout degré, alors la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(H^*_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)), \cup e)$ est définie comme précédemment.

Conjecture 5.8. *(Geisser, [**22**] Conjecture 1.4) Pour tout $X \in \mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\lim_{t \to q^{-n}} Z(X, t) \cdot (1 - q^n t)^{\rho_n} = \pm \chi(H^*_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)), \cup e) \cdot q^{\chi^{eh}_c(X/\mathbb{F}_q, \mathcal{O}, n)}.$$

Théorème 5.9. *(Geisser [**22**]) Supposons que $\mathbf{R}(\mathbb{F}_q, d)$ est vraie. Alors pour toute variété projective lisse $X/\mathbb{F}_q$ de dimension $\leq d$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, la flèche*

$$R\Gamma(X_W, \mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))$$

est un quasi-isomorphisme et on a

$$\chi(X/\mathbb{F}_q, \mathcal{O}_X, n) = \chi^{eh}_c(X/\mathbb{F}_q, \mathcal{O}, n).$$

Théorème 5.10. *(Geisser [**22**]) Supposons que $\mathbf{R}(\mathbb{F}_q, d)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{Z}$.*
- *$\chi^{eh}_c(X/\mathbb{F}_q, \mathcal{O}, n)$ est bien définie pour tout $X \in \mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q$.*
- *Supposons de plus que $H^i(Y_W, \mathbb{Z}(n))$ est de type fini pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et toute variété projective lisse $Y/\mathbb{F}_q$ de dimension $\leq d$. Alors pour tout $X \in \mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q$, $H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))$ est de type fini pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et on a*

$$\lim_{t \to q^{-n}} Z(X, t) \cdot (1 - q^n t)^{\rho_n} = \pm \chi(H^*_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)), \cup e) \cdot q^{\chi^{eh}_c(X/\mathbb{F}_q, \mathcal{O}, n)}.$$

2.2. Reformulation. On commence par munir le topos $\mathrm{Sh}_{eh}(\mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q)$ de son faisceau d'anneaux naturel.

Définition 5.11. [**51**] *L'anneau structural $\mathcal{O}^{eh}$ sur $\mathrm{Sh}_{eh}(\mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q)$ est le eh-faisceau associé au préfaisceau d'anneaux*

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q)^{op} & \longrightarrow & \mathrm{Rings} \\ X & \longmapsto & \mathcal{O}_X(X) \end{array}.$$

On considère maintenant le morphisme de topos annelés

$$\psi : (\mathrm{Sh}_{eh}(\mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q), \mathcal{O}^{eh}) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})})$$

induit par le morphisme de sites évident, où $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$ est le faisceau structural usuel sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. On note

$$L\Omega^*_{\mathcal{O}^{eh}/\mathbb{Z}}/F^n := L\Omega^*_{\psi}/F^n$$

le complexe de de Rham dérivé modulo F^n, où F^* est la filtration de Hodge. Cette notation est justifiée par l'observation suivante. On note provisoirement $\mathbb{Z}^{eh}$ le faisceau constant sur $\mathrm{Sh}_{eh}(\mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q)$ associé à l'anneau $\mathbb{Z}$. On a donc un unique morphisme d'anneaux $\mathbb{Z}^{eh} \to \mathcal{O}^{eh}$. Alors la flèche

$$L\Omega^*_{\mathcal{O}^{eh}/\mathbb{Z}^{eh}}/F^n \xrightarrow{\sim} L\Omega^*_{\mathcal{O}^{eh}/\psi^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}}/F^n =: L\Omega^*_{\psi}/F^n$$

est un quasi-isomorphisme. La cohomologie de de Rham dérivée modulo F^n à support compact est alors définie par

$$X \mapsto R\Gamma_c(X_{eh}, L\Omega^*_{\mathcal{O}^{eh}/\mathbb{Z}}/F^n)$$

pour $X \in \mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q$ variable. Alors $R\Gamma_c(X_{eh}, L\Omega^*_{\mathcal{O}^{eh}/\mathbb{Z}}/F^n)$ est covariant pour les immersions ouvertes et contravariant pour les morphismes propres. Une décomposition ouverte-fermée donne lieu à un triangle distingué comme précédemment. On remarque que les complexes $L_{\mathcal{O}^{eh}/\mathbb{Z}}$ et $L\Omega^*_{\mathcal{O}^{eh}/\mathbb{Z}}/F^n$ sont, a priori, non-bornés à gauche.

Le théorème 5.12(2) ci-dessous assure que, sous la condition $\mathbf{R}(\mathbb{F}_q, d)$, le complexe $R\Gamma_c(X_{eh}, L\Omega^*_{\mathcal{O}^{eh}/\mathbb{Z}}/F^n)$ est à cohomologie bornée et que ses groupes de cohomologie sont finis. On dispose donc de sa trivialisation canonique

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \left(\det_{\mathbb{Z}} R\Gamma_c(X_{eh}, L\Omega^*_{\mathcal{O}^{eh}/\mathbb{Z}}/F^n)\right)_{\mathbb{R}}. \tag{24}$$

De plus le theorème 5.10 assure que, sous les hypothèses du théorème 5.12(4) ci-dessous, le complexe $R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))$ est à cohomologie bornée et que ses groupes de cohomologie sont de type fini. On peut donc sous ces hypothèses définir la droite fondamentale

$$\Delta(X/\mathbb{Z}, n) := \det_{\mathbb{Z}} R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)) \otimes_{\mathbb{Z}} \det_{\mathbb{Z}} R\Gamma_c(X_{eh}, L\Omega^*_{\mathcal{O}^{eh}/\mathbb{Z}}/F^n).$$

L'isomorphime

$$R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))_{\mathbb{R}} \simeq R\Gamma(W_{\mathbb{F}_q}, R\Gamma_c(X_{\overline{\mathbb{F}}_q, eh}, \rho^{-1}\mathbb{Z}(n))_{\mathbb{R}}).$$

permet de définir le cup-produit avec la classe $\mathfrak{f}^*\theta \in H^1(W_{\mathbb{F}_q}, \mathbb{R})$. On obtient une flèche

$$H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\cup\theta} H^{i+1}_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))_{\mathbb{R}}$$

qui diffère à nouveau de

$$H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\cup e} H^{i+1}_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))_{\mathbb{R}}$$

par un facteur $\log(q)$. Il suit que

$$\cdots \xrightarrow{\cup\theta} H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\cup\theta} H^{i+1}_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\cup\theta} \cdots$$

est un complexe acyclique borné d'espaces vectoriels réels de dimensions finies. Ce complexe acyclique borné ainsi que la trivialisation canonique (24) induisent une trivialisation

$$\lambda_X : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \Delta(X/\mathbb{Z}, n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Enfin, on remplace à nouveau la fonction $Z(X/\mathbb{F}_q, t)$ par $\zeta(X, s) = Z(X/\mathbb{F}_q, q^{-s})$.

Théorème 5.12. [**51**] *On suppose que la condition $\mathbf{R}(\mathbb{F}_q, d)$ est vérifiée. Soit $n \in \mathbb{Z}$ un entier. Pour tout schéma X de $\mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q$, les assertions suivantes sont vraies.*

(1) *Si $X/\mathbb{F}_q$ est projectif lisse, alors la flèche canonique*

$$R\Gamma(X_{Zar}, L\Omega^*_{X/\mathbb{Z}}/F^n) \to R\Gamma_c(X_{eh}, L\Omega^*_{\mathcal{O}^{eh}/\mathbb{Z}}/F^n)$$

est un quasi-isomorphisme.

(2) *Le complexe $R\Gamma_c(X_{eh}, L\Omega^*_{\mathcal{O}^{eh}/\mathbb{Z}}/F^n)$ est à cohomologie bornée et ses groupes de cohomologie sont finis.*

(3) *On a*

$$\prod_{i\in\mathbb{Z}} \mid H^i_c(X_{eh}, L\Omega^*_{\mathcal{O}^{eh}/\mathbb{Z}}/F^n) \mid^{(-1)^i} \;=\; q^{\chi_c^{eh}(X/\mathbb{F}_q,\mathcal{O},n)}.$$

(4) *Supposons de plus que pour toute variété projective lisse $Y/\mathbb{F}_q$ de dimension $\leq d$, les groupes de cohomologie Weil-étale $H^i(Y_W, \mathbb{Z}(n))$ sont de type fini pour tout i. Alors on a*

$$\Delta(X/\mathbb{Z}, n) \;=\; \mathbb{Z}\cdot\lambda_X\left(\zeta^*(X,n)^{-1}\right).$$

La preuve du théorème 5.12 est basée sur le résultat suivant. On a des isomorphismes

$$\mathcal{H}^{i-n}(L\Lambda^n_{\mathcal{O}^{eh}} L_{\mathcal{O}^{eh}/\mathbb{Z}}) \simeq \Omega^{i\leq n}_{\mathcal{O}^{eh}/\mathbb{F}_q}$$

où $\Omega^{i\leq n} := \Omega^i$ si $i \leq n$ et $\Omega^{i\leq n} := 0$ si $i > n$. Cet isomorphisme est défini à partir d'un isomorphisme

$$\mathcal{H}^{i-n}(L\Lambda^n_{\mathcal{O}_X} L_{X/\mathbb{Z}}) \simeq \Lambda^i_{\mathcal{O}_X}\Omega^1_{X/\mathbb{F}_q} \otimes \Gamma^{n-i}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X) \simeq \Omega^{i\leq n}_{X/\mathbb{F}_q} \tag{25}$$

pour tout $X/\mathbb{F}_q$, qui est fonctoriel en X. L'isomorphisme (25) fournit aussi une autre preuve du théorème 5.3. La conjecture 5.8 est encore équivalente à la suivante.

Conjecture 5.13. *Pour tout $X \in \mathbf{Sch}^d/\mathbb{F}_q$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\Delta(X/\mathbb{Z}, n) = \mathbb{Z}\cdot\lambda_X\left(\zeta^*(X,n)^{-1}\right).$$

Chapitre 6

Valeurs zêta des schémas arithmétiques

Ce chapitre résume le contenu de l'article [**16**] en commun avec Matthias Flach. Ce travail donne une description conjecturale des valeurs spéciales en $s = n$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, des fonctions zêta des schémas réguliers et propres sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Dans tout ce chapitre, X est un schéma régulier et propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. On suppose de plus X connexe de dimension d.

1. Dualité d'Artin-Verdier

On explique ici le contenu de ([**16**] Appendix A). La dualité d'Artin-Verdier pour le complexe de Bloch $\mathbb{Z}/m(n)$ au-dessus de X est connue dans certains cas (voir [**21**], [**23**], et [**54**]). Pour régler les problèmes de 2-torsion, ces théorèmes de dualité relient la cohomologie étale usuelle $H^{2d+1-i}(X_{et}, \mathbb{Z}/m(d-n))$ à la cohomologie étale à "support compact" $\widehat{H}^i_c(X_{et}, \mathbb{Z}/m(n))$ au sens de Milne [**44**]. On aura besoin de définir des complexes de faisceaux $\mathbb{Z}(n)^{\overline{X}}$ sur le topos étale d'Artin-Verdier $\overline{X}_{et}$, étendant les complexes $\mathbb{Z}(n)^X$ sur X_{et}, et satisfaisant un théorème de dualité reliant $H^{2d+1-i}(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}/m(d-n))$ à $H^i(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}/m(n))$.

1.1. Les complexes motiviques $\mathbb{Z}(n)^X$. Pour tout $n \geq 0$, on considère à nouveau le complexe de Bloch $\mathbb{Z}(n)^X = z^n(-, 2n - *)$ comme un complexe de faisceaux abéliens sur le site étale du schéma X. Pour $n < 0$, on définit

$$\mathbb{Z}(n)^X := \bigoplus_p j_{p,!}(\mu_{p^\infty}^{\otimes n})[-1]$$

où $j_p : X[1/p] \to X$ est l'immersion ouverte, $\mu_{p^\cdot}$ le faisceau des racines $p^\cdot$-ièmes de l'unité, $j_{p,!}$ le foncteur extension par zéro, et p parcourt l'ensemble des nombres premiers. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout entier positif m, on pose

$$\mathbb{Z}/m(n)^X := \mathbb{Z}(n) \otimes^L \mathbb{Z}/m.$$

1.2. Les complexes $\mathbb{Z}(n)^{\overline{X}}$. On a défini dans la section 3 du chapitre 3 la décomposition ouverte-fermée

$$\phi : X_{et} \longrightarrow \overline{X}_{et} \longleftarrow X_\infty : u_\infty$$

et le morphisme

$$\pi : \mathrm{Sh}(G_{\mathbb{R}}, X(\mathbb{C})) \longrightarrow \mathrm{Sh}(X_\infty).$$

Lorsque $0 \leq n \leq d$ on voudrait définir $\mathbb{Z}(n)^{\overline{X}}$ par

$$\mathbb{Z}(n)^{\overline{X}} = \tau^{\leq n}(R\phi_* \mathbb{Z}(n)^X). \tag{26}$$

L'isomorphisme attendu $\phi^* \mathbb{Z}(n)^{\overline{X}} \simeq \mathbb{Z}(n)^X$ montre que cette définition nécessite $\mathcal{H}^i(\mathbb{Z}(n)^X) = 0$ pour $i > n$, où $\mathcal{H}^i(\mathbb{Z}(n)^X)$ désigne le i-ième faisceau de cohomologie du complexe $\mathbb{Z}(n)^X$.

