$N°$d'ordre : 2517

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par Thomas BRÉLIVET

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

TOPOLOGIE DES POLYNÔMES, SPECTRE ET VARIANCE DU SPECTRE

Soutenue le : 25 juin 2002

Après avis de :

C. SABBAH, Directeur de recherche	Ecole Polytechnique	Rapporteur
M. GRANGER, Professeur	Université d'Angers	Rapporteur

Devant la commission d'examen formée de :

P. CASSOU-NOGUÈS, Professeur	Université Bordeaux 1	Rapporteur
A. DIMCA, Professeur	Université Bordeaux 1	Directeur
M. GRANGER, Professeur	Université d'Angers	
C. SABBAH, Directeur de recherche	Ecole Polytechnique	Président

- 2002 -

Remerciements

L'étude des polynômes et des variétés algébriques a conduit beaucoup de mathématiciens vers des contrées nouvelles. Alexandru Dimca m'a permis de voir et d'entrer dans plusieurs de ces contrées. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie Michel Granger et Claude Sabbah pour leur travail de relecture de cette thèse, pour leurs remarques ainsi que pour leur présence dans le jury.

Je remercie Pierrette Cassou-Noguès pour son cours de DEA sur les singularités de courbes planes, pour avoir toujours répondu avec enthousiasme à mes questions et pour m'avoir donné des conseils par la même occasion.

Je remercie Sylvain Maugeais d'avoir toujours été là pour répondre à mes questions diverses et variées. Lui aussi m'en a posées !

Je remercie Guillaume Pagot mon collègue de bureau pour m'avoir supporté pendant toute cette période ainsi que pour les services qu'il m'a rendus.

Je remercie Carine Reydy pour sa présence et les services rendus (quelques fois malgré elle !).

Je remercie Vincent Torri pour sa bonne humeur constante et bien que cela ne soit pas achevé, d'avoir accepté de m'aider à concevoir un programme de calculs de paires spectrales. Cela conduira très certainement à de nouvelles découvertes.

Pour finir, je remercie toutes les personnes non citées précédemment et qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de cette thèse.

Table des matières

Introduction

Soient X une variété algébrique complexe lisse de dimension $n+1$, S une courbe algébrique complexe lisse et $f : X \to S$ un morphisme entre X et S. Sur X et S on considère la topologie forte induite par celle de $\mathbb{C}$.

On sait qu'il existe un ensemble fini B inclus dans S tel que

$$f_{|f^{-1}(S\setminus B)} : f^{-1}(S \setminus B) \to S \setminus B$$

soit une fibration topologique localement triviale (voir Verdier [Ve]).

Si $s \in S$, on note F_s la fibre de f au-dessus de s et F la fibre de la fibration $f_{|f^{-1}(S\setminus B)}$.

A cette fibration on associe la représentation de monodromie

$$\rho^* : \pi_1(S \setminus B, b_0) \to \mathrm{Aut}(H^q(F, \mathbb{Q})),$$

où b_0 est quelconque dans $S \setminus B$ et $q \in \mathbb{N}$.

Le but de cette thèse est une étude (non exhaustive!) de la «structure» de cette représentation.

Pour une raison technique, il est utile de considérer $\overline{X}$ et $\overline{S}$ des compactifications lisses de X et S respectivement, un morphisme $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{S}$ qui prolonge f et $\overline{B} = \overline{S} \setminus S \cup B$.

Dans le chapitre 1 section 1.2, on commence par rappeler différentes approches de la notion de cycles évanescents. En effet, pour le faisceau constant $\mathbb{Q}_X$ et pour l'application f, on a les notions de cycles évanescents suivantes :

(i) la notion générale introduite par Deligne [De],

(ii) les définitions plus concrètes introduites par Neumann-Norbury [NN1] pour le cas affine $X = \mathbb{C}^{n+1}$, $S = \mathbb{C}$ et par Siersma-Tibăr [ST2] en général.

Ces différentes approches nous permettent de comprendre la relation entre le local et le global à la fois au niveau de X et de S.

Dans la section 1.3 nous commençons par expliquer la relation entre les définitions (i) et (ii). En faisant cela, nous dégageons une classe spéciale d'applications, les applications sympa (voir définition 1.2.14), qui jouissent de propriétés analogues au cas affine. Cette classe d'applications a aussi des propriétés intéressantes dans la théorie des D-modules, voir Dimca, Saito [DS1] et Sabbah [Sab1], [Sab2].

Dans la section 1.4, nous montrons certains résultats de connexité relative qui sont l'analogue faisceautique des résultats obtenus par Siersma et Tibăr [ST1], [ST2], [T], par Neumann et Norbury [NN1] et plus récemment, par Hamm [Ham] dans un contexte faisceautique (faisceaux pervers sur $\mathbb{Z}$).

On obtient aussi

(i) des généralisations des théorèmes des cycles invariants locaux et globaux obtenus par Artal-Bartolo, Cassou-Noguès et Dimca [ACD], Neumann et Norbury [NN1], Michel et Weber [MW], voir section 1.4.

(ii) certaines formules utiles pour la caractéristique d'Euler des fibres de l'application f, voir section 1.5.

Dans le chapitre 2, on ajoute une structure sur les groupes de cohomologie des fibres de f : la structure de Hodge mixte (théorie initiée par Deligne). On obtient ainsi au-dessus de $S \setminus B$ une variation de structures de Hodge mixtes dont on sait que l'on peut prendre les limites en les points de $\overline{B}$.

Ces limites ont permis à Steenbrink il y a 25 ans de définir le spectre (ainsi que les paires spectrales) d'une singularité d'hypersurface isolée (voir [St1]) puis Steenbrink lui-même, Varchenko (voir [V]), Steenbrink-Némethi et d'autres ont obtenu des résultats très intéressants motivés principalement par une conjecture faite par Arnold (voir [AGV] et [St2] pour plus de détails). Une raison pour laquelle on considère les paires spectrales ou le spectre est que ceux-ci contiennent des informations sur la monodromie d'une singularité isolée.

Le calcul du spectre d'une singularité non dégénérée par rapport à son polyhèdre de Newton est connu de Steenbrink [St1], et Saito [Sai2]. En dimension deux, Schrauwen, Steenbrink et Stevens [SSS] ont montré en particulier comment calculer les paires spectrales d'une singularité de courbe plane à partir de sa résolution (ce qu'ils donnent est en réalité plus précis).

Il y a quelques années, Sabbah [Sab4] a défini le spectre de la monodromie à l'infini d'un polynôme modéré, suivant approximativement la même approche que celle de Scherck et Steenbrink [SS] (dans le cas local) en outrepassant des difficultés provenant de la situation globale et non propre à l'aide de propriétés profondes des D-modules associés.

Le cas global et non dégénéré par rapport au polyèdre de Newton est connu de Sabbah [Sab4] et de Douai [Do2]. Dans un cadre plus général, les fonctions Zeta ont été calculées par Libgober and Sperber [LS].

Ici nous montrons comment calculer les paires spectrales d'une application polynomiale dont la fibre générale est connexe. Ces paires spectrales sont calculées comme dans le cas local à l'aide de la résolution à l'infini de la fibre générale.

Dans le cas d'un polynôme non dégénéré par rapport à son polygone de Newton nous donnons une nouvelle formulation du spectre qui tient compte des propriétés arithmétiques du polygone et qui va nous permettre dans le chapitre suivant de faire apparaître naturellement les sommes de Dedekind.

Dans le chapitre 3 on s'intéresse à la variance du spectre.