Ceci est connu pour les schémas lisses sur un anneau de Dedekind ou sur un corps, mais reste conjectural pour les schémas arithmétiques réguliers généraux. Cependant (26) donne

$$Ru^!_\infty \mathbb{Z}(n)^{\overline{X}} = \left(\tau^{>n} R\pi_*(2i\pi)^n\mathbb{Z}\right)[-1] \simeq \left(\tau^{>n} R\widehat{\pi}_*(2i\pi)^n\mathbb{Z}\right)[-1]$$

où $R\widehat{\pi}_*(2i\pi)^n\mathbb{Z}$ est un complexe de faisceaux de 2-torsion sur X_∞. Pour tout X propre régulier et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit alors $\mathbb{Z}(n)^{\overline{X}}$ comme le cône d'un morphisme de complexes de sorte que l'on a un triangle distingué

$$\mathbb{Z}(n)^{\overline{X}} \longrightarrow R\phi_*\mathbb{Z}(n)^X \longrightarrow \tau^{>n}\left(u_{\infty,*}R\widehat{\pi}_*(2i\pi)^n\mathbb{Z}\right) \longrightarrow .$$

On explique brièvement la définition du foncteur $R\widehat{\pi}_*$. Le foncteur

$$R\pi_* : \mathcal{D}^+(G_\mathbb{R}, X(\mathbb{C})) \longrightarrow \mathcal{D}(X_\infty)$$

peut être vu comme le foncteur calculant la cohomologie du groupe $G_\mathbb{R}$ au-dessus de X_∞. Alors le foncteur

$$R\widehat{\pi}_* : \mathcal{D}^+(G_\mathbb{R}, X(\mathbb{C})) \longrightarrow \mathcal{D}(X_\infty)$$

calcule la cohomologie *à la Tate* du groupe fini $G_\mathbb{R}$ au-dessus de X_∞. Le complexe $\mathbb{Z}(n)^{\overline{X}}$ est alors défini à un isomorphisme canonique près dans la catégorie dérivée $\mathcal{D}(\overline{X}_{et})$. Si $\mathcal{H}^i(\mathbb{Z}(n)^X) = 0$ pour $i > n$, alors on a l'identification (26). On peut en déduire que $\mathbb{Z}(0)^{\overline{X}} \simeq \mathbb{Z}[0]$ et $\mathbb{Z}(1)^{\overline{X}} \simeq (\phi_*\mathbb{G}_m)[-1]$.

On note $R\Gamma(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}(n)) := R\Gamma(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}(n)^{\overline{X}})$ et $R\Gamma(X_{et}, \mathbb{Z}(n)) := R\Gamma(X_{et}, \mathbb{Z}(n)^X)$. On observe que pour $n < 0$, le complexe (borné) $R\Gamma(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}(n))$ peut avoir de la cohomologie en degrés négatifs. La proposition suivante montre que ce fait a priori surprenant est en fait une conséquence de la formule du fibré projectif.

Proposition 6.1. *([**16**] Prop. 6.29) On a un isomorphisme*

$$R\Gamma(\overline{\mathbb{P}^m_\mathbb{Z}}_{,et}, \mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{0\leq n\leq m} R\Gamma(\overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}_{et}, \mathbb{Z}(-n))[-2n].$$

1.3. Dualité. La conjecture suivante est connue pour X lisse et propre au-dessus de l'anneau d'entiers d'un corps de nombres, ou encore pour un schéma régulier propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ si $n \leq 0$. On s'attend à ce qu'elle soit vraie pour les schémas réguliers propres sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Conjecture 6.2. $\mathbf{AV}(X_{et}, n)$ *On a un morphisme produit $\mathbb{Z}(n) \otimes^L \mathbb{Z}(d-n) \to \mathbb{Z}(d)$ dans $\mathcal{D}(X_{et})$ induisant une dualité parfaite de groupes abélien finis*

$$\widehat{H}^i_c(X_{et}, \mathbb{Z}/m(n)) \times H^{2d+1-i}(X_{et}, \mathbb{Z}/m(d-n)) \to \widehat{H}^{2d+1}_c(X_{et}, \mathbb{Z}/m(d)) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et tout entier m positif.

La conjecture $\mathbf{AV}(\overline{X}_{et}, n)$ est énoncée ci-dessous (Conjecture 6.5).

Théorème 6.3. *([**16**] Theorem 6.24) Soit X un schéma arithmétique régulier et propre sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$*, et soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors*

$$\mathbf{AV}(X_{et}, n) \Rightarrow \mathbf{AV}(\overline{X}_{et}, n).$$

La preuve du théorème 6.3 utilise la dualité de Poincaré de l'espace $X(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On précise que $X(\mathbb{R})$ peut ne pas être orientable, comme le montre l'exemple $X = \mathbb{P}^2_\mathbb{Z}$.

Corollaire 6.4. *([**16**] Cor. 6.26, 6.27) La conjecture* $\mathbf{AV}(\overline{X}_{et}, n)$ *ci-dessous est vraie dans les cas suivants :*

— *pour X de caractéristique p ;*
— *pour tout $n \leq 0$;*
— *pour tout $n \in \mathbb{Z}$ si X est un schéma propre et lisse sur l'anneau d'entiers $\mathcal{O}_F$ d'un corps de nombres F.*

2. Les complexes Weil-étales

2.1. Hypothèses.

Conjecture 6.5. $\mathbf{AV}(\overline{X}_{et}, n)$ *On a un morphisme produit $\mathbb{Z}(n)^{\overline{X}} \otimes^L \mathbb{Z}(d-n)^{\overline{X}} \to \mathbb{Z}(d)^{\overline{X}}$ dans $\mathcal{D}(\overline{X}_{et})$ induisant une dualité parfaite de groupes abélien finis*

$$H^i(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}/m(n)) \times H^{2d+1-i}(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}/m(d-n)) \to H^{2d+1}(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}/m(d)) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et tout entier m positif.

Le corollaire 6.4 donne des cas où la conjecture $\mathbf{AV}(\overline{X}_{et}, n)$ est connue. On a aussi besoin d'une hypothèse de finitude forte analogue à la conjecture 4.1.

Conjecture 6.6. $\mathbf{L}(\overline{X}_{et}, n)$ *Les groupes d'hypercohomologie étale $H^i(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}(n))$ sont de type fini pour $i \leq 2n+1$.*

La conjecture $\mathbf{L}(\overline{X}_{et}, n)$ est connue si $\dim(X) \leq 1$, pour certaines variétés sur les corps finis lorsque $n \leq 1$ ou $n \geq d-1$. Elle est aussi connue en $n = 1$ pour les surfaces arithmétiques (schémas réguliers plats et propres sur $\mathbb{Z}$ de dimension 2) dont le groupe de Brauer est fini. En dehors de ces cas, $\mathbf{L}(\overline{X}_{et}, n)$ semble être actuellement hors de portée.

2.2. Les complexes. Le résultat suivant généralise le théorème 4.2. On définit le complexe de faisceaux

$$i_\infty^* \mathbb{Z}(n) := \mathrm{Cone}(R\pi_*(2\pi i)^n \mathbb{Z} \to \tau^{>n} R\widehat{\pi}_*(2\pi i)^n \mathbb{Z})[-1]$$

sur l'espace topologique X_∞, et on pose

$$R\Gamma_W(X_\infty, \mathbb{Z}(n)) := R\Gamma(X_\infty, i_\infty^* \mathbb{Z}(n)).$$

Théorème 6.7. *([**16**] Section 3) On suppose que X satisfait $\mathbf{L}(\overline{X}_{et}, n)$, $\mathbf{L}(\overline{X}_{et}, d-n)$ et $\mathbf{AV}(\overline{X}_{et}, n)$. Alors il existe des complexes $R\Gamma_W(\overline{X}, \mathbb{Z}(n))$ et $R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))$ tels que les assertions suivantes soient vraies.*

— *On a un triangle distingué*

$$R\mathrm{Hom}(R\Gamma(X, \mathbb{Q}(d-n)), \mathbb{Q}[-2d-2]) \to R\Gamma(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}(n)) \to R\Gamma_W(\overline{X}, \mathbb{Z}(n)) \to .$$

— *Le complexe $R\Gamma_W(\overline{X}, \mathbb{Z}(n))$ est fonctoriel contravariant pour les morphismes plats.*
— *Il existe un unique morphisme $i_\infty^* : R\Gamma_W(\overline{X}, \mathbb{Z}(n)) \to R\Gamma_W(X_\infty, \mathbb{Z}(n))$ dans la catégorie dérivée tel que le carré suivant commute.*

$$\begin{tikzcd} R\Gamma(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}(n)) \arrow[r] \arrow[d, "u_\infty^*"] & R\Gamma_W(\overline{X}, \mathbb{Z}(n)) \arrow[d, "i_\infty^*"] \\ R\Gamma(X_\infty, \mathbb{Z}(n)) \arrow[r] & R\Gamma_W(X_\infty, \mathbb{Z}(n)) \end{tikzcd}$$

On définit $R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n))$ *de sorte que l'on ait un triangle distingué*

$$R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n)) \to R\Gamma_W(\overline{X},\mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{i_\infty^*} R\Gamma_W(X_\infty,\mathbb{Z}(n)) \to .$$

— *Les groupes* $H^i_W(\overline{X},\mathbb{Z}(n))$ *sont de type fini pour tout* i *et nuls pour presque tout* $i \in \mathbb{Z}$.
— *Les groupes* $H^i_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n))$ *sont de type fini pour tout* $i \in \mathbb{Z}$ *et nuls pour* $i < 0$ *et* $i > 2d+1$.
— *Si* X *est de caractéristique* p *alors on a un isomorphisme canonique*

$$R\Gamma(X_W,\mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_W(X,\mathbb{Z}(n))$$

où $R\Gamma(X_W,\mathbb{Z}(n))$ *est la cohomologie du topos Weil-étale à coefficients dans le complexe de Bloch.*

La preuve de ce résultat est essentiellement la même que celle du théorème 4.2, qui est esquissée dans le chapitre 3. Les complexes Weil-étale satisfont la relation de dualité suivante.

Théorème 6.8. *On suppose que* X *satisfait* $\mathbf{L}(\overline{X}_{et},n)$, $\mathbf{L}(\overline{X}_{et},d-n)$ *et* $\mathbf{AV}(\overline{X}_{et},n)$. *Alors on a un isomorphisme canonique*

$$R\Gamma_W(\overline{X},\mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}(R\Gamma_W(\overline{X},\mathbb{Z}(d-n)),\mathbb{Z}[-2d-1])$$

dans la catégorie dérivée des groupes abéliens.

3. Cohomologie et dualité de Weil-Arakelov

3.1. La conjecture de Beilinson $\mathbf{B}(X,n)$. On définit le complexe $R\Gamma_c(X,\mathbb{R}(n))$ comme la fibre homotopique du régulateur $R\Gamma(X,\mathbb{R}(n)) \to R\Gamma_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}},\mathbb{R}(n))$, de sorte que l'on a un triangle distingué

$$R\Gamma_c(X,\mathbb{R}(n)) \to R\Gamma(X,\mathbb{R}(n)) \to R\Gamma_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}},\mathbb{R}(n)) \to$$

où

$$R\Gamma_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}},\mathbb{R}(n)) := R\Gamma(G_{\mathbb{R}},X(\mathbb{C}),\mathbb{R}(n)_{\mathcal{D}})$$

est la cohomologie de Deligne. Pour $n<0$ on a par définition $R\Gamma(X_{et},\mathbb{R}(n))=0$ et $\mathbb{R}(n)_{\mathcal{D}} = (2i\pi)^n\mathbb{R}$.

Proposition 6.9. *(*[**16**] *Proposition 2.1) Pour* $n,m\in\mathbb{Z}$ *on a un produit*

$$R\Gamma(X,\mathbb{R}(n)) \otimes^L R\Gamma_c(X,\mathbb{R}(m)) \to R\Gamma_c(X,\mathbb{R}(n+m)) \tag{27}$$

dans la catégorie dérivée des $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels. De plus, on a* $H^i(X,\mathbb{R}(d))=0$ *pour* $i>2d$ *et un morphisme canonique* $H^i(X,\mathbb{R}(d)) \to \mathbb{R}$.

On dispose donc du morphisme

$$R\Gamma(X,\mathbb{R}(n)) \otimes^L R\Gamma_c(X,\mathbb{R}(d-n)) \to R\Gamma_c(X,\mathbb{R}(d)) \to \mathbb{R}[-2d]. \tag{28}$$

pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

Conjecture 6.10. $\mathbf{B}(X,n)$ *Pour tout* $i\in\mathbb{Z}$, *le morphisme (28) induit une dualité parfaite*

$$H^i_c(X,\mathbb{R}(n)) \times H^{2d-i}(X,\mathbb{R}(d-n)) \to H^{2d}_c(X,\mathbb{R}(d)) \to \mathbb{R}$$

de $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels de dimensions finies.*

Cette conjecture $\mathbf{B}(X,n)$ est une reformulation (modulo [**16**] Conjecture 2.9) de la conjecture de Beilinson reliant cohomologie motivique et cohomologie de Deligne. Cette conjecture est aussi formulée dans [**56**].

3.2. La catégorie quasi-abélienne LCA. On note LCA la catégorie des groupes abéliens localement compacts. Un groupe $A \in$ LCA est de rangs finis [**26**] si $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, A)$ et $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{R})$ sont de dimension finie et si $A \xrightarrow{\cdot p} A$ est strict à noyau et conoyau finis pour tout premier p. On considère la sous-catégorie pleine FLCA $\subset$ LCA formée des groupes abéliens localement compacts de rangs finis. Les catégories FLCA et LCA sont quasi-abéliennes. On peut en particulier former la catégorie dérivée bornée $\mathrm{D}^b(\mathrm{FLCA})$, qui est une catégorie triangulée et symétrique monoïdale fermée [**26**]. Les complexes de cohomologie de Weil-Arakelov définis ci-dessous sont des objets de $\mathrm{D}^b(\mathrm{FLCA})$. On définit le complexe tangent

$$T_\infty C := R\underline{\mathrm{Hom}}(R\underline{\mathrm{Hom}}(C, \mathbb{R}/\mathbb{Z}), \mathbb{R})$$

d'un objet $C \in \mathrm{D}^b(\mathrm{FLCA})$. Le foncteur $T_\infty : \mathrm{D}^b(\mathrm{FLCA}) \to \mathrm{D}^b(\mathbb{R})$ est triangulé.