Soit f un germe de fonction analytique en 0 définissant une singularité isolée ou une application polynomiale à fibre générique connexe. Dans la section 2.2, on a défini le spectre de f que l'on note et que l'on écrit ici sous la forme

$$\mathrm{Sp}(f) = (\alpha_1) + \cdots + (\alpha_\mu),$$

avec $-1 < \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_\mu \leq n$.
On note

$$V = V(f) = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{\mu} \left(\alpha_i - \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_\mu}{\mu} \right)^2$$

la variance du spectre $\mathrm{Sp}(f)$.

Lors de la conférence sur les singularités à l'institut Newton à Cambridge, en 2000, Hertling nous a proposé cette surprenante conjecture :

Conjecture 0.0.1 ([H]) *Pour toute singularité d'hypersurface isolée*

$$V \leq \frac{\alpha_\mu - \alpha_1}{12}.$$

Cette conjecture était à l'époque vérifiée pour beaucoup d'exemples (les singularités simples, unimodales et bimodales dans la classification de Arnold) et seulement prouvée dans le cas des singularités de polynômes quasi-homogènes où l'on a en réalité une égalité (voir [H] pour une preuve théorique utilisant les variétés de Frobenius et [Dim] pour une preuve élémentaire basée sur des formules de [St1]).

Lors de la même conférence, Dimca a suggéré une conjecture duale pour les polynômes faiblement modérés, voir [Dim] ou le paragraphe 2.3.2.

Conjecture 0.0.2 ([Dim]) *Pour tout polynôme faiblement modéré*

$$V \geq \frac{\alpha_\mu - \alpha_1}{12}.$$

Peu de temps après cela, M. Saito a prouvé que la Conjecture 0.0.1 est vraie pour toutes les singularités irréductibles de courbes planes.

Dans ce chapitre, on va montrer les théorèmes suivants.

Théorème 0.0.3 *La conjecture 0.0.2 (resp. Conjecture 0.0.1) est vraie pour tous les polynômes irréductibles à l'infini* $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *(resp. singularités* $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *irréductibles). On a égalité si et seulement* f *est une déformation négative (resp. positive) d'un polynôme quasi-homogène définissant une singularité isolée.*

Théorème 0.0.4 *La conjecture 0.0.2 (resp. Conjecture 0.0.1) est vraie pour tous les polynômes* $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *(resp. singularités* $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$*) qui sont non dégénéré(e)s par rapport au polygone de Newton et commodes. On a égalité si et seulement* f *est une déformation négative (resp. positive) d'un polynôme quasi-homogène définissant une singularité isolée.*

Les situations globales et locales sont en réalité traitées par une même formule qui nous permet de répondre par l'affirmative aux deux conjectures. Dans le cas non dégénéré la nouvelle formule que l'on a donnée du spectre dans le chapitre 2 s'est avérée très utile dans la démonstration du théorème 0.0.4.

Comme on a une description explicite du spectre dans le cas non dégénéré en dimension quelconque due à C. Sabbah (voir aussi A. Douai), on espère, par une généralisation de la méthode présentée ici, pouvoir ainsi prouver les deux conjectures. Dans cette optique le cas général d'une singularité isolée semble nettement plus difficile.

Chapitre 1

Topologie des fonctions régulières et cycles évanescents

1.1 Introduction

Soit $f : X \to S$ un morphisme non constant entre variétés algébriques complexes lisses, X de dimension $n+1$ et S une courbe. On sait qu'il existe un ensemble fini $B = \{b_1, \cdots, b_m\}$ tel que

$$f : X \backslash f^{-1}(B) \to S \backslash B$$

soit une fibration topologique localement triviale. On choisit B minimal ayant cette propriété. On note $F_b = f^{-1}(b)$ la fibre au-dessus du point b et $N(F_b) = f^{-1}(D_\epsilon(b))$ le tube autour de la fibre F_b, $D_\epsilon(b)$ étant un disque fermé plongé dans S, de centre b et suffisamment petit. Les fibres F_{b_i}, $i = 1, ..., m$ sont dites fibres irrégulières et F_b pour $b \notin B$ fibres régulières.

Dans ce chapitre et dans le reste de la thèse, tous les groupes de cohomologie que l'on considère seront à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

Le but de ce chapitre est de donner des résultats d'annulation des groupes de cohomologie associés à $f : X \to S$, d'avoir des résultats permettant de calculer la dimension des espaces des cycles invariants locaux et globaux et enfin de calculer la caractéristique d'Euler des fibres de f.

Dans la section 1.2 on commence par donner différentes approches des cycles évanescents : celle de Deligne (foncteur des cycles évanescents) puis celle de Neumann et Norbury ainsi que Siersma et Tibăr (q-(co)cycles évanescents). Nous montrons ensuite comment ces approches sont reliées.

Dans la proposition 1.2.10 nous donnons diverses caractérisations du fait que le faisceau $R^q f_*(\mathbb{Q}_X)$ n'a pas de section à support fini et nous nommons application sympa toute application qui vérifie l'une des propriétés de la proposition 1.2.10 pour tout entier q.

Dans l'étude du foncteur des cycles évanescents, il est utile d'introduire une compactification $\overline{f} : \overline{X} \to S$ de $f : X \to S$ avec $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ plongement de X dans $\overline{X}$. Cette compactification nous permet d'utiliser la formule du changement de base et de définir la «dimension» $d(\overline{f})$ du support du complexe de faisceaux $\varphi_{t_b \circ \overline{f}}(Rj_*\mathbb{Q}^*)$, où t_b est une coordonnée locale, afin d'avoir dans la proposition 1.3.2 (section 1.3) un résultat d'annulation des q-(co)cycles évanescents en fonction de la dimension $d(\overline{f})$ et de n. La proposition 1.3.4 donne, pour une application sympa, l'annulation des groupes de cohomologie à support compact en fonction de l'annulation des groupes de cohomologie de la fibre générique. Le théorème 1.3.5 donne l'annulation des groupes de cohomologie relative des fibres de f par rapport à X en fonction de n et de $d(\overline{f})$ lorsque le plongement $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ est un morphisme affine.

Le théorème 1.4.1 donne une relation de récurrence sur dimKer $(T_b^{q-1} - 1)$ où T_b est la monodromie associée à un tour dans le sens trigonométrique autour du point b de S. Le théorème 1.4.2 donne une relation de récurrence sur dim$H^q(F)^{\mathrm{inv}}$ la partie invariante de la cohomologie par rapport à l'action de la monodromie du groupe fondamental $\pi_1(S^*)$.

Le théorème 1.5.1 donne $\chi(F)$ en fonction de $\chi(X)$, $\chi(S)$ (lorsque $\chi(S) \neq 0$), et de la dimension dim$V^q(b)$ des q-(co)cycles évanescents.

La remarque 1.6.5 nous dit que pour avoir $d(\overline{f})$ minimal il faut parfois choisir une compaction $\overline{X}$ telle que $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ soit non affine.

1.2 Comparaison de différentes notions de cycles évanescents

Définition 1.2.1 *Soit $b \in B$, $\epsilon > 0$ suffisamment petit, $b' \in D_\epsilon^*(b) = D_\epsilon(b) \backslash \{b\}$. On appelle $V^q(b) = H^{q+1}(N(F_b), F_{b'})$ [1] les $q-$(co)cycles évanescents de l'application f au point $b \in B$.*

Remarque 1.2.2 La définition ne dépend pas du choix de $b' \in D_\epsilon^*(b)$ ou de $\epsilon > 0$.

Soit $b_0 \in S \backslash \cup_{i=1}^m D_\epsilon(b_i)$ une valeur de référence pour f. On choisit des chemins γ_i joignant b_0 à $D_\epsilon(b_i)$ tels que $\gamma_i \cap \gamma_j = b_0$ pour $i \neq j$. Soit P l'union de ces chemins et D l'union des disques autour des valeurs irrégulières de f. On note aussi $F = f^{-1}(P)$ qui se rétracte par déformation sur la fibre régulière F_{b_0}.

Maintenant, on suppose $S = \mathbb{C}$. Comme X se rétracte par déformation sur $f^{-1}(P \cup D)$, on a alors par excision la proposition suivante, voir [Br], [ST2], [NN1] pour le cas $X = \mathbb{C}^{n+1}$ et [ST2] pour le cas général.

[1] Les groupes de cohomologie considérés ici sont à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

Proposition 1.2.3 *Si $S=\mathbb{C}$, on a*

(i)
$$H^{q+1}(X,F)=\bigoplus_{b\in B}H^{q+1}(N(F_b),F_{b'})=\bigoplus_{b\in B}V^q(b),$$

(ii)
$$H^{q+1}(X,N(F_b))=\bigoplus_{\substack{c\in B\\ c\neq b}}V^q(c),$$

pour tout $b\in B$,

(iii) la suite exacte longue du triplet $(X,N(F_b),F_{b'})$ se décompose en suites exactes courtes de la forme
$$0\longrightarrow H^{q+1}(X,N(F_b))\longrightarrow H^{q+1}(X,F_{b'})\longrightarrow V^q(b)\longrightarrow 0,$$
pour tout $b\in B$ et $b'\in D_\epsilon(b)$.

On a la notion plus générale de cycles évanescents, introduite par Deligne [De], que l'on va rappeler ici.

Soit X un espace analytique complexe, on note $D^b(X)$ la catégorie dérivée de la catégorie des $\mathbb{Q}_X$-modules $\mathrm{mod}(\mathbb{Q}_X)$ construite via les complexes de $\mathbb{Q}_X$-modules bornés. On note aussi $D^b_c(X)$ la sous catégorie de $D^b(X)$ dont les complexes sont cohomologiquement constructibles (voir [BS]).

Soit X une variété algébrique (ou analytique) complexe, $f:X\to\mathbb{C}$ une fonction régulière (ou holomorphe) non constante.

Rappelons la définition des deux foncteurs
$$\begin{array}{ccc} D^b_c(X) & \longrightarrow & D^b_c(F_0)\\ \mathcal{F}^\bullet & \longmapsto & \psi_f(\mathcal{F}^\bullet)\end{array}\quad \text{et}\quad \begin{array}{ccc} D^b_c(X) & \longrightarrow & D^b_c(F_0)\\ \mathcal{F}^\bullet & \longmapsto & \varphi_f(\mathcal{F}^\bullet)\end{array}$$
où $F_0=f^{-1}(0)$ est supposé non vide.

On a le diagramme
$$\begin{tikzcd} F_0 \arrow[r, hook, "j"] & X & N(F_0)\backslash F_0 \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[l, "\hat{\pi}"'] \arrow[d] \\ & & D^*_\epsilon & \tilde{D}^*_\epsilon \arrow[l, "\text{rev. univ.}"'] \end{tikzcd}$$
où ϵ a été choisi assez petit pour que $f:N(F_0)\backslash F_0\longrightarrow D^*_\epsilon$ soit une fibration topologique localement triviale (dans le cas analytique, cela est possible par exemple si f est propre). Ici, $N(F_0)=f^{-1}(D_\epsilon)$ est le tube de la fibre F_0 et on regarde E comme la fibre générale «universelle» de la fibration $f:N(F_0)\backslash F_0\longrightarrow D^*_\epsilon$ (le carré à droite étant cartésien).

Définition 1.2.4 (Cycles proches) *On note ψ_f le foncteur des cycles proches relatif à la fonction f le foncteur de $D_c^b(X)$ dans $D_c^b(F_0)$ qui a un complexe $\mathcal{F}^\bullet$ associe le complexe $\psi_f\mathcal{F}^\bullet = j^{-1}R(i \circ \hat{\pi})_*(i \circ \hat{\pi})^{-1}(\mathcal{F}^\bullet)$.*

Définition 1.2.5 (Cycles évanescents) *On note φ_f le foncteur des cycles évanescents relatif à la fonction f et* can : $\psi_f(\mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \varphi_f(\mathcal{F}^\bullet)$ *le morphisme canonique défini par le triangle distingué*

$$j^{-1}\mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{c} \psi_f(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\text{can}} \varphi_f(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{[+1]} .$$

Remarque 1.2.6
- On peut aussi définir les foncteurs des cycles proches et des cycles évanescents pour $f : N \to D$ où N est un espace complexe, D un disque dans $\mathbb{C}$ de centre 0, f une application continue telle que $f_{|N\setminus f^{-1}(0)} \to D^*$ soit une fibration topologique localement triviale et $\mathcal{F}^\bullet_{|N\setminus f^{-1}(0)}$ un complexe de faisceaux cohomologiquement constructibles.
- Les foncteurs $\psi_f[-1]$ et $\varphi_f[-1]$ sont des foncteurs t-exacts, c'est à dire que l'image par l'un de ces deux foncteurs d'un faisceau pervers est un faisceau pervers (voir [KS], 10.3.13).

On veut comparer les cycles évanescents de la définition 1.2.1 avec ceux de la définition 1.2.5. On sait que le foncteur cycles évanescents commute avec les foncteurs images directes par les applications propres. C'est pour cela qu'il est naturel de considérer des compactifications de l'application f.

Soit $\overline{f} : \overline{X} \to S$ une compactification de $f : X \to S$, c'est-à-dire : $\overline{X}$ est une variété algébrique et $\overline{f}$ un prolongement de f qui est propre. On note $j : X \to \overline{X}$ l'inclusion naturelle.

Lemme 1.2.7 *Pour tout complexe $\mathcal{G}^\bullet$ dans $D_c^b(\overline{X})$, tout b dans B et tout b' dans $D_\epsilon(b)\setminus\{b\}$ on a l'égalité suivante*

$$\mathbb{H}^{q+1}(T(\overline{F}_b), \overline{F}_{b'}, \mathcal{G}^\bullet) = \mathbb{H}^q(\overline{F}_b, \varphi_{t_b\circ\overline{f}}\mathcal{G}^\bullet)$$

où t_b est une coordonnée locale de S en b.

Preuve. Il suffit d'utiliser la formule de changement de base ([KS], p. 358)

$$\varphi_{t_b}(R\overline{f}_*\mathcal{G}^\bullet) = R\Gamma(\varphi_{t_b\circ\overline{f}}\mathcal{G}^\bullet)$$

et le fait que l'on a $\varphi^q_{t_b}(R\overline{f}_*\mathcal{G}^\bullet) = \mathbb{H}^{q+1}(N(\overline{F}_b), \overline{F}_{b'}, \mathcal{G}^\bullet)$. □

Proposition 1.2.8 *On a* $V^q(b) = \mathbb{H}^q(\overline{F}_b, \varphi_{t_b\circ\overline{f}} Rj_*\mathbb{Q}_X) = \varphi^q_{t_b}(Rf_*\mathbb{Q}_X)$.

Preuve. En appliquant le lemme précédent à $\mathcal{G}^\bullet = Rj_*\mathbb{Q}_X$, on obtient

$$\mathbb{H}^q(\overline{F}_b, \varphi_{t_b\circ\overline{f}} Rj_*\mathbb{Q}_X) = \varphi^q_{t_b}(Rf_*\mathbb{Q}_X).$$

Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "j"] & \overline{X} \\
F_{b'} \arrow[u, hook, "i_{b'}"] \arrow[r, hook, "j_{b'}"] & \overline{F}_{b'} \arrow[u, hook, "\overline{\imath}_{b'}"']
\end{tikzcd}$$

où $i_{b'}$ est l'inclusion de $F_{b'}$ dans X, $\overline{\imath}_{b'}$ l'inclusion de $\overline{F}_{b'}$ dans $\overline{X}$ et $j_{b'}$ l'inclusion de $F_{b'}$ dans $\overline{F}_{b'}$.