3.3. Cohomologie Weil-Arakelov. Le choix d'un métrique Kahlérienne sur $X(\mathbb{C})$ compatible à l'action de $G_\mathbb{R}$ fournit une flèche canonique ([**16**] Remark 2.13)

$$R\Gamma_\mathcal{D}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(n)) \to \tau^{<2n} R\Gamma_\mathcal{D}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(n))$$

qui est une rétraction de la flèche naturelle

$$\tau^{<2n} R\Gamma_\mathcal{D}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(n)) \to R\Gamma_\mathcal{D}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(n)).$$

On définit alors $R\Gamma(\overline{X}, \mathbb{R}(n))$ comme la fibre homotopique du morphisme composé

$$R\Gamma(X_{et}, \mathbb{R}(n)) \to R\Gamma_\mathcal{D}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(n)) \to \tau^{<2n} R\Gamma_\mathcal{D}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(n))$$

On a donc un triangle distingué

$$R\Gamma(\overline{X}, \mathbb{R}(n)) \to R\Gamma(X_{et}, \mathbb{R}(n)) \to \tau^{<2n} R\Gamma_\mathcal{D}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(n)) \to .$$

On pose

$$R\Gamma_{ar}(\overline{X}, \tilde{\mathbb{R}}(n)) := R\Gamma(\overline{X}, \mathbb{R}(n)) \oplus R\Gamma(\overline{X}, \mathbb{R}(n))[-1]$$

et

$$R\Gamma_{ar,c}(X, \tilde{\mathbb{R}}(n)) := R\Gamma_c(X, \mathbb{R}(n)) \oplus R\Gamma_c(X, \mathbb{R}(n))[-1].$$

PROPOSITION 6.11. *([**16**] Proposition 2.11) On a un isomorphisme*

$$H^{2n}_{ar}(\overline{X}, \tilde{\mathbb{R}}(n)) \simeq CH^n(\overline{X})_\mathbb{R}$$

*où $CH^n(\overline{X})_\mathbb{R}$ est le groupe de Chow-Arakelov à coefficients réels défini par Gillet-Soulé ([**24**] 5.1, [**25**] 3.3.3).*

REMARQUE 6.12. *On rappelle que le groupe de Chow arithmétique à coefficients réels $\widehat{CH}^n(X)_\mathbb{R}$ est muni du morphisme*

$$\begin{array}{cccc} \omega : & \widehat{CH}^n(X)_\mathbb{R} & \longrightarrow & A^{n,n}(X_\mathbb{R}) \\ & (Z, g) & \longmapsto & \delta_Z + dd^c(g) \end{array}$$

où $A^{n,n}(X_\mathbb{R})$ est l'espace des (n,n)-formes $\mathcal{C}^\infty$ réelles η sur $X(\mathbb{C})$, telles que $F_\infty^*(\eta) = (-1)^n \eta$. Le groupe de Chow-Arakelov à coefficients réels est défini comme

$$CH^n(\overline{X})_\mathbb{R} := \omega^{-1}(\mathcal{H}^{n,n}(X_\mathbb{R}))$$

où $\mathcal{H}^{n,n}(X_\mathbb{R})$ désigne l'espace des formes réelles harmoniques pour la métrique de Kähler donnée, telles que $F_\infty^*(\eta) = (-1)^n \eta$. Alors $\widehat{CH}^n(X)_\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel en général de dimension infinie, alors que $CH^n(\overline{X})_\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel conjecturalement de dimension finie.

On définit les morphismes

$$R\Gamma_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}(n)) \xrightarrow{\cup\theta} R\Gamma_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}(n))[1] \text{ et } R\Gamma_{ar}(\overline{X},\tilde{\mathbb{R}}(n)) \xrightarrow{\cup\theta} R\Gamma_{ar}(\overline{X},\tilde{\mathbb{R}}(n))[1]$$

par projection et inclusion.

DÉFINITION 6.13. *Les complexes* $R\Gamma_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}(n))$ *et* $R\Gamma_{ar}(\overline{X},\tilde{\mathbb{R}}(n))$ *sont bien définis dans la catégorie dérivée des* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels. Le morphisme* $\cup\theta$ *induit un complexe acyclique borné*

$$\cdots \xrightarrow{\cup\theta} H^{i-1}_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}(n)) \xrightarrow{\cup\theta} H^{i}_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}(n)) \xrightarrow{\cup\theta} H^{i+1}_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}(n)) \xrightarrow{\cup\theta} \cdots \tag{29}$$

et similairement pour $(H^*_{ar}(\overline{X},\tilde{\mathbb{R}}(n)),\cup\theta)$.

On suppose maintenant que X satisfait $\mathbf{L}(\overline{X}_{et},n)$, $\mathbf{L}(\overline{X}_{et},d-n)$, $\mathbf{AV}(\overline{X}_{et},n)$ et $\mathbf{B}(X,n)$. On définit $R\Gamma_{ar}(\overline{X},\mathbb{Z}(n))$ et $R\Gamma_{ar,c}(X,\mathbb{Z}(n))$ de sorte que l'on a les triangles distingués

$$R\Gamma_{ar}(\overline{X},\mathbb{Z}(n)) \to R\Gamma_W(\overline{X},\mathbb{Z}(n)) \to \tau^{<2n}R\Gamma_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}},\mathbb{R}(n)) \to$$

et

$$R\Gamma_{ar,c}(X,\mathbb{Z}(n)) \to R\Gamma_W(\overline{X},\mathbb{Z}(n)) \to R\Gamma_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}},\mathbb{Z}(n)) \to$$

où $R\Gamma_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}},\mathbb{Z}(n)) := R\Gamma(G_{\mathbb{R}},X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}(n)_{\mathcal{D}})$ est la cohomologie de Deligne à coefficients entiers.

PROPOSITION-DEFINITION 6.14. *On suppose que* X *satisfait* $\mathbf{L}(\overline{X}_{et},n)$, $\mathbf{L}(\overline{X}_{et},d-n)$, $\mathbf{AV}(\overline{X}_{et},n)$ *et* $\mathbf{B}(X,n)$. *Alors on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
R\Gamma_{ar,c}(X,\mathbb{Z}(n)) \arrow[r] \arrow[d] & R\Gamma_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}(n)) \arrow[r] \arrow[d] & R\Gamma_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}/\mathbb{Z}(n)) \arrow[d] \\
R\Gamma_{ar}(\overline{X},\mathbb{Z}(n)) \arrow[r] \arrow[d] & R\Gamma_{ar}(\overline{X},\tilde{\mathbb{R}}(n)) \arrow[r] \arrow[d] & R\Gamma_{ar}(\overline{X},\tilde{\mathbb{R}}/\mathbb{Z}(n)) \arrow[d] \\
R\Gamma_{ar}(X_\infty,i_\infty^*\mathbb{Z}(n)) \arrow[r] & R\Gamma_{ar}(X_\infty,i_\infty^*\tilde{\mathbb{R}}(n)) \arrow[r] & R\Gamma_{ar}(X_\infty,i_\infty^*\tilde{\mathbb{R}}/\mathbb{Z}(n))
\end{tikzcd}$$

où les lignes et les colonnes sont des triangles distingués.

REMARQUE 6.15. *Les complexes* $R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n))$, $R\Gamma_{ar,c}(X,A(n))$ *et* $R\Gamma_{ar}(\overline{X},A(n))$ *pour* $A=\mathbb{Z},\tilde{\mathbb{R}}/\mathbb{Z}$ *ne sont en fait définis dans* [**16**] *qu'à isomorphisme non canonique près dans* $\mathrm{D}^b(\mathrm{FLCA})$. *En appliquant le foncteur déterminant, ce problème disparait et on obtient des isomorphismes canoniques, comme expliqué dans le chapitre 4. On ignore ce problème dans ce chapitre.*

On n'a pas fait l'effort dans [**16**] *d'essayer de définir ces objets à isomorphismes canoniques près (i.e. comme des cones de morphismes de complexes). Ceci est peut-être possible, mais n'apporterait pas grand-chose, car les définitions que nous donnons ne sont que provisoires (espérons-le).*

3.4. Dualité.

Théorème 6.16. *([**16**] Proposition 2.10, Theorem 4.9) On suppose que X satisfait* $\mathbf{L}(\overline{X}_{et}, n)$, $\mathbf{L}(\overline{X}_{et}, d-n)$, $\mathbf{AV}(\overline{X}_{et}, n)$ *et* $\mathbf{B}(X, n)$. *On a une dualité parfaite de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie*

$$H^i_{ar}(\overline{X}, \tilde{\mathbb{R}}(n)) \times H^{2d+1-i}_{ar}(\overline{X}, \tilde{\mathbb{R}}(d-n)) \to H^{2d+1}_{ar}(\overline{X}, \tilde{\mathbb{R}}(d)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R},$$

et une dualité parfaite de groupes abéliens localement compacts

$$H^i_{ar}(\overline{X}, \mathbb{Z}(n)) \times H^{2d+1-i}_{ar}(\overline{X}, \tilde{\mathbb{R}}/\mathbb{Z}(d-n)) \to H^{2d+1}_{ar}(\overline{X}, \tilde{\mathbb{R}}/\mathbb{Z}(d)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Pour illustrer ce résultat, on considère $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$ en $n = 1$. On a

$$\begin{array}{lcl} H^i_{ar}(\overline{X}, \mathbb{Z}(1)) & = & 0\ ,\ \mu_F\ , \mathrm{Pic}(\overline{X}),\ \ \mathbb{Z}\ \ ,\ \ 0 \\ H^i_{ar}(\overline{X}, \tilde{\mathbb{R}}(1)) & = & 0\ ,\ \ 0\ \ ,\ \ \ \mathbb{R}\ \ \ ,\ \ \mathbb{R}\ \ ,\ \ 0 \qquad \text{pour } i = 0,1,2,3,\geq 4. \end{array}$$

La flèche $H^i_{ar}(\overline{X}, \mathbb{Z}(1)) \to H^i_{ar}(\overline{X}, \tilde{\mathbb{R}}(1))$ est le morphisme "degré" pour $i = 2$ et le morphisme évident pour $i = 3$. On obtient

$$H^i_{ar}(\overline{X}, \tilde{\mathbb{R}}/\mathbb{Z}(1)) = \ \mu_F\ , \mathrm{Pic}^1(\overline{X}),\ \ 0\ \ ,\ \ \mathbb{R}/\mathbb{Z}\ \ ,\ \ 0 \qquad \text{pour } i = 0,1,2,3,\geq 4.$$

Pour tout $i \leq 3$, les groupes $H^{3-i}_{ar}(\overline{X}, \tilde{\mathbb{R}}/\mathbb{Z}(1))$, $H^{3-i}_{ar}(\overline{X}, \tilde{\mathbb{R}})$ et $H^{3-i}_{ar}(\overline{X}, \mathbb{Z}(1))$ sont duaux au sens de Pontryagin des groupes de cohomologie du topos Weil-étale $H^i(\overline{X}_W, \mathbb{Z})$, $H^i(\overline{X}_W, \tilde{\mathbb{R}})$ et $H^i(\overline{X}_W, \tilde{\mathbb{R}}/\mathbb{Z})$ respectivement.

4. La droite fondamentale

4.1. Cohomologie de de Rham. On considère le complexe de cohomologie de de Rham modulo F^n

$$R\Gamma_{dR}(X/\mathbb{Z})/F^n := R\Gamma(X_{Zar}, L\Omega^*_{X/\mathbb{Z}}/F^n).$$

où $L\Omega^*_{X/\mathbb{Z}}$ est le complexe de de Rham dérivé muni de la filtration de Hodge [**29**]. On peut montrer que $H^i_{dR}(X/\mathbb{Z})/F^n := H^i(R\Gamma_{dR}(X/\mathbb{Z})/F^n)$ est un groupe abélien de type fini pour tout i, nul pour $i < 0$ et $i > d + n$. Pour toute $\mathbb{Z}$-algèbre plate A, on a

$$R\Gamma_{dR}(X/\mathbb{Z})/F^n \otimes_{\mathbb{Z}} A \simeq R\Gamma_{dR}(X_A/A)/F^n := R\Gamma(X_{Zar}, L\Omega^*_{X_A/A}/F^n).$$

Si de plus X_A/A est lisse, alors $L\Omega^*_{X_A/A}/F^n \simeq \Omega^{*<n}_{X_A/A}$ et donc $R\Gamma_{dR}(X_A/A)/F^n$ est la cohomologie de de Rham usuelle modulo la filtration de Hodge.

4.2. La trivialisation λ_∞. Le résultat suivant précise le lien entre cohomologie Weil-étale et Weil-Arakelov à support compact.

Proposition 6.17. *([**16**] Section 4.4) On a un isomorphisme*

$$R\Gamma_{ar,c}(X, \tilde{\mathbb{R}}/\mathbb{Z}(n)) \simeq R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)) \otimes^L \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

et un triangle distingué

$$R\Gamma_{dR}(X_{\mathbb{R}}/\mathbb{R})/F^n[-2] \to R\Gamma_{ar,c}(X, \mathbb{Z}(n)) \to R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)) \to$$

La proposition 6.17 fournit les isomorphismes

$$T_\infty(R\Gamma_{ar,c}(X, \tilde{\mathbb{R}}/\mathbb{Z}(n))) \simeq R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))_{\mathbb{R}}$$

et

$$T_\infty(R\Gamma_{ar,c}(X, \mathbb{Z}(n))) \simeq R\Gamma_{dR}(X/\mathbb{R})/F^n[-2].$$

En appliquant le foncteur (triangulé) T_∞ au triangle distingué

$$R\Gamma_{ar,c}(X,\mathbb{Z}(n)) \to R\Gamma_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}(n)) \to R\Gamma_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}/\mathbb{Z}(n)) \to$$

on obtient un triangle distingué

$$R\Gamma_{dR}(X_{\mathbb{R}}/\mathbb{R})/F^n[-2] \to R\Gamma_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}(n)) \to R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n))_{\mathbb{R}} \to . \tag{30}$$

Ce dernier triangle fournit un isomorphisme

$$\begin{aligned}
\lambda_\infty(X,n) : \mathbb{R} &\xrightarrow{\sim} \det{}_{\mathbb{R}} R\Gamma_{ar,c}(X,\tilde{\mathbb{R}}(n)) \\
&\xrightarrow{\sim} \det{}_{\mathbb{R}} R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n))_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \det{}_{\mathbb{R}} R\Gamma_{dR}(X_{\mathbb{R}}/\mathbb{R})/F^n \\
&\xrightarrow{\sim} (\det{}_{\mathbb{Z}} R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n)) \otimes_{\mathbb{Z}} \det{}_{\mathbb{Z}} R\Gamma_{dR}(X/\mathbb{Z})/F^n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

où le premier isomorphisme est induit par (29).