En adaptant la preuve de Sabbah de la proposition 8.3 dans [Sab2] au cas d'une fibre régulière, on montre que

$$\overline{\imath}_{b'}^{-1}(Rj_*\mathbb{Q}_X) = Rj_{b'*}(i_{b'}^{-1}\mathbb{Q}_X).$$

On a le même type de propriétés avec $N(F_b)$ au lieu de $F_{b'}$ en appliquant directement les définitions (et en se ramenant à un tube ouvert). Cela nous permet de voir que

$$V^q(b) = \mathbb{H}^{q+1}(N(\overline{F}_b), \overline{F}_{b'}, Rj_*\mathbb{Q}_X).$$

$\square$

Ceci nous amène naturellement à poser les notations suivantes.

Notations 1.2.9 On pose

$$\Sigma^q_b = \text{supp } \varphi^q_{t_b\circ\overline{f}}(Rj_*\mathbb{Q}_X),$$

$$\Sigma_b = \cup_q \Sigma^q_b,$$

et

$$d(\overline{f}) = \max_b \dim\Sigma_b.$$

Si on dispose d'une stratification de Whitney $\mathcal{S}$ de $\overline{X}$ telle que X soit une strate et si on pose $d(\overline{f}, \mathcal{S}) = \dim\text{Sing}_{\mathcal{S}}(\overline{f})$, alors on a

$$d(\overline{f}) \leq d(\overline{f}, \mathcal{S}).$$

Considérons les cycles évanescents associés aux faisceaux constructibles $\mathcal{F}^q = R^q f_*(\mathbb{Q}_X)$, $q \geq 0$. Soient q un entier positif, $j_b^q : H^q(N(F_b)) \longrightarrow H^q(F_{b'})$ le morphisme induit par l'inclusion $F_{b'} \longrightarrow N(F_b)$. Dans le triangle

$$\mathcal{F}_b^q \xrightarrow{c} \psi_{t_b}(\mathcal{F}^q) \longrightarrow \varphi_{t_b}(\mathcal{F}^q) \xrightarrow{+1} \tag{1.1}$$

on a $\mathcal{F}_b^q = H^q(N(F_b))$, $\psi_{t_b}(\mathcal{F}^q) = \mathcal{F}_{b'}^q = H^q(F_{b'})$ et le morphisme de comparaison c coïncide avec j_b^q. Cela nous donne

$$\varphi_{t_b}^{-1}(\mathcal{F}^q) = \mathrm{Ker}\ j_b^q, \quad \varphi_{t_b}^0(\mathcal{F}^q) = \mathrm{Coker}\ j_b^q.$$

En comparant la suite exacte longue associée au triangle (1.1) et la suite exacte longue de cohomologie associée au couple $(N(F_b), F_{b'})$, on obtient

$$0 \longrightarrow \varphi_{t_b}^0(\mathcal{F}^q) \longrightarrow \varphi_{t_b}^q(Rf_*\mathbb{Q}_X) = V^q(b) \longrightarrow \varphi_{t_b}^{-1}(\mathcal{F}^{q+1}) \longrightarrow 0. \tag{1.2}$$

On a le résultat suivant

Proposition 1.2.10 *Les affirmations suivantes sont équivalentes*

(i) j_b^q *est injectif pour tout* b,

(ii) le faisceau $\mathcal{F}^q$ *n'a pas de section à support fini,*

(iii) le faisceau $\mathcal{F}^q[1]$ *est pervers,*

(iv) $\mathcal{F}^q[1] = {}^pR^{q+1}f_*\mathbb{Q}_X$ *est dans* $D_c^b(X)$.

Preuve. L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) et l'implication (iv) $\Rightarrow$ (iii) sont immédiates. Les autres implications résultent des deux faits suivants bien connus sur les faisceaux pervers (pour une preuve, on peut se rapporter à [Dim2]). □

Lemme 1.2.11 *Soit* $\mathcal{F}^\bullet \in D_c^b(S)$ *où* S *est une courbe complexe lisse. Alors on a des suites exactes courtes*

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^0({}^p\mathcal{H}^q(\mathcal{F}^\bullet)) \longrightarrow \mathcal{H}^q(\mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^{-1}({}^p\mathcal{H}^{q+1}(\mathcal{F}^\bullet)) \longrightarrow 0$$

pour tout entier q.

Lemme 1.2.12 *Soit* $\mathcal{F}^\bullet \in Perv(S)$ *où* S *est une courbe complexe lisse. On a un isomorphisme* $\mathcal{F}^\bullet = \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{F}^\bullet)[1]$ *si et seulement si une des deux conditions équivalentes suivantes est remplie.*

(i) $\mathcal{H}^0(\mathcal{F}^\bullet) = 0$,

(ii) *pour tout point* $a \in X$ *le morphisme canonique* $\mathrm{can} : \psi_{t_a}(\mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \varphi_{t_a}(\mathcal{F}^\bullet)$ *est surjectif,* t_a *étant une coordonnée locale en* a.

Exemple 1.2.13 Ces conditions sont remplies pour $S = \mathbb{C}$, X contractile (voir ci-dessous) et aussi lorsque X est affine et $\Sigma_b \subset X$ pour tout b, voir Sabbah [Sab2], où ces fonctions sont appelées «cohomologiquement modérées» (voir section 2.3.2). La remarque 1.6.5 montre que ces conditions sont aussi remplies pour d'autres classes d'exemples.

Par contre elles ne sont pas remplies pour $X = \mathbb{C}^*$, $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ l'inclusion. En effet, le morphisme $j_0^1 : H^1(\text{disque épointé}) \longrightarrow H^1(\text{point})$ n'est pas injectif.

Définition 1.2.14 *On dit que l'application* $f : X \longrightarrow S$ *est sympa si elle vérifie les conditions (i)-(iv) de la proposition 1.2.10 pour tout* q.

Remarque 1.2.15 Dans le cas d'une application régulière $f : X \to \mathbb{C}$ avec X contractile, la suite de Mayer-Vietoris nous dit que l'on a la suite exacte (voir [NN1])

$$0 \longrightarrow H^q(F_{b_0}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{m} H^q(N(F_{b_i})) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{m} H^q(F_{b_i'}) \longrightarrow 0, \ \text{pour } q > 0.$$

Donc on a une injection $H^q(N(F_{b_i})) \hookrightarrow H^q(F_{b_i'})$ qui nous dit que

$$V^q(b) = \mathrm{Coker}\ (H^q(N(F_b)) \to H^q(F_{b'})).$$

Dans le cas $X = \mathbb{C}^{n+1}$ ceci est la notion de cocycles évanescents introduite par Neumann-Norbury [NN1]. On a de plus $\tilde{H}^q(F) = \bigoplus_{i=1}^m V^q(b_i)$ pour tout q.

Remarque 1.2.16 On sait qu'un germe de faisceaux pervers $\mathcal{F}^\bullet$ à l'origine de $\mathbb{C}$ est déterminé à isomorphisme près par le diagramme

$$\psi_t(\mathcal{F}^\bullet) \underset{\mathrm{var}}{\overset{\mathrm{can}}{\rightleftarrows}} \varphi_t(\mathcal{F}^\bullet).$$

Dans le cas d'une application sympa $f : X \longrightarrow S$ le germe du faisceau $\mathcal{F}^q[1]$ au point $b \in S$ est déterminé par le diagramme

$$H^q(F_{b'}) \underset{\mathrm{var}}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} H^{q+1}(N(F_b), F_{b'}) = V^q(c)$$

où var est le dual du morphisme en homologie

$$H_q(F_{b'}) \simeq H_{q+1}(F_{b'} \times (S^1, b')) = H_{q+1}(f^{-1}(\partial D_\epsilon(b)), F_{b'}) \xrightarrow{i_*} H_{q+1}(N(F_b), F_{b'})$$

où $S^1 = \partial D_\epsilon(b)$, voir [ST2] pour une construction similaire, $N(F_b)$ étant remplacé par X chez eux.