Définition 6.18. *La droite fondamentale est la droite*

$$\Delta(X/\mathbb{Z},n) := \det{}_{\mathbb{Z}} R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n)) \otimes_{\mathbb{Z}} \det{}_{\mathbb{Z}} R\Gamma_{dR}(X/\mathbb{Z})/F^n$$

munie de l'isomorphisme

$$\lambda_\infty(X,n) : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \Delta(X/\mathbb{Z},n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

5. Le facteur correcteur

Notation 6.19. *Soit X un schéma arithmétique propre et régulier et soit p un nombre premier. On note $X^{\mathrm{red}}_{\mathbb{F}_p}$ le sous-schéma fermé réduit maximal de $X_{\mathbb{F}_p}$. On pose*

$$R\Gamma'_W(X_{\mathbb{F}_p},\mathbb{Z}(n)) := R\Gamma_W(X^{\mathrm{red}}_{\mathbb{F}_p},\mathbb{Z}(n)) \text{ et } R\Gamma'_{dR}(X_{\mathbb{F}_p}/\mathbb{Z})/F^n := R\Gamma_{Zar}(X^{\mathrm{red}}_{\mathbb{F}_p}, L\Omega^*_{X^{\mathrm{red}}/\mathbb{Z}}/F^n)$$

si $X^{\mathrm{red}}_{\mathbb{F}_p}$ est lisse, et

$$R\Gamma'_W(X_{\mathbb{F}_p},\mathbb{Z}(n)) := R\Gamma_{Wh}(X_{\mathbb{F}_p},\mathbb{Z}(n)) \text{ et } R\Gamma'_{dR}(X_{\mathbb{F}_p}/\mathbb{Z})/F^n := R\Gamma_{eh}(X_{\mathbb{F}_p}, L\Omega^*_{\mathcal{O}^{eh}/\mathbb{Z}}/F^n)$$

sinon. On a

$$R\Gamma'_{eh}(X_{\mathbb{F}_p},\mathbb{Q}_p(n)) := R\Gamma'_W(X_{\mathbb{F}_p},\mathbb{Z}(n))\widehat{\otimes}\mathbb{Q}_p.$$

La notation précédente permet de se passer de la conjecture $\mathbf{R}(\mathbb{F}_p,\dim(X_{\mathbb{F}_p}))$ (voir Definition 5.7) lorsqu'elle n'est pas nécessaire. En effet, sous la conjecture $\mathbf{R}(\mathbb{F}_p,\dim(X_{\mathbb{F}_p}))$, on a

$$R\Gamma'_W(X_{\mathbb{F}_p},\mathbb{Z}(n)) \simeq R\Gamma_{Wh}(X_{\mathbb{F}_p},\mathbb{Z}(n)) \text{ et } R\Gamma'_{dR}(X_{\mathbb{F}_p}/\mathbb{Z})/F^n := R\Gamma_{eh}(X_{\mathbb{F}_p}, L\Omega^*_{\mathcal{O}^{eh}/\mathbb{Z}}/F^n)$$

par les théorèmes 5.9 et 5.12. La conjecture suivante est un analogue p-adique du triangle distingué fondamental

$$R\Gamma_{dR}(X_{\mathbb{R}}/\mathbb{R})/F^n[-1] \to R\Gamma_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}},\mathbb{R}(n)) \to R\Gamma(G_{\mathbb{R}},X(\mathbb{C}),(2\pi i)^n\mathbb{R}) \to$$

pour la cohomologie de Deligne.

Conjecture 6.20. $\mathbf{D}_p(X,n)$ *On a un triangle distingué de complexes de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels*

$$R\Gamma_{dR}(X_{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)/F^n[-1] \to R\Gamma_{et}(X_{\mathbb{Z}_p},\mathbb{Q}_p(n)) \to R\Gamma'_{eh}(X_{\mathbb{F}_p},\mathbb{Q}_p(n)) \to .$$

Définition 6.21. *Soit p un nombre premier et soit $X/\mathbb{Z}$ un schéma connexe régulier, plat et propre sur $\mathbb{Z}$. Alors $\mathcal{O}_X(X)$ est l'anneau des entiers d'un corps de nombres F. On dit que X est presque lisse au-dessus de p si le morphisme $X \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$ est lisse au-dessus de toutes les places $\mathfrak{p} \mid p$ de F au-dessus de p.*

THÉORÈME 6.22. *([**16**] Proposition 7.21) Si X est presque lisse au-dessus de p alors la conjecture $\mathbf{D}_p(X,n)$ est vraie.*

NOTATION 6.23. *On considère*

$$R\Gamma_{dR,c}(X[1/p]/\mathbb{Z})/F^n := \mathrm{Cone}(R\Gamma_{dR}(X/\mathbb{Z})/F^n \to R\Gamma'_{dR}(X_{\mathbb{F}_p}/\mathbb{Z})/F^n)[-1].$$

et les triangles distingués

$$R\Gamma_{dR,c}(X[1/p]/\mathbb{Z})/F^n \to R\Gamma_{dR}(X/\mathbb{Z})/F^n \to R\Gamma'_{dR}(X_{\mathbb{F}_p}/\mathbb{Z})/F^n \to$$

et

$$R\Gamma_{et,c}(X[1/p],\mathbb{Z}_p(n)) \to R\Gamma_{et,c}(X,\mathbb{Z}_p(n)) \to R\Gamma_{et}(X_{\mathbb{Z}_p},\mathbb{Z}_p(n)) \to .$$

Sous la conjecture $\mathbf{D}_p(X,n)$, on définit aussi le triangle distingué

$$R\Gamma_{W,c}(X[1/p],\mathbb{Z}(n))_{\mathbb{Q}_p} \to R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n))_{\mathbb{Q}_p} \to R\Gamma'_W(X_{\mathbb{F}_p},\mathbb{Z}(n))_{\mathbb{Q}_p} \to .$$

La conjecture $\mathbf{D}_p(X,n)$ fournit donc un analogue p-adique du triangle (30) :

$$R\Gamma_{dR}(X_{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)/F^n[-2] \to R\Gamma_{et,c}(X[1/p],\mathbb{Q}_p(n)) \to R\Gamma_{W,c}(X[1/p],\mathbb{Z}(n))_{\mathbb{Q}_p} \to .$$

Ce dernier triangle distingué fournit à son tour un isomorphisme

$$\begin{array}{lll} \lambda_p(X,n): & \left(\det_{\mathbb{Z}_p} R\Gamma_{et,c}(X[1/p],\mathbb{Z}_p(n))\right)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p \\ \xrightarrow{\sim} & \det_{\mathbb{Q}_p} R\Gamma_{et,c}(X[1/p],\mathbb{Q}_p(n)) \\ \xrightarrow{\sim} & \det_{\mathbb{Q}_p} R\Gamma_{W,c}(X[1/p],\mathbb{Z}(n))_{\mathbb{Q}_p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}\det_{\mathbb{Q}_p} R\Gamma_{dR}(X_{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)/F^n \\ \xrightarrow{\sim} & (\det_{\mathbb{Z}} R\Gamma_{W,c}(X[1/p],\mathbb{Z}(n))\otimes_{\mathbb{Z}}\det_{\mathbb{Z}} R\Gamma_{dR,c}(X[1/p]/\mathbb{Z})/F^n)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_p \end{array}$$

DÉFINITION 6.24. *On définit*

$$c_p(X,n) := \det(\lambda_p(X,n)) \in \mathbb{Q}_p^*/\mathbb{Z}_p^*.$$

Le determinant de $\lambda_p(X,n)$ est calculé avec les structures entières données, i.e. on a

$$\lambda_p\left(c_p(X,n)^{-1}\cdot \det_{\mathbb{Z}_p} R\Gamma_{et,c}(X[1/p],\mathbb{Z}_p(n))\right)$$

$$= (\det_{\mathbb{Z}} R\Gamma_{W,c}(X[1/p],\mathbb{Z}(n))\otimes_{\mathbb{Z}}\det_{\mathbb{Z}} R\Gamma_{dR,c}(X[1/p]/\mathbb{Z})/F^n)_{\mathbb{Z}_p}.$$

Si X est défini au-dessus d'un corps fini, ou encore si $n\leq 0$, alors $\mathbf{D}_p(X,n)$ est vérifiée et $c_p(X,n)$ est trivial. D'autre part, le facteur $c_p(X,n)$ est défini inconditionnellement si X est presque lisse au-dessus de p. On a le résultat suivant.

THÉORÈME 6.25. *([**16**] Proposition 5.9) Soit X un schéma arithmétique régulier et propre sur $\mathbb{Z}$ et soit $n\in\mathbb{Z}$ un entier. Alors $c_p(X,n)\equiv 1 \bmod \mathbb{Z}_p^*$ pour presque tout p.*

Si $\mathbf{D}_p(X,n)$ et $\mathbf{R}(\mathbb{F}_p,d-1)$ sont vérifiées pour tous les premiers p de mauvaise réduction, on peut définir le nombre rationel

$$C(X,n) := \prod_{p<\infty} \mid c_p(X,n)\mid_p := \prod_{p<\infty} p^{-v_p(c_p(X,n))}$$

où v_p est la valuation p-adique.

6. Ordres d'annulation et valeurs spéciales des fonctions zêta

6.1. Conjectures. Les ordres d'annulation des fonctions zêta aux entiers devraient être donnés par la cohomologie Weil-Arakelov à support compact et à coefficients réels :

CONJECTURE 6.26.

$$\mathrm{ord}_{s=n}\zeta(X,s)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\cdot i\cdot\dim_{\mathbb{R}}H^i_{ar,c}(X,\mathbb{R}(n)).$$

Cette conjecture est d'ailleurs aussi valable pour les "schémas propres sur $\overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$" :

CONJECTURE 6.27.

$$\mathrm{ord}_{s=n}\zeta(\overline{X},s)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\cdot i\cdot\dim_{\mathbb{R}}H^i_{ar}(\overline{X},\mathbb{R}(n))$$

où $\zeta(\overline{X},s)$ est la fonction zêta complétée.

La conjecture suivante exprime la valeur spéciale $\zeta^*(X,n)$ au signe près. Elle présuppose que X satisfait $\mathbf{L}(\overline{X}_{et},n)$, $\mathbf{L}(\overline{X}_{et},d-n)$, $\mathbf{AV}(\overline{X}_{et},n)$, $\mathbf{B}(X,n)$ et aussi $\mathbf{D}_p(X,n)$ et $\mathbf{R}(\mathbb{F}_p,d-1)$ pour tous les premiers p de mauvaise réduction.

CONJECTURE 6.28.

$$\lambda_\infty(\zeta^*(X,n)^{-1}\cdot C(X,n)\cdot\mathbb{Z})=\Delta(X/\mathbb{Z},n).$$

6.2. Le théorème principal.

PROPOSITION 6.29. *([**16**] Proposition 5.12) Les conjectures 6.26 et 6.27 sont équivalentes. Si $X/\mathbb{Z}$ est projectif, elles sont de plus équivalentes à la conjecture de Soulé [**59**].*

Soient $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers d'un corps de nombres F, $X/\mathcal{O}_F$ un schéma projectif lisse et $n\in\mathbb{Z}$ un entier. Pour tout nombre premier p, on pose $X_{\overline{F}}:=X\otimes_{\mathcal{O}_F}\overline{F}$ et $V_p^i(n):=H^i(X_{\overline{F}},\mathbb{Q}_p(n))$. Pour tout place finie $\mathfrak{p}\mid p$ de F on définit le complexe concentré en degrés 0 et 1 suivant :

$$C_{cris,\mathfrak{p}}(V_p^i(n)):=[D_{cris,\mathfrak{p}}(V_p^i(n))\xrightarrow{1-\phi}D_{cris,\mathfrak{p}}(V_p^i(n))].$$

Il est dit semi-simple en zéro si la composition

$$\mathrm{Ker}(1-\phi)\hookrightarrow D_{cris,\mathfrak{p}}(V_p^i(n))\twoheadrightarrow\mathrm{Coker}(1-\phi)$$

est un isomorphisme.

THÉORÈME 6.30. *([**16**] Theorem 5.26) Soient $X/\mathcal{O}_F$ un schéma projectif lisse et $n\in\mathbb{Z}$ un entier tels que $\mathbf{L}(\overline{X}_{et},n)$, $\mathbf{L}(\overline{X}_{et},d-n)$ et $\mathbf{B}(X,n)$ sont vraies pour X et n. On suppose que le complexe $C_{cris,\mathfrak{p}}(V_p^i(n))$ est semi-simple en zéro pour tout i et toute place finie $\mathfrak{p}$ de F.*

*Alors la conjecture 6.28 pour (X,n) est équivalente à la conjonction pour tous les premiers p de la conjecture de Bloch-Kato-Fontaine-Perrin-Riou [**18**] pour le motif $h(X_F)(n)$.*

6.3. Exemples et cas connus.

PROPOSITION 6.31. *Si X est de dimension ≤ 1, les conjectures 6.26 et 6.27 sont vraies pour tout $n\in\mathbb{Z}$.*

PROPOSITION 6.32. *Soit X une variété projective lisse sur un corps fini et $n\in\mathbb{Z}$ satisfaisant $\mathbf{L}(X_{et},n)$, $\mathbf{L}(X_{et},d-n)$. Alors les conjectures 6.26 et 6.28 sont vraies pour (X,n), et on a $C(X,n)=1$.*

Des calculs directs et la formule du nombre de classes analytique donne le résultat suivant.

Proposition 6.33. *([**16**] Proposition 5.34) Soit F un corps de nombres et soit $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$. La conjecture 6.28 est vraie pour $(X,1)$ et $(X,0)$, et on a $C(X,0) = C(X,1) = 1$.*

Le théorème 6.30 et des travaux de plusieurs auteurs sur la conjecture de Bloch-Kato (voir [**13**] pour un survol) donnent le résultat suivant.

Corollaire 6.34. *([**16**] Proposition 5.33, 5.34) Soit $F/\mathbb{Q}$ un corps de nombres abélien, soit $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$ et soit $n \in \mathbb{Z}$. La conjecture 6.28 est vraie pour (X,n). On a $C(X,n) = 1$ pour $n \leq 1$ et $C(X,n) = (n-1)!^{-[F:\mathbb{Q}]}$ pour $n \geq 2$.*

On explicite ci-dessous les valeurs spéciales des fonctions zêta de Dedekind prédites par la conjecture 6.28. Les résultats suivants sont prouvés en détails dans ([**16**] Section 5.8.3). Soit F un corps de nombres et soit $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$. Le régulateur de Beilinson

$$H^1(X_{et}, \mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{r_n} H^1_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(n)) \simeq \prod_{\mathfrak{p}|\infty} F_{\mathfrak{p}}/H^0(F_{\mathfrak{p}}, (2\pi i)^n\mathbb{R}) \simeq \prod_{\mathfrak{p}|\infty} H^0(F_{\mathfrak{p}}, (2\pi i)^{n-1}\mathbb{R})$$

induit un isomorphisme

$$r_{n,\mathbb{R}} : H^1(X_{et}, \mathbb{Z}(n))_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathfrak{p}|\infty} H^0(F_{\mathfrak{p}}, (2\pi i)^{n-1}\mathbb{R})$$

pour $n > 1$ et une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(X_{et}, \mathbb{Z}(1))_{\mathbb{R}} \xrightarrow{r_{1,\mathbb{R}}} \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathbb{R} \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

pour $n = 1$. Pour $n \geq 1$ on pose

$$\begin{aligned} h_n &:= |H^2(X_{et}, \mathbb{Z}(n))| \\ w_n &:= |H^1(X_{et}, \mathbb{Z}(n))_{tor}| \\ R_n &:= \mathrm{vol}(\mathrm{coker}(r_n)) \end{aligned}$$

où le volume est calculé par rapport aux $\mathbb{Z}$-structures sur l'image de $r_{n,\mathbb{R}}$ données par $\prod_{\mathfrak{p}|\infty} H^0(F_{\mathfrak{p}}, (2\pi i)^{n-1}\mathbb{Z})$ et $(\prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathbb{Z})^{\Sigma=0}$ pour $n > 1$ et $n = 1$ respectivement. On note aussi

$$\delta_{i,n} = \begin{cases} 1 & n \equiv i \mod 2 \\ 0 & n \not\equiv i \mod 2. \end{cases}$$

Pour $n \leq 0$, on a $C(X,n) = 1$ et la conjecture 6.28 affirme que

$$\zeta^*_F(n) = \pm \frac{h_{1-n} \cdot R_{1-n}}{w_{1-n}}.$$

Pour $n \geq 1$, l'isomorphisme

$$\lambda_\infty : \mathbb{R} \cong \Delta(X/\mathbb{Z}, n)_{\mathbb{R}} \cong \det_{\mathbb{R}} R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \det_{\mathbb{R}}(R\Gamma_{dR}(X/\mathbb{Z})/F^n)_{\mathbb{R}}$$

satisfait

$$\lambda_\infty\left(|D_F|^{n-1} \cdot \frac{w_n\sqrt{|D_F|}}{2^{r_1\cdot(\delta_{1,n}-\delta_{2,n})}(2\pi)^{[F:\mathbb{Q}]\cdot n - r_2 - r_1\cdot\delta_{1,n}} h_n R_n} \cdot \mathbb{Z}\right) = \Delta(X/\mathbb{Z}, n).$$

où D_F est le discriminant. Le facteur $|D_F|^{n-1}$ provient ici de la cohomologie de de Rham dérivée : on a une suite exacte de complexes ([**16**] Proposition 5.35)

$$0 \to F^1/F^n \to R\Gamma_{dR}(X/\mathbb{Z})/F^n \to \mathcal{O}_F[0] \to 0$$

où F^1/F^n est concentré en degré 1 tel que

$$|H^1(F^1/F^n)| = |D_F|^{n-1}.$$

Si $F/\mathbb{Q}$ est abélien (et conjecturalement pour tout F, voir [**16**] Proposition 5.33) alors

$$C(X,n) = (n-1)!^{-[F:\mathbb{Q}]}.$$

La conjecture 6.28 est alors équivalente à l'identité

$$\zeta_F^*(n) = (n-1)!^{-[F:\mathbb{Q}]} \cdot |D_F|^{1-n} \cdot \frac{2^{r_1\cdot(\delta_{1,n}-\delta_{2,n})}(2\pi)^{[F:\mathbb{Q}]\cdot n - r_2 - r_1\cdot\delta_{1,n}} h_n R_n}{w_n\sqrt{|D_F|}}.$$

Chapitre 7

Un programme conjectural

Les résultats et conjectures énoncés dans les chapitres 4, 5 et 6 suggèrent de compléter les conjectures 2.1 et 2.2 en conjecturant l'existence de cohomologies Weil-étale et Weil-Arakelov satisfaisant certaines propriétés. On est ainsi amener à rêver d'un formalisme cohomologique conjectural pour les schémas arithmétiques et leurs fonctions zêta. Cette section est une série de spéculations basées sur de nombreuses discussions avec Matthias Flach (mais je suis le seul responsable pour des conjectures trop optimistes ou pour une mauvaise compréhension de ce formalisme).

Dans la première section, on fixe quelques notations, pour lesquelles on n'a d'ailleurs pas de définitions suffisamment générales.

Dans la deuxième section, on décrit le formalisme cohomologique conjectural. Plus précisément, on donne la liste des propriétés attendues pour la cohomologie Weil-étale, la liste des propriétés attendues pour la cohomologie Weil-Arakelov, puis la liste des propriétés reliant les cohomologies Weil-étale et Weil-Arakelov. Ces trois listes de propriétés généralisent les définitions et résultats conditionnels obtenus dans le chapitre 6, et permettent d'exprimer les valeurs spéciales des fonctions zêta de tous les schémas séparés de type fini sur $\mathbb{Z}$. Enfin, on donne la liste des propriétés reliant la cohomologie Weil-Arakelov à la cohomologie de Deninger. La plus importante est donnée par des suites exactes longues

$$\cdots \longrightarrow H^i_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{C}(n)) \longrightarrow H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C}) \stackrel{\Theta-n\cdot\mathrm{Id}}{\longrightarrow} H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C}) \longrightarrow H^{i+1}_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{C}(n)) \longrightarrow \cdots$$

Puisque les espaces $H^i_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{C}(n))$ sont définis de manière inconditionnelle, cette suite exacte longue permet d'identifier le noyau $H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C})^{\Theta=n}$ et le conoyau $H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C})_{\Theta=n}$ de $\Theta-n\cdot\mathrm{Id}$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$. Par exemple, si $\mathcal{X}$ désigne un schéma régulier propre sur $\overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$, on devrait avoir des isomorphismes

$$CH^n(\mathcal{X})_{\mathbb{C}} \simeq H^{2n}_{ar}(\mathcal{X},\mathbb{C}(n)) \simeq H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C})^{\Theta=n} \simeq H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C})_{\Theta=n},$$

où $CH^n(\mathcal{X})_{\mathbb{C}}$ désigne le groupe de Chow-Arakelov à coefficients dans $\mathbb{C}$ défini par Gillet-Soulé. Par ailleurs, ces relations entre la cohomologie Weil-Arakelov et la cohomologie de Deninger permettraient de prouver la conjecture 6.26 sur les ordres d'annulation des fonctions zêta. Enfin, ces mêmes relations permettraient d'exprimer la droite fondamentale $\Delta(\mathcal{X}/\mathbb{Z},n)_{\mathbb{C}}$ comme "le déterminant de l'opérateur $\Theta-n\cdot\mathrm{Id}$". Cependant, on n'a pas réussi pour l'instant à dégager un argument conjectural permettant d'expliquer la conjecture 6.28 sur les valeurs spéciales (voir cependant [**11**]).

Dans la troisième section, on énonce des résultats obtenus dans les chapitres 4, 5 et 6, pouvant être vus comme des "évidences" pour l'existence de ce formalisme cohomologique.

1. Notations

1.1. On note $\mathbf{Sch}/_{\overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}}$ la catégorie formée des couples $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{X}_\infty)$ et des morphismes définis comme suit. $\mathcal{X}_{\mathbb{Z}}$ est un schéma séparé de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ au sens usuel. Pour simplifier, on considère uniquement les cas suivants :

— Soit $\mathcal{X}_\infty = \emptyset$, et on a $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_{\mathbb{Z}}, \emptyset) = \mathcal{X}_{\mathbb{Z}}$.

— Soit $\mathcal{X}_\infty \neq \emptyset$. Alors on impose que la fibre générique de $\mathcal{X}_{\mathbb{Z}}$ est projective lisse ; $\mathcal{X}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C})$ est muni d'une métrique de Kähler ω telle que $F_\infty^*(\omega) = -\omega$ où $F_\infty \in G_{\mathbb{R}}$ est la conjugaison complexe ; et $\mathcal{X}_\infty$ est le couple $(\mathcal{X}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}), \omega)$ muni de son action de $G_{\mathbb{R}}$.

Un morphisme

$$f : \mathcal{X} = (\mathcal{X}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{X}_\infty) \longrightarrow \mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{Y}_\infty)$$

est un morphisme de schémas $f_{\mathbb{Z}} : \mathcal{X}_{\mathbb{Z}} \to \mathcal{Y}_{\mathbb{Z}}$ induisant $f_\infty : \mathcal{X}_\infty \to \mathcal{Y}_\infty$ tel que, lorsque $\mathcal{X}_\infty \neq \emptyset$, le foncteur f_∞^* transforme les formes harmoniques sur $\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C})$ en formes harmoniques $\mathcal{X}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C})$ pour les métriques données.

On dit que $\mathcal{X}$ est régulier si $\mathcal{X}_{\mathbb{Z}}$ l'est. La dimension de $\mathcal{X}$ est par définition la dimension de $\mathcal{X}_{\mathbb{Z}}$. On dit que $\mathcal{X}$ est propre (resp. projectif) sur $\overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$ si $\mathcal{X}_{\mathbb{Z}}$ est propre (resp. projectif) sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ et si $\mathcal{X}_\infty \neq \emptyset$. On dit que $\mathcal{X}$ est défini sur $\mathbb{Z}$, et on écrit $\mathcal{X}/\mathbb{Z}$, lorsque $\mathcal{X}_\infty = \emptyset$.

Remarque 7.1. *Dans les chapitres 3, 4 et 6, X désignait un schéma régulier et propre sur $\mathbb{Z}$ et $\overline{X}$ désignait une compactification d'Arakelov. Dans ce chapitre, la notation $\mathcal{X}$ peut désigner un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$, par exemple $\mathcal{X} = X$; mais $\mathcal{X}$ peut aussi désigner une compactification d'Arakelov, par exemple $\mathcal{X} = \overline{X}$. On dit dans le premier cas que $\mathcal{X}$ est défini sur $\mathbb{Z}$, et dans le deuxième cas que $\mathcal{X}$ est propre sur $\overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$.*

1.2. On considère la catégorie quasi-abélienne LCA des groupes abéliens localement compacts [**26**], ainsi que la sous-catégorie pleine FLCA des groupes abéliens localement compacts de rangs finis [**26**]. On peut donc considérer les catégories dérivées bornée $\mathrm{D}^b(\mathrm{LCA})$ et $\mathrm{D}^b(\mathrm{FLCA})$ de ces catégories quasi-abéliennes. Alors la dualité de Pontryagin définit une anti-équivalence

$$(-)^D : \mathrm{D}^b(\mathrm{LCA})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}^b(\mathrm{LCA})$$

identifiant $\mathrm{D}^b(\mathrm{FLCA})^{\mathrm{op}}$ et $\mathrm{D}^b(\mathrm{FLCA})$. Si $A, B \in \mathrm{FLCA}$, alors $\underline{\mathrm{Hom}}(A, B)$, muni de la topologie compacte-ouverte, est un objet de FLCA. On peut dériver ce foncteur Hom interne [**26**]. On obtient

$$\begin{array}{rccc} R\underline{\mathrm{Hom}} : & \mathrm{D}^b(\mathrm{FLCA})^{\mathrm{op}} \times \mathrm{D}^b(\mathrm{FLCA}) & \longrightarrow & \mathrm{D}^b(\mathrm{FLCA}) \\ & (A, B) & \longmapsto & R\underline{\mathrm{Hom}}(A, B) \end{array}.$$

On définit alors le produit tensoriel dérivé par dualité de la manière suivante

$$A \otimes^L B := R\underline{\mathrm{Hom}}(A, B^D)^D.$$

Munie de ces structures, $\mathrm{D}^b(\mathrm{FLCA})$ est une catégorie symétrique monoïdale fermée [**26**]. Enfin, on définit le foncteur triangulé "complexe tangent"

$$\begin{array}{rccc} T_\infty : & \mathrm{D}^b(\mathrm{FLCA}) & \longrightarrow & \mathrm{D}^b(\mathbb{R}) \\ & C & \longmapsto & T_\infty C := R\underline{\mathrm{Hom}}(R\underline{\mathrm{Hom}}(C, \mathbb{R}/\mathbb{Z}), \mathbb{R}) \end{array}.$$

Remarque 7.2. *Dans ce chapitre $\mathbb{R}$ est toujours muni de la topologie standard. On n'utilise donc plus la notation $\tilde{\mathbb{R}}$.*

1.3. On suppose qu'il existe un complexe parfait $R\Gamma_{dR,c}(\mathcal{X}/\mathbb{Z})/F^n$ pour tout schéma arithmétique $\mathcal{X}/\mathbb{Z}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

— $R\Gamma_{dR,c}(\mathcal{X}/\mathbb{Z})/F^n$ est covariant pour les immersions ouvertes et contravariant pour les morphismes propres ;

— pour toute décomposition ouverte-fermée $\mathcal{U} \to \mathcal{X} \leftarrow \mathcal{Y}$ de schémas définis sur $\mathbb{Z}$, on a un triangle distingué

$$R\Gamma_{dR,c}(\mathcal{U}/\mathbb{Z})/F^n \to R\Gamma_{dR,c}(\mathcal{X}/\mathbb{Z})/F^n \to R\Gamma_{dR,c}(\mathcal{Y}/\mathbb{Z})/F^n \to$$

— pour $\mathcal{X}$ régulier et propre sur Spec($\mathbb{Z}$), on a $R\Gamma_{dR,c}(\mathcal{X}/\mathbb{Z})/F^n \simeq R\Gamma(\mathcal{X}_{Zar}, L\Omega^*_{\mathcal{X}/\mathbb{Z}}/F^n)$, où $R\Gamma(\mathcal{X}_{Zar}, L\Omega^*_{\mathcal{X}/\mathbb{Z}}/F^n)$ est le complexe utilisé dans le chapitre 6 ;

— si $\mathcal{X}/\mathbb{F}_q$ est un schéma séparé de type fini sur le corps fini $\mathbb{F}_q$, alors $R\Gamma_{dR,c}(\mathcal{X}/\mathbb{Z})/F^n \simeq R\Gamma_c(\mathcal{X}_{eh}, L\Omega^*_{\mathcal{O}^{eh}/\mathbb{Z}}/F^n)$ est le complexe défini dans le chapitre 5.