On obtient pour le cas $S = \mathbb{C}$ (en utilisant les chemins γ_i) deux opérateurs de monodromie

$$T_b^q : H^q(F) \longrightarrow H^q(F), \quad T_b^q = 1 + \mathrm{var} \circ \delta$$

et

$$T_{b,\mathrm{rel}}^q : H^{q+1}(X, F) \longrightarrow H^{q+1}(X, F), \quad T_{b,\mathrm{rel}}^q = 1 + \delta \circ \mathrm{var} \circ j^q$$

avec $j_b^q : H^{q+1}(X, F) \longrightarrow H^{q+1}(N(F_b), F)$.

Cela induit des représentations de monodromie

$$\rho^q : \pi_1(\mathbb{C} \backslash B, b_0) \longrightarrow Aut(H^q(F)),$$

$$\rho_{\mathrm{rel}}^q : \pi_1(\mathbb{C} \backslash B, b_0) \longrightarrow Aut(H^{q+1}(X, F)).$$

Remarque 1.2.17 On peut aussi définir deux opérateurs de monodromie à l'infini T_∞^q et $T_{\infty,\mathrm{rel}}^q$ qui correspondent respectivement à $\rho^q(\gamma)$ et à $\rho_{\mathrm{rel}}^q(\gamma)$ pour γ un grand lacet dans $\mathbb{C}$ bord d'un disque qui contient B dans son intérieur. On peut montrer comme dans [DN] que ρ_{rel}^q est triviale si et seulement si $T_{\infty,\mathrm{rel}}^q = Id$.

Pour une fonction cohomologiquement modérée, Sabbah a obtenu des résultats très intéressants sur l'opérateur de monodromie à l'infini $T_{\infty,\mathrm{rel}}^{n-1}$, voir [Sab2] remarque (10.3).

Question ouverte Existe-t'il une application $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que la représentation ρ_{rel}^q soit triviale mais pas la représentation ρ^q ?

1.3 Annulations de cycles évanescents et connexité relative

La suite exacte (1.2) et la proposition 1.2.10 nous donnent le corollaire suivant.

Corollaire 1.3.1 *Si $V^q(b) = 0$ pour tout $q \leq q_0$ et tout b, alors les faisceaux $R^q f_* \mathbb{Q}_X = {}^p R^{q+1} f_* \mathbb{Q}_X[-1]$ sont localement constants pour $q \leq q_0$ et $R^{q_0+1} f_* \mathbb{Q}_X = {}^p R^{q_0+2} f_* \mathbb{Q}_X[-1]$.*

En effet, pour $q \leq q_0$ on a un isomorphisme

$$R^q f_* \mathbb{Q}_X = \tilde{H}^q(F),$$

où $\widetilde{M}$ est le système local constant associé à un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel M.

Dans la section précédente, on a vu que $V^q(b) = \mathbb{H}^q(\overline{f}^{-1}(b), \varphi_{t_b \circ \overline{f}} Rj_* \mathbb{Q}_X)$. Ce résultat va nous permettre d'avoir un théorème d'annulation pour les cycles évanescents.

Proposition 1.3.2 *Supposons que j soit affine. Alors, on a*

$$V^q(b) = 0 \text{ pour } q \leq n - d(\overline{f}) - 1 \text{ et pour } q \geq n + 1 + d(\overline{f}).$$

Preuve. Le complexe de faisceau $\mathbb{Q}_X[n+1]$ est un faisceau pervers (voir [Lê]) et Rj_* est un foncteur t-exact donc $Rj_*\mathbb{Q}_X[n+1]$ est un faisceau pervers sur $\overline{X}$. On a aussi

$$V^q(b) = \mathbb{H}^{q-n}(\Sigma_b, {}^p\varphi_{t_b \circ \overline{f}} Rj_*\mathbb{Q}_X[n+1]).$$

Ces deux résultats avec le théorème d'Artin (voir [KS]) impliquent que $V^q(b) = 0$ pour $q - n \leq -d(\overline{f}) - 1$ et pour $q - n \geq d(\overline{f}) + 1$. □

Lorsque $S = \mathbb{C}$, on a $H^{q+1}(X, F) = \bigoplus_b V^q(b)$, donc la proposition précédente nous dit que $H^{q+1}(X, F) = 0$ pour $q \leq n - d(\overline{f}) - 1$ et pour $q \geq n + 1 + d(\overline{f})$. Si de plus $X = \mathbb{C}^{n+1}$ ou X contractile alors on a $\tilde{H}^q(F) = 0$ pour $0 \leq q \leq n - d(\overline{f}) - 1$ et pour $q \geq n + 1$. Ce dernier résultat est clair lorsque X est affine, car alors F est aussi affine.

Le résultat homotopique analogue pour $d(\overline{f}, \mathcal{S}) = 0$ est démontré dans [ST2].

L'exemple 1.2.13 montre que le faisceau $R^{n+1}f_*\mathbb{Q}_X[1]$ n'est pas en général pervers même lorsque $d(\overline{f}) = 0$.

Un résultat de C. Sabbah [Sab1] qui généralise un résultat de A. Dimca et M. Saito [DS1] nous permet d'obtenir le corollaire suivant.

Corollaire 1.3.3 *Soient X une variété affine lisse et $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ une application régulière non constante. Alors le complexe*

$$K^\bullet : 0 \longrightarrow \Omega^0(X) \xrightarrow{D_f} \Omega^1(X) \xrightarrow{D_f} \ldots \xrightarrow{D_f} \Omega^{n+1}(X) \longrightarrow 0$$

où $D_f(\omega) = d\omega - df \wedge \omega$ vérifie $H^{q_0}(K^\bullet) = 0$ pour $q_0 \leq n - d(\overline{f}) - 1$, où l'entier $d(\overline{f})$ est calculé par rapport à une compactification $X \subset \overline{X}$ quelconque.

La proposition suivante nous donne une annulation des groupes de cohomologie à support compact dans le cas où $f : X \to \mathbb{C}$ est une application sympa.

Proposition 1.3.4 *Si $\tilde{b}_q(F) = 0$ pour $0 \leq q \leq q_0$ alors $H^q_c(F_b) = 0$ pour $2n - q_0 + 1 \leq q \leq 2n - 1$ et tout $b \in \mathbb{C}$.*

En particulier si F_b est lisse et connexe $H^q_c(F_b) \simeq H^{2n-q}(F_b)$ d'où

$$H^0(F_b) = \mathbb{Q}, \quad H^1(F_b) = 0, \cdots, \quad H^{q_0-1}(F_b) = 0.$$

Preuve. On dispose de la suite exacte pour la cohomologie à support compact

$$\cdots \to H_c^{q-1}(F_b) \to H_c^q(N(F_b)\backslash F_b) \to H_c^q(N(F_b)) \to H_c^q(F_b) \to H_c^{q+1}(N(F_b)\backslash F_b) \to \cdots$$

Par dualité, on a $H_c^q(N(F_b)) = H^{2n+2-q}(N(F_b))^\vee$ or ce dernier groupe est nul pour $1 \leq 2n+2-q \leq q_0$ puisque l'on a une injection de $H^q(N(F_b))$ dans $H^q(F)$.