1.4. Enfin, on utilise (uniquement dans la propriété (3) de la section 2.1 ci-dessous) les notations suivantes. On note $\mathbb{Q}^c(n)$ le complexe de cycles de Bloch avec la convention homologique de [**23**]. C'est un complexe de faisceaux étales sur un schéma arithmétique $\mathcal{X}/\mathbb{Z}$. Si $\mathcal{X}/\mathbb{Z}$ est régulier de dimension pure d, on a $\mathbb{Q}^c(n) = \mathbb{Q}(d-n)[2d]$, où $\mathbb{Q}(d-n)$ est la notation pour le complexe de cycles utilisée dans les chapitres 4, 5 et 6. En général, $R\Gamma(\mathcal{X}, \mathbb{Q}^c(n))$ calcule l'homologie de Borel-Moore du schéma (quelconque) $\mathcal{X}$.

On utilise aussi, dans la propriété (3) ci-dessous, la notation $R\Gamma_c(\mathcal{X}_{eh}, \mathbb{Z}(n))$ pour laquelle je n'ai pas de définition. On suppose qu'il existe une telle définition de sorte que

— $R\Gamma_c(\mathcal{X}_{eh}, \mathbb{Z}(n))$ est covariant pour les immersions ouvertes et contravariant pour les morphismes propres ;

— pour toute décomposition ouverte-fermée $\mathcal{U} \to \mathcal{X} \leftarrow \mathcal{Y}$, on a un triangle distingué

$$R\Gamma_c(\mathcal{U}_{eh}, \mathbb{Z}(n)) \to R\Gamma_c(\mathcal{X}_{eh}, \mathbb{Z}(n)) \to R\Gamma_c(\mathcal{Y}_{eh}, \mathbb{Z}(n)) \to$$

— pour $\mathcal{X}$ régulier connexe et propre sur $\overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$, on a $R\Gamma_c(\mathcal{X}_{eh}, \mathbb{Z}(n)) \simeq R\Gamma(\mathcal{X}_{et}, \mathbb{Z}(n))$, où $R\Gamma(\mathcal{X}_{et}, \mathbb{Z}(n))$ est le complexe défini dans le chapitre 6 ;

— si $X/\mathbb{F}_q$ est un schéma séparé de type fini sur le corps fini $\mathbb{F}_q$, alors $R\Gamma_c(\mathcal{X}_{eh}, \mathbb{Z}(n))$ est le complexe défini dans le chapitre 5.

2. Cohomologies conjecturales

En plus de la cohomologie conjecturale de Deninger décrite dans la section 2 du chapitre 2, on conjecture l'existence de deux théories cohomologiques sur $\mathbf{Sch}/_{\overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}}$:

— *Cohomologie Weil-étale :* $R\Gamma_{W,c}(-, \mathbb{Z}(n))$ et $R\Gamma_W(-, \mathbb{Z}(n))$ qui prend ses valeurs dans la catégorie dérivée bornée $\mathrm{D}^b(\mathrm{Ab})$ des groupes abéliens, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

— *Cohomologie Weil-Arakelov :* $R\Gamma_{ar,c}(-, A(n))$ et $R\Gamma_{ar}(-, A(n))$ qui prend ses valeurs dans la catégorie dérivée bornée $\mathrm{D}^b(\mathrm{LCA})$ de la catégorie quasi-abélienne LCA des groupes abéliens localement compact, pour tout $A \in$ FLCA de rangs finis et tout $n \in \mathbb{Z}$.

2.1. Propriétés attendues. Ces trois cohomologies doivent satisfaire les propriétés suivantes.

Cohomologie Weil-étale

(1) Pour tout $\mathcal{X}$ et tout entier n, $R\Gamma_{W,c}(\mathcal{X},\mathbb{Z}(n))$ est un complexe parfait de groupes abéliens ; covariant pour les immersions ouvertes et contravariant pour les morphismes propres.

(2) Pour toute décomposition ouverte-fermée $\mathcal{U}\to\mathcal{X}\leftarrow\mathcal{Y}$, on a un triangle distingué

$$R\Gamma_{W,c}(\mathcal{U},\mathbb{Z}(n))\to R\Gamma_{W,c}(\mathcal{X},\mathbb{Z}(n))\to R\Gamma_{W,c}(\mathcal{Y},\mathbb{Z}(n))\to .$$

(3) Pour tout $\mathcal{X}$ propre régulier sur $\overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$ et tout $n\in\mathbb{Z}$ on a un triangle distingué

$$R\mathrm{Hom}(R\Gamma(\mathcal{X}_{\mathbb{Z}},\mathbb{Q}^c(n)),\mathbb{Q}[-2])\to R\Gamma(\mathcal{X}_{et},\mathbb{Z}(n))\to R\Gamma_W(\mathcal{X},\mathbb{Z}(n))\to$$

Plus généralement, pour tout $\mathcal{X}$, et tout $n\in\mathbb{Z}$ on devrait avoir un triangle distingué

$$R\mathrm{Hom}(R\Gamma(\mathcal{X}_{\mathbb{Z}},\mathbb{Q}^c(n)),\mathbb{Q}[-2])\to R\Gamma_c(\mathcal{X}_{eh},\mathbb{Z}(n))\to R\Gamma_{W,c}(\mathcal{X},\mathbb{Z}(n))\to$$

fonctoriel pour les immersions ouvertes et les morphismes propres.

(4) Pour tout $\mathcal{X}$ régulier de dimension pure d, on a une dualité parfaite de complexes parfaits dans $\mathrm{D}^b(\mathrm{Ab})$

$$R\Gamma_{W,c}(\mathcal{X},\mathbb{Z}(n))\otimes^L R\Gamma_W(\mathcal{X},\mathbb{Z}(d-n))\to R\Gamma_{W,c}(\mathcal{X},\mathbb{Z}(d))\to\mathbb{Z}[-2d-1].$$

Cohomologie Weil-Arakelov

(5) Pour tout $A\in\mathrm{FLCA}$ et tout n, $R\Gamma_{ar,c}(-,A(n))$ est covariant pour les immersions ouvertes et contravariant pour les morphismes propres. Pour tout $\mathcal{X}$ et tout n, $R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X},(-)(n))$ définit un foncteur triangulé

$$R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X},(-)(n)):\mathrm{D}^b(\mathrm{FLCA})\to\mathrm{D}^b(\mathrm{FLCA}).$$

En particulier, $R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{R}(n))$ (resp. $R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{Z}_p(n))$) est un complexe parfait de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels (resp. de $\mathbb{Z}_p$-modules), et on a un triangle distingué

$$R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{Z}(n))\to R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{R}(n))\to R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{R}/\mathbb{Z}(n))\to .$$

(6) On a une classe fondamentale $\theta\in H^1(\overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})},\mathbb{R}(0))$ telle que

$$\cdots\xrightarrow{\cup\theta}H^i_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{R}(n))\xrightarrow{\cup\theta}H^{i+1}_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{R}(n))\xrightarrow{\cup\theta}\cdots$$

est un complexe acyclique pour tout $\mathcal{X}$ et tout n, fonctoriel en $\mathcal{X}$.

(7) Pour tout $\mathcal{X}/\mathbb{Z}$ et tout n, $H^i_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{R}/\mathbb{Z}(n))$ est compact pour tout $i\in\mathbb{Z}$.

(8) Pour tout $\mathcal{X}$ régulier de dimension pure d et tout $A\in\mathrm{FLCA}$, on a $H^i(\mathcal{X},A(d))=0$ pour $i>2d+1$, un morphisme trace $H^{2d+1}_{ar,c}(\mathcal{X},A(d))\xrightarrow{\mathrm{tr}}A$, et une dualité parfaite

$$R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X},A(n))\otimes^L R\Gamma_{ar}(\mathcal{X},A^D(d-n))\to R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{R}/\mathbb{Z}(d))\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}[-2d-1]$$

dans $\mathrm{D}^b(\mathrm{FLCA})$, où $A^D:=R\underline{\mathrm{Hom}}(A,\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

(9) Pour tout $\mathcal{X}$ régulier, projectif sur $\overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$ et tout $n\in\mathbb{Z}$ on a $H^i_{ar}(\mathcal{X},\mathbb{R}(n))=0$ pour $i\neq 2n,2n+1$, et un isomorphisme

$$CH^n(\mathcal{X})_{\mathbb{R}}\simeq H^{2n}_{ar}(\mathcal{X},\mathbb{R}(n))$$

(contravariant) fonctoriel en $\mathcal{X}$, où $CH^n(\mathcal{X})_{\mathbb{R}}$ est le groupe de Chow-Arakelov à coefficients réels de $\mathcal{X}$ défini par Gillet-Soulé ([**24**] 5.1, [**25**] 3.3.3) si $\mathcal{X}$ est plat. De plus, si $\mathcal{X}$ est de dimension pure d, le morphisme

$$CH^d(\mathcal{X})_{\mathbb{R}} \simeq H^{2d}_{ar}(\mathcal{X}, \mathbb{R}(d)) \xrightarrow[\sim]{\cup\theta} H^{2d+1}_{ar}(\mathcal{X}, \mathbb{R}(d)) \xrightarrow{\mathrm{tr}} \mathbb{R}$$

coïncide avec le morphisme "degré".

(10) Pour tout $\mathcal{X}$, tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et tout nombre premier p on a

$$R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X}[1/p], \mathbb{Z}_p(n)) \simeq \mathrm{holim}\, R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X}[1/p], \mathbb{Z}/p^{\bullet}(n)) \simeq R\Gamma_{et,c}(\mathcal{X}[1/p], \mathbb{Z}_p(n))$$

où le membre de droite est la cohomologie étale p-adique à support compact. C'est faux pour la cohomologie sans support compact.

(11) Soit $\mathcal{U} \to \mathcal{X} \leftarrow \mathcal{Y}$ une décomposition ouverte-fermée et soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout premier $p < \infty$ le triangle

$$R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{U}[1/p], \mathbb{Z}_p(n)) \to R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X}[1/p], \mathbb{Z}_p(n)) \to R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{Y}[1/p], \mathbb{Z}_p(n)) \to$$

est exact. Similairement, pour $p = \infty$ le triangle

$$R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{R}(n)) \to R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{R}(n)) \to R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{R}(n)) \to$$

est exact et compatible avec le morphisme $\cup\theta : R\Gamma_{ar,c}(-, \mathbb{R}(n)) \to R\Gamma_{ar,c}(-, \mathbb{R}(n))[1]$.

Relations entre les cohomologies Weil-étale et Weil-Arakelov

(12) On a une transformation naturelle $R\Gamma_{ar,c}(-, \mathbb{Z}(n)) \to R\Gamma_{W,c}(-, \mathbb{Z}(n))$ qui est un isomorphisme pour $n \leq 0$. De plus, pour $\mathcal{X}/\mathbb{Z}$ propre régulier et tout entier n, on a un triangle distingué

$$R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}_{\mathbb{R}}/\mathbb{R})/F^n[-2] \to R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(n)) \to R\Gamma_{W,c}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(n)) \to$$

(13) Pour $\mathcal{X}/\mathbb{Z}$ propre régulier, on a un isomorphisme

$$R\Gamma_{ar}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(n)) \simeq R\Gamma_W(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(n)).$$

Par dualité, on en déduit un isomorphisme

$$\begin{aligned} R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}(n)) &\simeq R\underline{\mathrm{Hom}}(R\underline{\mathrm{Hom}}(R\Gamma_{W,c}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(n)), \mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \\ &\simeq R\Gamma_{W,c}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(n)) \otimes^L \mathbb{R}/\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(14) Pour tout $\mathcal{X}/\mathbb{Z}$ et tout n on a des identifications

$$T_\infty R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(n)) \simeq R\Gamma_{dR,c}(\mathcal{X}_{\mathbb{R}}/\mathbb{R})/F^n[-2]$$

et

$$T_\infty R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}(n)) \simeq R\Gamma_{W,c}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(n)) \otimes \mathbb{R}.$$

Si $\mathcal{X}/\mathbb{Z}$ est propre et régulier ces deux identifications sont induites par (12) et (13) respectivement. En appliquant le foncteur T_∞ au triangle (5) on obtient donc un triangle distingué

$$R\Gamma_{dR,c}(\mathcal{X}_{\mathbb{R}}/\mathbb{R})/F^n[-2] \to R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X}, \mathbb{R}(n)) \to R\Gamma_{W,c}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(n))_{\mathbb{R}} \to .$$

(15) Pour tout $\mathcal{X}$ régulier propre sur $\overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$, tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et tout entier $m > 0$, on a

$$R\Gamma_{ar}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(n)) \simeq R\Gamma_W(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(n)) \simeq R\Gamma_{et}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(n))$$

où $R\Gamma_{et}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(n))$ est le complexe défini dans le chapitre 6.

(16) Pour tout $\mathcal{X}/\mathbb{Z}$, tout n et tout nombre premier p on a un triangle distingué $R\Gamma_{dR,c}(\mathcal{X}_{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)/F^n[-2] \to R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X}[1/p],\mathbb{Q}_p(n)) \to R\Gamma_{W,c}(\mathcal{X}[1/p],\mathbb{Z}(n))_{\mathbb{Q}_p} \to$ fonctoriel en $\mathcal{X}$.

Relations entre la cohomologie Weil-Arakelov et la cohomologie de Deninger

(17) Si $\mathcal{X}$ est régulier de dimension pure d, on a une dualité parfaite Θ-équivariante :

$$H^i_{\mathrm{dyn}}(\mathcal{X},\mathcal{C}(n)) \times H^{2d-i}_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C}(d-n)) \xrightarrow{\cup} H^{2d}_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C}(d)) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbb{C}(0)$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

(18) Pour tout $\mathcal{X}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a des suites exactes longues

$$\cdots \longrightarrow H^i_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{C}(n)) \longrightarrow H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C}) \xrightarrow{\Theta-n\cdot\mathrm{Id}} H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C}) \longrightarrow H^{i+1}_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{C}(n)) \longrightarrow \cdots$$

De plus, si $\mathcal{X}$ est régulier de dimension pure d, alors le carré suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} H^{2d}_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C}(d)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Tr}"] & H^{2d+1}_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{C}(d)) \arrow[d, "\mathrm{tr}"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

On aussi une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H^i_{ar}(\mathcal{X},\mathbb{C}(m)) \longrightarrow H^i_{\mathrm{dyn}}(\mathcal{X},\mathcal{C}) \xrightarrow{\Theta-m\cdot\mathrm{Id}} H^i_{\mathrm{dyn}}(\mathcal{X},\mathcal{C}) \longrightarrow H^{i+1}_{ar}(\mathcal{X},\mathbb{C}(m)) \longrightarrow \cdots$$

telle que, si $\mathcal{X}$ est régulier de dimension pure d et $m = d-n$, alors ces deux suites exactes sont duales, via les dualités (8) et (17).