Maintenant, la suite exacte de Wang

$$\cdots \longrightarrow H^{2n-q+1}(F) \longrightarrow H_c^q(N(F_b)\backslash F_b) = H^{2n+2-q}(N(F_b)\backslash F_b) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^{2n+2-q}(F) \longrightarrow H^{2n+2-q}(F) \longrightarrow \cdots$$

nous donne le résultat pour $2n+2-q_0 \leq q \leq 2n-1$. Pour l'exposant $2n-q_0+1$ on considère la première suite exacte et on remarque que la flèche $H_c^q(N(F_b)\backslash F_b) \longrightarrow H_c^q(N(F_b))$ est surjective. Cette dernière est surjective car par dualité elle correspond à $H^q(N(F_b)) \to H^q(N(F_b)\backslash F_b)$ qui factorise l'injection $H^q(N(F_b)) \to H^q(F)$. □

Théorème 1.3.5 *Soient $f : X \to \mathbb{C}$ une application régulière où X est une variété complexe lisse de dimension $n+1$, $\overline{f} : \overline{X} \to \mathbb{C}$ une compactification telle que l'injection naturelle $j : X \to \overline{X}$ soit affine. Alors*

$$b_{q+1}(X,F) = 0 \quad si \quad q \leq n - d(\overline{f}) - 1 \quad ou \quad q \geq n+1+d(\overline{f}),$$

$$b_{q+1}(X,F_b) = 0 \quad si \quad q \leq n - d(\overline{f}) - 2 \quad ou \quad q \geq n+d(\overline{f})+2.$$

Si de plus

$$\Sigma_b^{\mathrm{f}} \textit{ fermé dans } X \textit{ et } \dim(\Sigma_b^\infty) \leq d(\overline{f}) - 1,$$

alors

$$b_{q+1}(X,F_b) = 0 \quad si \quad q \leq n - d(\overline{f}) - 1 \quad ou \quad q \geq n+1+d(\overline{f}),$$

où $\Sigma_b^{\mathrm{f}} = \Sigma_b \cap X$, $\Sigma_b^\infty = \Sigma_b \cap X_\infty$ et $X_\infty = \overline{X}\backslash X$.

Le résultat homotopique analogue pour $d(\overline{f}, \mathcal{S}) = 0$ est démontré dans [ST2].

Preuve. Notre preuve suit dans les grandes lignes une preuve de l'article de Hamm [Ham], où il démontre une version plus précise du théorème 1.3.5, pour le cas $d(\overline{f}) = 0$. Voir aussi [ST2] pour le cas $d(\overline{f}, \mathcal{S}) = 0$.

D'après la proposition 1.2.3 on a $H^{q+1}(X,F) = \oplus_{i=1}^m V^q(b_i)$. La proposition 1.3.2 nous dit que $V^q(b_i) = 0$ pour $q \leq n - d(\overline{f}) - 1$, $q \geq n+1+d(\overline{f})$ et pour tout i, d'où la première affirmation.

Les faisceaux $R^q f_* \mathbb{Q}_X$ sont localement constants pour $q \leq n - d(\overline{f}) - 1$, voir le corollaire 1.3.1.

Maintenant on introduit les notations suivantes : $f_b = f_{|F_b}$, $\overline{f}_b = \overline{f}_{|\overline{F}_b}$ et les inclusions suivantes

$$\begin{tikzcd} F_b \arrow[r, "j_b"] \arrow[d, "k"'] & \overline{F}_b \arrow[d, "\overline{k}"'] & \overline{F}_b \cap X_\infty \arrow[l, "i_b"'] \arrow[d, "k_\infty"'] \\ X \arrow[r, "j"] & \overline{X} & X_\infty \arrow[l, "i"'] \end{tikzcd}$$

Il suffit de montrer que le morphisme naturel

$$H^q(N(F_b), \mathbb{Q}) \longrightarrow H^q(F_b, \mathbb{Q}) \tag{1.3}$$

induit par l'inclusion de la fibre F_b dans son tube $N(F_b)$ est

(i) un isomorphisme si $q \leq n - d(\overline{f}) - 2$ et $q \geq n + d(\overline{f}) + 3$,

(ii) un épimorphisme si $q = n + d(\overline{f}) + 2$,

et si de plus f vérifie la condition supplémentaire alors c'est

(i) un isomorphisme si $q \leq n - d(\overline{f}) - 1$ et $q \geq n + d(\overline{f}) + 2$,

(ii) un épimorphisme si $q = n + 1 + d(\overline{f})$.

En effet, il suffit d'écrire les suites exactes de (X, F), $(X, N(F_b))$, (X, F_b), pour q petit et $(X, N(F_b), F_b)$ ainsi que la proposition 1.2.3(iii) pour q grand. On a les isomorphismes suivants

$$\begin{aligned} H^q(N(F_b), \mathbb{Q}) &= R^q f_* (\mathbb{Q}_X)_b = \mathbb{R}^q \overline{f}_* (Rj_* \mathbb{Q}_X)_b \\ &= \mathbb{H}^q(\overline{F}_b, \overline{k}^{-1} Rj_* \mathbb{Q}_X) = \mathbb{R}^q \overline{f}_{b*}(\overline{k}^{-1} Rj_* \mathbb{Q}_X) \end{aligned}$$

(le deuxième provient de $Rf_* = R\overline{f}_* \circ Rj_*$ et le troisième du fait que $\overline{f}$ est propre).

D'autre part on a les isomorphismes suivants

$$\begin{aligned} H^q(F_b, \mathbb{Q}) &= H^q(F_b, k^{-1}\mathbb{Q}_X) = \mathbb{H}^q(\overline{F}_b, Rj_{b*} k^{-1} \mathbb{Q}_X) \\ &= \mathbb{R}^q \overline{f}_{b*}(Rj_{b*} k^{-1} \mathbb{Q}_X) = \mathbb{R}^q \overline{f}_{b*}(Rj_{b*} j_b^{-1} \overline{k}^{-1} Rj_* \mathbb{Q}_X) \end{aligned}$$

où le dernier isomorphisme vient de

$$j_b^{-1} \overline{k}^{-1} Rj_* \mathbb{Q}_X = k^{-1} j^{-1} Rj_* \mathbb{Q}_X = k^{-1} \mathbb{Q}_X.$$

Donc le morphisme (1.3) induit par l'inclusion $F_b \longrightarrow N(F_b)$ peut être remplacé par un morphisme

$$\mathbb{R}^q \overline{f}_{b*}(\mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{R}^q \overline{f}_{b*}(Rj_{b*} j_b^{-1} \mathcal{F}^\bullet)$$

avec $\mathcal{F}^\bullet = \overline{k}^{-1} Rj_*\mathbb{Q}_X$ qui provient en effet du morphisme d'adjonction $\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow Rj_{b*}j_b^{-1}\mathcal{F}^\bullet$ par l'application du foncteur $\mathbb{R}^{q_0}\overline{f}_{b*}$.

Nous considérons maintenant le triangle distingué d'adjonction suivant

$$i_{b!}i_b^!\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow Rj_{b*}j_b^{-1}\mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{+1} .$$

Soit $\mathcal{G}^\bullet = i_{b!}i_b^!\mathcal{F}^\bullet$. Alors on a une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{R}^q\overline{f}_{b*}\mathcal{G}^\bullet \longrightarrow \mathbb{R}^q\overline{f}_{b*}\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathbb{R}^q\overline{f}_{b*}Rj_{b*}j_b^{-1}\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathbb{R}^{q+1}\overline{f}_{b*}\mathcal{G}^\bullet \longrightarrow \cdots$$

et il suffit de montrer que $\mathbb{R}^q\overline{f}_{b*}\mathcal{G}^\bullet = 0$ pour $q \leq n - d(\overline{f}) - 1$, $q \geq n + d(\overline{f}) + 3$ et aussi pour $q = n - d(\overline{f})$, $q = n + 1 + d(\overline{f})$ si f vérifie la condition supplémentaire.

On a deux triangles distingués dans $D_c^b(\overline{F}_b)$

$$^p\psi_{\overline{f}-b}Rj_*\mathbb{Q}_X[n+1] \longrightarrow {}^p\varphi_{\overline{f}-b}Rj_*\mathbb{Q}_X[n+1] \longrightarrow \overline{k}^{-1}Rj_*\mathbb{Q}_X[n+1] \xrightarrow{+1} \tag{1.4}$$

et

$$\overline{k}^! Rj_*\mathbb{Q}_X[n+1] \longrightarrow {}^p\varphi_{\overline{f}-b}Rj_*\mathbb{Q}_X[n+1] \longrightarrow {}^p\psi_{\overline{f}-b}Rj_*\mathbb{Q}_X[n+1] \xrightarrow{+1} . \tag{1.5}$$

On applique le δ-foncteur $i_b^!$ au triangle (1.5) en remarquant que $i_b^!\overline{k}^! Rj_* = k_\infty^! Rj_* = 0$.

Donc le triangle (1.5) nous donne un quasi-isomorphisme

$$i_b^{!\,p}\varphi_{\overline{f}-b}Rj_*\mathbb{Q}_X[n+1] \longrightarrow i_b^{!\,p}\psi_{\overline{f}-b}Rj_*\mathbb{Q}_X[n+1].$$

Maintenant, on applique le δ-foncteur $R\overline{f}_{b*}i_{b!}i_b^!$ au triangle (1.4) et on obtient

$$\cdots \to \mathbb{H}^q(\Sigma_b^\infty, i_b^!\mathcal{B}^\bullet) \to \mathbb{H}^q(\Sigma_b^\infty, i_b^!\mathcal{B}^\bullet) \to \mathbb{R}^{q+n+1}\overline{f}_b\mathcal{G}^\bullet \to \mathbb{H}^{q+1}(\Sigma_b^\infty, i_b^!\mathcal{B}^\bullet) \to \cdots$$

où $\mathcal{B}^\bullet = {}^p\varphi_{\overline{f}-b}Rj_*\mathbb{Q}_X[n+1]$.

On a le triangle d'attachement

$$i_{b!}i_b^!\mathcal{B}^\bullet \longrightarrow \mathcal{B}^\bullet \longrightarrow Rj_{b*}j_b^{-1}\mathcal{B}^\bullet \xrightarrow{+1} .$$

Comme j, j_b sont affines, Rj_*, Rj_{b*} sont t-exacts. Les foncteurs j_b^{-1} et ${}^p\varphi_{\overline{f}-b}$ sont aussi t-exacts. On en déduit que $\mathcal{B}^\bullet$ ainsi que $Rj_{b*}j_b^{-1}\mathcal{B}^\bullet$ sont des faisceaux pervers. Le théorème d'Artin nous permet de dire que $\mathbb{H}^q(\Sigma_b^\infty, i_b^!\mathcal{B}^\bullet) = 0$ pour $q < -d(\overline{f})$, $q > d(\overline{f}) + 1$.

Dans le cas de la dernière affirmation, il suffit de remarquer que l'hypothèse implique que $i_b^!\mathcal{B}^\bullet$ est un faisceau pervers. $\square$

1.4 Théorèmes des cycles invariants

Pour une application sympa $f : X \longrightarrow S$, on a un théorème de cycles invariants qui généralise les résultats similaires de [ACD] et de [NN1].

Théorème 1.4.1 (des cycles invariants locaux)
Soit $f : X \longrightarrow S$ une application sympa. Soient $b \in B$ et $T_b^k : H^k(F) \longrightarrow H^k(F)$ l'opérateur de monodromie qui correspond à un lacet élémentaire dans S qui tourne une fois autour de b.

Pour tout q on a

$$\dim\mathrm{Ker}\,(T_b^{q-1} - 1) + \dim\mathrm{Ker}\,(T_b^q - 1) = b_q(F) - \dim V^q(b) + b^c_{2n-q+1}(F_b)$$

où $b_p^c(F_b) = \dim H_c^p(F_b)$, pour tout p.

Preuve. Soit $g : N(F_b)^* \longrightarrow D_b^*$ la fibration localement triviale induite par f au voisinage de la fibre F_b, où $N(F_b)^* = N(F_b)\backslash F_b$. La suite spectrale de Leray dégénère au terme E_2 et nous donne pour tout q

$$\dim H^0(D_b^*, R^q g_*\mathbb{Q}_X) + \dim H^1(D_b^*, R^{q-1}g_*\mathbb{Q}_X) = \dim H^q(N(F_b)^*).$$

On a les égalités suivantes :

(i) $\dim H^0(D_b^*, R^q g_*\mathbb{Q}_X) = \dim\mathrm{Ker}\,(T_b^q - 1)$,

(ii) On a

$$\begin{aligned}\dim H^1(D_b^*, R^{q-1}g_*\mathbb{Q}_X) &= -\chi(D_b^*, R^{q-1}g_*\mathbb{Q}_X)) \\ &\quad + \dim H^0(D_b^*, R^{q-1}g_*\mathbb{Q}_X) \\ &= \dim\mathrm{Ker}\,(T_b^{q-1} - 1),\end{aligned}$$

car $\chi(D_b^*, R^{q-1}g_*\mathbb{Q}_X) = \chi(D_b^*)b_{q-1}(F) = 0$.
D'autre part pour calculer $b_q(N(F_b)^*)$ on utilise la dualité de Poincaré

$$b_q(N(F_b)^*) = b^c_{2n+2-q}(N(F_b)^*)$$

et la suite exacte

$$\begin{aligned}\cdots \to H_c^{2n-q+1}(F_b) \to H_c^{2n-q+2}(N(F_b)^*) &\overset{\alpha^{2n-q+2}}{\longrightarrow} \\ &\longrightarrow H_c^{2n-q+2}(N(F_b)) \to H_c^{2n-q+2}(F_b) \to \cdots\end{aligned}$$

Le morphisme α^{2n-q+2} est le dual du morphisme induit par l'inclusion

$$i_b^q : H^q(N(F_b)) \longrightarrow H^q(N(F_b)^*).$$

L'inclusion $F_{b'} \longrightarrow N(F_b)$ se factorise comme

$$F_{b'} \longrightarrow N(F_b)^* \longrightarrow N(F_b)$$

et cela, plus la condition que f soit sympa, nous donne que le morphisme α^{2n-q+2} est surjectif et donc l'égalité.

(iii) $b^c_{2n-q+2}(N(F_b)^*) = b^c_{2n-q+2}(N(F_b)) + b^c_{2n-q+1}(F_b)$.
Finalement, on a $b^c_{2n-q+2}(N(F_b)) = b_q(N(F_b)) = b_q(F) - \mathrm{dim} V^q(b)$.

□

On peut suivre la même idée de démonstration et obtenir le résultat suivant, qui généralise aussi certains résultats de [ACD] et de [NN1].

Théorème 1.4.2 (des cycles invariants globaux) *Soit $f : X \longrightarrow S$ une application régulière non constante. On pose $S^* = S \backslash B$, $X^* = f^{-1}(S^*)$. Pour tout k, on dénote par $H^k(F)^{\mathrm{inv}}$ la partie invariante de la cohomologie par rapport à l'action de la monodromie du groupe fondamental $\pi_1(S^*)$. Alors, on a pour tout q*

$$\mathrm{dim} H^{q-1}(F)^{\mathrm{inv}} + \mathrm{dim} H^q(F)^{\mathrm{inv}} =$$
$$= (\chi(S) - |B|) b_{q-1}(F) + \textstyle\sum_{b\in B} b^c_{2n-q+1}(F_b) + b_q(X) - \mathrm{dimKer}\ \beta^q - \mathrm{dimKer}\ \beta^{q+1}$$

où $\beta^q : H^q(X) \longrightarrow H^q(X^*)$ est le morphisme induit par l'inclusion $X^* \longrightarrow X$.