(19) Le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(\Theta - n\cdot\mathrm{Id}) \arrow[r] & H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C}) \arrow[r] & \mathrm{Coker}(\Theta - n\cdot\mathrm{Id}) \arrow[d] \\ H^i_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{C}(n)) \arrow[u] \arrow[rr, "\cup\theta"] & & H^{i+1}_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{C}(n)) \end{tikzcd}$$

commute, où les flèches verticales sont induites par la suite exacte longue (18).

(20) Pour tout $\mathcal{X}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, la flèche

$$\mathrm{Ker}(\Theta - n\cdot\mathrm{Id}) \hookrightarrow H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C}) \twoheadrightarrow \mathrm{Coker}(\Theta - n\cdot\mathrm{Id})$$

est un isomorphisme.

Relations avec la fonction zêta

(21) On a

$$\zeta(\mathcal{X},s) = \prod_{i=0}^{2d} \det{}_\infty\left(\frac{s\cdot\mathrm{Id}-\Theta}{2\pi} \mid H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C})\right)^{(-1)^{i+1}}.$$

(22) Pour tout $\mathcal{X}$ et tout entier n, l'ordre d'annulation de la fonction zêta en $s = n$ est donnée par

$$\mathrm{ord}_{s=n}\zeta(\mathcal{X},s) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \cdot i \cdot \dim_{\mathbb{R}} H^i_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{R}(n)).$$

(23) Pour tout $\mathcal{X}/\mathbb{Z}$ et tout entier n, la valeur spéciale $\zeta^*(\mathcal{X}, n)$ est déterminée au signe près par
$$\lambda_\infty(\zeta^*(\mathcal{X}, n)^{-1} \cdot C(\mathcal{X}, n) \cdot \mathbb{Z}) = \Delta(\mathcal{X}/\mathbb{Z}, n)$$
où λ_∞ et $C(\mathcal{X}, n) \in \mathbb{Q}^\times$ sont définis ci-dessous.

2.2. Les trivialisations λ_∞ et λ_p. En appliquant le foncteur triangulé T_∞ au triangle distingué de (5)
$$R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(n)) \to R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X}, \mathbb{R}(n)) \to R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}(n)) \to$$
on obtient
$$T_\infty R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(n)) \to T_\infty R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X}, \mathbb{R}(n)) \to T_\infty R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}(n)) \to$$
qui s'identifie au triangle distingué
$$R\Gamma_{dR,c}(\mathcal{X}_\mathbb{R}/\mathbb{R})/F^n[-2] \to R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X}, \mathbb{R}(n)) \to R\Gamma_{W,c}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(n))_\mathbb{R} \to$$
d'après (14) et (5) à nouveau. On obtient
$$\begin{array}{rcl} \lambda_\infty : \mathbb{R} & \xrightarrow{\sim} & \det_\mathbb{R} R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X}, \mathbb{R}(n)) \\ & \xrightarrow{\sim} & (\det_\mathbb{R} R\Gamma_{W,c}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(n))_\mathbb{R}) \otimes_\mathbb{R} (\det_\mathbb{R} R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}_\mathbb{R}/\mathbb{R})/F^n) \\ & \xrightarrow{\sim} & (\det_\mathbb{Z} R\Gamma_{W,c}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(n)) \otimes_\mathbb{Z} \det_\mathbb{Z} R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}/\mathbb{Z})/F^n) \otimes \mathbb{R} \\ & =: & \Delta(\mathcal{X}/\mathbb{Z}, n)_\mathbb{R} \end{array}$$
où le premier isomorphisme est donné par la suite exacte de (6) et le deuxième isomorphisme est induit par le dernier triangle distingué ci-dessus. De plus
$$C(X, n) := \prod_{p<\infty} |c_p(X, n)|_p \ := \prod_{p<\infty} p^{-v_p(c_p(X,n))}$$
où v_p est la valuation p-adique, $c_p(\mathcal{X}, n) := \det(\lambda_p(\mathcal{X}, n)) \in \mathbb{Q}_p^*/\mathbb{Z}_p^*$, et enfin
$$\begin{array}{ll} \lambda_p : & \big(\det_{\mathbb{Z}_p} R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X}[1/p], \mathbb{Z}_p(n))\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \\ \xrightarrow{\sim} & \det_{\mathbb{Q}_p} R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X}[1/p], \mathbb{Q}_p(n)) \\ \xrightarrow{\sim} & \det_{\mathbb{Q}_p} R\Gamma_{W,c}(\mathcal{X}[1/p], \mathbb{Z}(n))_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \det_{\mathbb{Q}_p} R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}_{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)/F^n \\ \xrightarrow{\sim} & (\det_\mathbb{Z} R\Gamma_{W,c}(\mathcal{X}[1/p], \mathbb{Z}(n)) \otimes_\mathbb{Z} \det_\mathbb{Z} R\Gamma_{dR,c}(\mathcal{X}[1/p]/\mathbb{Z})/F^n) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}_p \end{array}$$
est induit par le triangle (16).

3. Évidences et remarques

Le théorème suivant reprend des résultats obtenus dans les deux chapitres précédents. On rappelle que les conjectures $\mathbf{AV}(\overline{X}, n)$, $\mathbf{L}(\overline{X}, n)$, $\mathbf{L}(\overline{X}, d-n)$ et $\mathbf{B}(X, n)$, énoncées dans le chapitre 6, sont connues pour $\dim(X) \leq 1$, i.e. pour les courbes.

Théorème 7.3. *Soit $X/\mathbb{Z}$ un schéma propre régulier de dimension pure d, soit $\overline{X}$ une compactification et soit $n \in \mathbb{Z}$. Supposons que les conjectures $\mathbf{AV}(\overline{X}, n)$, $\mathbf{L}(\overline{X}, n)$, $\mathbf{L}(\overline{X}, d-n)$ and $\mathbf{B}(X, n)$ sont vérifiées. Alors il existe des complexes de cohomologie Weil-Arakelov $R\Gamma_{ar,c}(X, A(n))$ et $R\Gamma_{ar}(\overline{X}, A(n))$ pour $A = \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et des complexes de cohomologie Weil-étale $R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))$ et $R\Gamma_W(\overline{X}, \mathbb{Z}(n))$ tels que :*

— Les conjectures (1)–(9) et (12)–(15) sont vraies.

— *On considère (10) comme une définition de* $R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X}[1/p], \mathbb{Z}_p(n))$. *Alors la conjecture (16) est vraie si* X *est défini sur un corps fini, ou si* $n \leq 0$, *ou encore si* X *est presque lisse au-dessus de* p *(voir Définition 6.21).*
— *La conjecture (22) pour* $\overline{X}$ *est équivalente à la conjecture (22) pour* X, *qui est équivalente à la conjecture de Soulé* [**59**].
— *Si* X *est projectif lisse sur un corps fini, alors les conjectures (1)–(23) sont vraies. De plus, on a* $C(X, n) = 1$ *pour tout* n.
— *On a* $C(X, n) = 1$ *pour tout* $n \leq 0$.
— *On suppose de plus que* X *est projectif lisse sur l'anneau d'entiers* $\mathcal{O}_F$ *d'un corps de nombres et que le complexe* $C_{cris,\mathfrak{p}}(V_p^i(n))$ *est semi-simple en zéro pour tout* i *et toute place finie* $\mathfrak{p}$ *de* F. *Alors (23) est équivalente à la conjecture de Bloch-Kato* [**17**] *pour la fonction* $L(\oplus_i h^i(X_F)(n)[-i], s)$.
— *Soit* $F/\mathbb{Q}$ *un corps de nombres abélien, soit* $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$ *et soit* $n \in \mathbb{Z}$. *Alors (23) est vraie pour* (X, n). *On a de plus* $C(X, n) = (n-1)!^{-[F:\mathbb{Q}]}$ *pour* $n \geq 1$.

Remarque 7.4. *Supposons que (*[**16**] *Conjecture 2.9) est satisfaite. Alors la conjecture (8) pour* $A = \mathbb{R}$ *et* $\mathcal{X}/\mathbb{Z}$ *propre régulier est équivalente à la conjecture de Beilinson reliant cohomologie motivique et cohomologie de Deligne.*

Remarque 7.5. *Soit* $\mathcal{X}$ *régulier, projectif et plat sur* $\overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$. *La conjecture (8) pour* $A = \mathbb{R}$ *et la conjecture (9) impliquent que l'accouplement (*[**24**] *5.1.4)*

$$CH^n(\mathcal{X})_{\mathbb{R}} \otimes CH^{d-n}(\mathcal{X})_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$$

est parfait (voir aussi [**25**] *Conjecture 1).*

Remarque 7.6. *Cette remarque est une variante de* [**12**]. *Soit* $\mathcal{X}$ *régulier projectif et plat sur* $\overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$. *La suite exacte de la conjecture (18) et la conjecture 2.1.(4) donne un isomorphisme*

$$CH^n(\mathcal{X})_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^{2n}_{\mathrm{dyn}}(\mathcal{X}, \mathcal{C})^{\Theta = n}.$$

Alors la conjecture 2.1.(4) implique que $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}(x \cup *y)$ *induit un produit scalaire hermitien défini positif sur* $CH^n(\mathcal{X})_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$. *En suivant* [**12**], *on peut voir que ceci est "compatible" aux conditions (i) et (ii) de (*[**33**] *Proposition 3.1) qui impliquent la deuxième des conjectures standards arithmétiques de Gillet-Soulé (*[**25**] *Conjecture 2).*

Remarque 7.7. *Les conjectures (8) pour* $A = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ *et (15) pour* $\mathcal{X}$ *régulier propre sur* $\overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$ *impliquent immédiatement* $\mathbf{AV}(\overline{X}, n)$.

Les conjectures (18), (19) et (20), reliant cohomologie Weil-Arakelov et cohomologie de Deninger, sont suggérées entre autres par les deux remarques suivantes.

Remarque 7.8. *Les conjectures (5), (18), (20) et (21) impliquent la conjecture sur l'ordre d'annulation (22).*

Démonstration. On note $\varphi^i(n)$ l'endomorphisme $\Theta - n \cdot \mathrm{Id}$ de $H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X}, \mathcal{C})$. D'après (18) on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Coker}(\varphi^{i-1}(n)) \longrightarrow H^i_{ar,c}(\mathcal{X}, \mathbb{C}(n)) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi^i(n)) \longrightarrow 0$$

de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimensions finies (5). Grâce à (20), on obtient

$$\begin{aligned}
& \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\cdot i\cdot \dim_{\mathbb{C}} H^i_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{C}(n)) \\
= \;& \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\cdot i\cdot \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Coker}(\varphi^{i-1}(n))+\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\cdot i\cdot \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Ker}(\varphi^{i}(n)) \\
= \;& \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\cdot i\cdot \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Ker}(\varphi^{i-1}(n))+\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\cdot i\cdot \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Ker}(\varphi^{i}(n)) \\
= \;& -\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\cdot \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Ker}(\varphi^{i}(n))
\end{aligned}$$

On remarque maintenant que les conjectures (21) et (20) impliquent

$$\mathrm{ord}_{s=n}\zeta(\mathcal{X},s)=-\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\cdot \dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Ker}(\varphi^{i}(n)).$$

$\square$

Remarque 7.9. *Si* $[V\overset{d}{\to}V]$ *est un complexe de* $\mathbb{C}$*-espaces vectoriels de dimension* $\leq\infty$ *placés en degrés 0,1, tel que* $\mathrm{Ker}(d)$ *et* $\mathrm{Coker}(d)$ *sont de dimension finie, alors*

$$\det_{\mathbb{C}}[V\overset{d}{\to}V]:=\det_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ker}(d))\otimes_{\mathbb{C}}\det^{-1}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Coker}(d)).$$

Les conjectures (18), (19) et (20) permettent d'identifier $\lambda_\infty\otimes\mathbb{C}$ *à l'isomorphisme*

$$\begin{aligned}
\mathbb{C} \;&\xrightarrow{\sim}\; \bigotimes_i \det_{\mathbb{C}}^{(-1)^i}[H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C})\xrightarrow{\frac{n-\Theta}{2\pi}}H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C})] \\
&\xrightarrow{\sim}\; \det_{\mathbb{C}}R\Gamma_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{C}(n)) \\
&\xrightarrow{\sim}\; \Delta(\mathcal{X}/\mathbb{Z},n)_{\mathbb{C}}
\end{aligned}$$

où le premier isomorphisme est induit par semi-simplicité (20) et le deuxième isomorphisme par la suite exacte longue (18). La conjecture (21) semble alors "suggérer" (23).

Remarque 7.10. *Soit* $\mathcal{X}/\mathbb{Z}$ *un schéma séparé de type fini et soit* $\mathcal{U}\to\mathcal{X}\leftarrow\mathcal{Y}$ *une décomposition ouverte fermée. Si la conjecture la conjecture (23) en* $s=n$ *est vraie pour deux des schémas* $(\mathcal{U},\mathcal{X},\mathcal{Y})$ *alors elle est vraie pour le troisième. En effet, les triangles distingués (16) et (14) font intervenir des complexes de cohomologie à support compact qui donnent lieu à des triangles distingués pour les décompositions ouverte-fermées d'après (2) et (11).*

4. Quelques suites exactes

Pour tout $\mathcal{X}$, tout n et tout i, la conjecture (18) donne des morphismes

$$H^i_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{Z}(n))\longrightarrow H^i_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{R}(n))\otimes\mathbb{C}\longrightarrow H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C})^{\Theta=n}.$$

Soit $\mathcal{X}$ régulier projectif sur $\overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$ de dimension d et soit $i=2n$. On obtient un isomorphisme

$$CH^n(\mathcal{X})_{\mathbb{R}}\otimes\mathbb{C}\simeq H^{2n}_{ar}(\mathcal{X},\mathbb{R}(n))\otimes\mathbb{C}\xrightarrow{\sim}H^{2n}_{\mathrm{dyn}}(\mathcal{X},\mathcal{C})^{\Theta=n}$$

tel que la composition

$$CH^d(\mathcal{X})_{\mathbb{R}}\otimes\mathbb{C}\simeq H^{2d}_{ar}(\mathcal{X},\mathbb{R}(n))\otimes\mathbb{C}\xrightarrow{\sim}H^{2d}_{\mathrm{dyn}}(\mathcal{X},\mathcal{C})^{\Theta=d}\xrightarrow{\mathrm{Tr}}\mathbb{C}$$

est le morphisme "degré". Le morphisme

$$H^{2n}_{ar}(\mathcal{X},\mathbb{Z}(n)) \longrightarrow CH^n(\mathcal{X})_{\mathbb{R}}\otimes\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^{2n}_{\mathrm{dyn}}(\mathcal{X},\mathcal{C})^{\Theta=n}$$

généralise le morphisme

$$\mathrm{Pic}(\overline{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)}) \to H^2_{\mathrm{dyn}}(\overline{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)},\mathcal{C})^{\Theta=1}$$

considéré dans ([**6**] 7.31).

Soit maintenant $\mathcal{X}/\mathbb{Z}$ un schéma connexe de dimension d, régulier et propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, et soit $n\in\mathbb{Z}$ un entier. On considère la suite exacte (18)

$$\cdots \longrightarrow H^i_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{R}(n))\otimes\mathbb{C} \longrightarrow H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C}) \xrightarrow{\Theta-n\cdot\mathrm{Id}} H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C}) \longrightarrow H^{i+1}_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{R}(n))\otimes\mathbb{C} \longrightarrow \cdots$$

La description de

$$\cup\theta : H^i_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{R}(n))\otimes\mathbb{C} \longrightarrow H^{i+1}_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{R}(n))\otimes\mathbb{C}$$

ainsi que (19) et (20) permettent de scinder cette suite exacte longue. On obtient les suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow H^i_c(\mathcal{X},\mathbb{R}(n))\otimes\mathbb{C} \longrightarrow H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C}) \xrightarrow{\Theta-n\cdot\mathrm{Id}} H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C}) \longrightarrow H^i_c(\mathcal{X},\mathbb{R}(n))\otimes\mathbb{C} \longrightarrow 0,$$

où $H^i_c(\mathcal{X},\mathbb{R}(n))$ est la cohomologie du complexe $R\Gamma_c(\mathcal{X},\mathbb{R}(n))$ défini comme la fibre homotopique du régulateur (voir Section 3.1). On a donc un isomorphisme

$$H^i_c(\mathcal{X},\mathbb{R}(n))\otimes\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C})^{\Theta=n}.$$

Dualement, la deuxième suite exacte de (18)

$$\cdots \longrightarrow H^j_{ar}(\mathcal{X},\mathbb{R}(m))\otimes\mathbb{C} \longrightarrow H^j_{\mathrm{dyn}}(\mathcal{X},\mathcal{C}) \xrightarrow{\Theta-m\cdot\mathrm{Id}} H^j_{\mathrm{dyn}}(\mathcal{X},\mathcal{C}) \longrightarrow H^{j+1}_{ar}(\mathcal{X},\mathbb{R}(m))\otimes\mathbb{C} \longrightarrow \cdots$$

se scinde en les suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow H^j(\mathcal{X},\mathbb{R}(m))\otimes\mathbb{C} \longrightarrow H^j_{\mathrm{dyn}}(\mathcal{X},\mathcal{C}) \xrightarrow{\Theta-m\cdot\mathrm{Id}} H^j_{\mathrm{dyn}}(\mathcal{X},\mathcal{C}) \longrightarrow H^j(\mathcal{X},\mathbb{R}(m))\otimes\mathbb{C} \longrightarrow 0,$$

où $H^j(\mathcal{X},\mathbb{R}(m)) := H^j(\mathcal{X},\mathbb{Z}(m))_{\mathbb{R}}$ est la cohomologie motivique usuelle. On obtient l'isomorphisme

$$H^j(\mathcal{X},\mathbb{R}(m))\otimes\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^j_{\mathrm{dyn}}(\mathcal{X},\mathcal{C})^{\Theta=m}$$

prédit dans ([**6**] 7.28).

Soit maintenant $n\leq 0$. La flèche

$$H^i_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{Z}(n)) \longrightarrow H^i_{W,c}(\mathcal{X},\mathbb{Z}(n))$$

est un isomorphisme d'après (12). En particulier, $H^i_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{Z}(n))$ est un groupe abélien de type fini et on a les isomorphismes (valables pour $\mathcal{X}/\mathbb{Z}$ arbitraire)

$$H^i_{W,c}(\mathcal{X},\mathbb{Z}(n))\otimes\mathbb{R} \xleftarrow{\sim} H^i_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{Z}(n))\otimes\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} H^i_{ar,c}(\mathcal{X},\mathbb{R}(n))$$

d'après (7). Alors (18) donne une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H^i_{W,c}(\mathcal{X},\mathbb{Z}(n))\otimes\mathbb{C} \longrightarrow H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C}) \xrightarrow{\Theta-n\cdot\mathrm{Id}} H^i_{\mathrm{dyn,c}}(\mathcal{X},\mathcal{C}) \longrightarrow H^{i+1}_{W,c}(\mathcal{X},\mathbb{Z}(n))\otimes\mathbb{C} \longrightarrow \cdots$$

induisant un isomorphisme

$$\bigotimes_i \det{}^{(-1)^i}_{\mathbb{C}}[H^i_c(\mathcal{X},\mathcal{C}) \xrightarrow{\frac{n-\Theta}{2\pi}} H^i_c(\mathcal{X},\mathcal{C})] \xrightarrow{\sim} \left(\bigotimes_i \det{}^{(-1)^i}_{\mathbb{Z}} H^i_{W,c}(\mathcal{X},\mathbb{Z}(n))\right)_{\mathbb{C}}$$

En utilisant (21) on peut voir $\zeta^*(\mathcal{X},n)^{-1}$ comme un "générateur canonique" du membre de gauche. La conjecture (23) affirme que l'image de $\zeta^*(\mathcal{X},n)^{-1}$ dans le membre de droite est un générateur de la droite fondamentale

$$\bigotimes_i \det_{\mathbb{Z}}^{(-1)^i} H^i_{W,c}(\mathcal{X},\mathbb{Z}(n)).$$

Bibliographie

[1] Artin, M. ; Grothendieck, A. ; Verdier, J.L. : *Theorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4).* Springer, 1972, Lecture Notes in Math 269, 270, 271.

[2] Bloch, S. : *Algebraic cycles and the Beilinson conjectures.* The Lefschetz centennial conference, Part I (Mexico City, 1984), 65–79, Contemp. Math., 58, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[3] Borel, A. : *Stable real cohomology of arithmetic groups.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 7 (1974), 235–272 (1975).

[4] Deninger, C. : *On the* Γ*-factors attached to motives.* Invent. Math. 104 (1991), no. 2, 245–261.

[5] Deninger, C. : *Local L-factors of motives and regularized determinants.* Invent. Math. 107 (1992), no. 1, 135–150.

[6] Deninger, C. *Motivic L-functions and regularized determinants.* Motives (Seattle, WA, 1991), 707–743, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[7] Deninger, C. : *Evidence for a cohomological approach to analytic number theory.* First European Congress of Mathematics, Vol. I (Paris, 1992), 491–510, Progr. Math., 119, Birkhauser, Basel, 1994.

[8] Deninger, C. : *Motivic L-functions and regularized determinants. II.* Arithmetic geometry (Cortona, 1994), 138–156, Sympos. Math., XXXVII, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[9] Deninger, C. : *Some analogies between number theory and dynamical systems on foliated spaces.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998). Doc. Math. 1998, Extra Vol. I, 163–186.

[10] Deninger, C. : *Number theory and dynamical systems on foliated spaces.* Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 103 (2001), no. 3, 79–100.

[11] Deninger, C. : *Analogies between analysis on foliated spaces and arithmetic geometry.* Groups and analysis, 174–190, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 354, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.

[12] Deninger, C. : *The Hilbert-Polya strategy and height pairings.* Casimir force, Casimir operators and the Riemann hypothesis, 275–283, Walter de Gruyter, Berlin, 2010.

[13] Flach, M. : *The equivariant Tamagawa number conjecture : a survey.* With an appendix by C. Greither. Contemp. Math., 358, 79–125, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[14] Flach, M. : *Cohomology of topological groups with applications to the Weil group.* Compositio Math. 144 (3) (2008), 633–656.

[15] Flach, M., Morin, B. : *On the Weil-étale topos of regular arithmetic schemes.* Documenta Math. 17 (2012) 313–399.

[16] M. Flach, B. Morin, *Weil-étale cohomology and Zeta-values of proper regular arithmetic schemes*, Preprint (2016). arXiv :1605.01277.

[17] J.M. Fontaine, *Valeurs spéciales des fonctions L des motifs*, Séminaire Bourbaki 751, (1992).

[18] Fontaine, J-M., Perrin-Riou, B. : *Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L.* Motives (Seattle, WA, 1991), 599–706, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[19] Geisser, T. : *Motivic cohomology, K-theory and topological cyclic homology.* Handbook of K-theory. Vol. 1, 193–234.

[20] Geisser, T. : *Weil-étale cohomology over finite fields.* Math. Ann. 330 (4) (2004), 665–692.

[21] Geisser, T. : *Motivic cohomology over Dedekind rings.* Math. Z. 248 (4) (2004), 773–794.

[22] Geisser, T. : *Arithmetic cohomology over finite fields and special values of ζ-functions.* Duke Math. J. 133 (2006), no. 1, 27–57.

[23] Geisser, T. : *Duality via cycle complexes.* Ann. of Math. (2) 172 (2) (2010), 1095–1126

[24] Gillet, H. ; Soulé, C. : *Arithmetic intersection theory.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 72 (1990), 93–174.

[25] Gillet, H. ; Soulé, C. : *Arithmetic analogs of the standard conjectures.* Motives (Seattle, WA, 1991), 129–140, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[26] N. Hoffmann, M. Spitzweck, *Homological algebra with locally compact abelian groups.* Adv. Math. 212 (2007), no. 2, 504–524.

[27] Holmstrom, A ; Scholbach, J. : *Arakelov motivic cohomology I.* J. Algebraic Geom. 24 (2015), no. 4, 719–754.

[28] Illusie, L. : *Complexe cotangent et déformations. I.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 239. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[29] Illusie, L. : *Complexe cotangent et déformations. II.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 283. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[30] Kahn, B. : *Algebraic K-theory, algebraic cycles and arithmetic geometry.* Handbook of K-theory. Vol. 1, 351–428, Springer, Berlin, 2005.

[31] Kahn, B. : *Équivalences rationnelle et numérique sur certaines variétés de type abélien sur un corps fini.* Ann. Sci. école Norm. Sup. (4) 36 (6) (2003), 977–1002.

[32] Knudsen, F., Mumford, D. : *The projectivity of the moduli space of stable curves I : Preliminaries on 'det' and 'Div'.* Math. Scand. 39 (1976), 19–55

[33] Künnemann, K. : *Some remarks on the arithmetic Hodge index conjecture.* Compositio Math. 99 (1995), no. 2, 109–128.

[34] Levine, M. : *K-theory and motivic cohomology of schemes.* Preprint (1999). http ://www.math.uiuc.edu/K-theory/336/

[35] Levine, M. : *Techniques of localization in the theory of algebraic cycles.* J. Algebraic Geom. 10 (2) (2001), 299–363.

[36] Lichtenbaum, S. : *Values of zeta-functions, étale cohomology, and algebraic K-theory.* Lecture Notes in Math., Vol. 342, 489–501, Springer, Berlin, 1973.

[37] Lichtenbaum, S. : *Values of zeta-functions at nonnegative integers.* Number theory, Noordwijkerhout 1983 (Noordwijkerhout, 1983), 127–138, Lecture Notes in Math., 1068, Springer, Berlin, 1984.

[38] Lichtenbaum, S. : *The Weil-étale topology on schemes over finite fields.* Compositio Math. 141 (3) (2005), 689–702.

[39] Lichtenbaum, S. : *The Weil-étale topology for number rings.* Ann. of Math. (2) 170 (2) (2009), 657–683.

[40] Lichtenbaum, S. : *Euler characteristics and special values of zeta-functions.* Motives and algebraic cycles, 249–255, Fields Inst. Commun., 56, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[41] Lichtenbaum, S. : *Special Values of Zeta Functions of Schemes.* Preprint (2017). arXiv :1704.00062.

[42] Manin, Y. : *Lectures on Zeta functions and motives (according to Deninger and Kurokawa).* Astérisque No. 228 (1995), 4, 121–163.

[43] Milne, J. S. : *Values of Zeta functions of varieties over finite fields.* Amer. J. Math. 108 (1986), no. 2, 297–360.

[44] Milne, J. : *Arithmetic duality theorems.* Perspectives in Mathematics 1, Academic Press, Inc., Boston, Mass., 1996.

[45] Morin, B. : *Sur le topos Weil-étale d'un corps de nombres.* Thèse. Université Bordeaux 1, 2008.

[46] Morin, B. : *The Weil-étale fundamental group of a number field I.* Kyushu J. Math. 65 (2011), no. 1, 101–140.

[47] Morin, B. : *The Weil-étale fundamental group of a number field II.* Selecta Math. (N.S.) 17 (2011), no. 1, 67–137.

[48] Morin, B. : *Zeta functions of regular arithmetic schemes at $s = 0$.* Duke Math. J. 163 (2014), no. 7, 1263–1336.

[49] Morin, B. : *A remark on Gamma factors and local Weil-groups.* Preprint (2015).

[50] Morin, B. : *Milne's correcting factor and derived de Rham cohomology.* Documenta Math. 21 (2016) 39–48.

[51] Morin, B. : *Milne's correcting factor and derived de Rham cohomology II.* Preprint (2016).

[52] Morin, B. : *Absolute motives.* Preprint.

[53] Saito, T. : *The sign of the functional equation of the L-function of an orthogonal motive.* Invent. Math. 120 (1995), no. 1, 119–142.

[54] Sato, K. : *p-adic étale Tate twists and arithmetic duality.* Ann. Sci. école Norm. Sup. (4) 40 (2007), no. 4, 519–588.

[55] Scholbach, J. : *Arakelov motivic cohomology II.* J. Algebraic Geom. 24 (2015), no. 4, 755–786.

[56] Scholbach, J. : *Special L-values of geometric motives.* To appear in Asian Journal of Mathematics.

[57] Serre, J.P. : *Zeta and L functions.* 1965 Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963) pp. 82–92 Harper and Row, New York.

[58] Serre, J.P. : *Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures).* Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 11, n°2 (1969-1970), exp n°19, p. 1–15.

[59] Soulé, C. : *K-théorie et zéros aux points entiers de fonctions zêta*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983), 437–445.

[60] Tate, J. : *Number theoretic background.* Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, pp. 3–26, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[61] Weil, A. : *Sur la théorie du corps de classes.* J. Math. Soc. Japan 3, (1951). 1–35.