1.5 Caractéristiques d'Euler des fibres

Proposition 1.5.1 *Soit $f : X \longrightarrow S$ une application régulière, où X et S sont des variétés complexes lisses, S de dimension 1. Soient $\overline{f} : \overline{X} \longrightarrow S$ une compactification de f et $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ l'inclusion naturelle. Alors on a*

$$\chi(S)\chi(F) = \chi(X) + \sum_{b\in B} \sum_q (-1)^q \mathrm{dim} V^q(b),$$

$$\chi(F) - \chi(F_b) = \sum_q (-1)^q \mathrm{dim} V^q(b) = \chi(\Sigma_b, \varphi_{t_b \circ \overline{f}}(Rj_* \mathbb{Q}_X))$$
$$= \sum_q (-1)^q \chi(\Sigma_b^q, \varphi^q_{t_b \circ \overline{f}}(Rj_* \mathbb{Q}_X)),$$

pour tout b dans B.

Preuve. On peut écrire les égalités suivantes :

$$\chi(X) = \chi(X^*) + \sum_{b\in B} \chi(F_b),$$

$$\chi(X^*) = \chi(S^*)\chi(F) = (\chi(S) - |B|)\chi(F),$$

$$\chi(X) = \chi(S)\chi(F) + \sum_{b\in B}(\chi(F_b) - \chi(F)),$$

$$\chi(X) = \chi(S)\chi(F) - \sum_{b\in B}\sum_{q}(-1)^q \mathrm{dim} V^q(b).$$

En effet, la caractéristique d'Euler des variétés analytiques complexes est additive par rapport aux constructions constructibles, voir Fulton [F], p.141-142.

Pour la deuxième formule, on commence par l'égalité suivante $\chi(N(F_b)) = \chi(F_b)$. Ici aussi on utilise l'additivité de la caractéristique d'Euler pour avoir

$$\chi(N(F_b)) = \chi(F_b) + \chi(N(F_b)\backslash F_b).$$

Mais l'espace $N(F_b))\backslash F_b$ est l'espace total d'une fibration localement triviale de base un disque épointé D_b^* et de fibre F. On a alors

$$\chi(N(F_b)\backslash F_b) = \chi(D_b^*)\chi(F) = 0,$$

voir Bott-Tu [BT].

Pour finir, il suffit d'écrire

$$\chi(F_b) - \chi(F) = \chi(N(F_b), F).$$

La dernière égalité provient du lemme 1.2.7 et de l'utilisation d'une suite spectrale :

$$\begin{aligned}
\sum_q (-1)^q \mathrm{dim} V^q(b) &= \sum_q (-1)^q \mathrm{dim}\mathbb{H}^q(\overline{F}_b, \varphi_{t_b\circ\overline{f}}(Rj_*\mathbb{Q}_X)) \\
&= \chi(\overline{F}_b, \varphi_{t_b\circ\overline{f}}(Rj_*\mathbb{Q}_X)) \\
&= \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \mathrm{dim}\mathbb{H}^p(\overline{F}_b, \varphi^q_{t_b\circ\overline{f}}(Rj_*\mathbb{Q}_X)) \\
&= \sum_q (-1)^q \chi(\Sigma_b^q, \varphi^q_{t_b\circ\overline{f}}(Rj_*\mathbb{Q}_X)).
\end{aligned}$$

$\square$

1.6 Exemples

1.6.1 Cas $d(\overline{f}) = 0$ ou 1

Remarque 1.6.1 Si $\dim X = n+1$ et si $d(\overline{f}) = 0$ alors $V^q(b) = 0$ pour tout $q \leq n-1$ et tout b. Donc $R^q f_*\mathbb{Q}_X = \tilde{H}^q(F)$ pour $q \leq n-1$ et $R^n f_*\mathbb{Q}_X = {}^p R^{n+1} f_*\mathbb{Q}_X[-1] = DR_S(\mathcal{G}_f^0)[-1]$ où $\mathcal{G}_f^0 = \mathcal{H}^0 f_+(\mathcal{O}_X)$ est le sytème de Gauss-Manin de f en degré 0, voir [Sab2], [DS2]. Donc le faisceau constructible $R^n f_*\mathbb{Q}_X$ peut-être calculé à partir d'un D-module régulier holonome.

Remarque 1.6.2 Supposons que $d(\overline{f}) = 0$ et $S = \mathbb{C}$. Alors le morphisme induit par l'inclusion $i^q : H^q(X) \longrightarrow H^q(F)$ est un isomorphisme pour $q \neq n, n+1$ et on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^n(X) \xrightarrow{i^n} H^n(F) \longrightarrow H^{n+1}(X,F) \longrightarrow H^{n+1}(X) \xrightarrow{i^{n+1}} H^{n+1}(F) \longrightarrow 0.$$

Si on écrit le théorème 1.4.2 pour $q = n$ on obtient l'égalité :

$$\dim H^n(F)^{\text{inv}} = \sum_{b\in B} b^c_{n+1}(F_b) - |B| b_{n-1}(X) + b_n(X) - \dim(\text{Ker } \beta^{n+1}).$$

En effet, on a $H^{n-1}(F)^{\text{inv}} = H^{n-1}(F)$ car i^{n-1} est un isomorphisme. On a aussi Ker $\beta^n = 0$ car i^n est un monomorphisme et on a une factorisation $F \longrightarrow X^* \longrightarrow X$.

Remarque 1.6.3 Lorsque $f : X \longrightarrow S$ est à singularités isolées sur X, le théorème 1.5.1 nous dit que

$$\chi(S)\chi(F) = \chi(X) + (-1)^n(\mu + \lambda)$$

où μ est le nombre de Milnor associé à f et $\lambda = \sum_{b\in B} \chi(\Sigma_b^\infty, {}^p\varphi_{t_b\circ\overline{f}}(Rj_*\mathbb{Q}_X[n+1]))$. On retrouve ainsi un résultat classique, voir [ALM] et [CD].

On peut préciser la formule nous donnant λ lorsque $d(\overline{f}) = 0$ ou 1, et j affine.

(i) Cas $d(\overline{f}) = 0$. On a

$$\lambda = \sum_{b\in B} \sum_{x\in\Sigma_b^\infty} \dim \mathcal{H}^0({}^p\varphi_{\overline{f}-b}(Rj_*\mathbb{Q}_X[n+1]))_x,$$

en particulier λ est positif ou nul.

(ii) Cas $d(\overline{f}) = 1$. On a

$$\lambda = \sum_{b\in B} \sum_{x\in\Sigma_b^\infty} \dim \mathcal{H}^0({}^p\varphi_{\overline{f}-b}(Rj_*\mathbb{Q}_X[n+1]))_x - \sum_{b\in B} \chi(\Sigma_b^\infty, \mathcal{H}^{-1}({}^p\varphi_{\overline{f}-b}(Rj_*\mathbb{Q}_X[n+1]))).$$

On va voir plus loin que l'on peut avoir $\lambda \leq 0$.

Maintenant, on va considérer un exemple où l'on calcule les cycles évanescents de deux façons différentes. On va montrer que la condition d'avoir un plongement j affine peut «transformer» des cycles évanescents à support fini en des cycles évanescents à support non fini.

1.6.2 Cas $l : \mathbb{C}^3 \backslash C \longrightarrow \mathbb{C}$ où C est une courbe lisse intersection complète et l une forme linéaire générique

On considère l'espace projectif $\mathbb{P}^3$ avec pour coordonnées $[x, y, z, u]$.

Soit $Z : F(x, y, z, u) = 0, \quad G(x, y, z, u) = 0$ une courbe lisse, intersection complète de degré (d, e), c'est-à-dire $d = \deg(F)$, et $e = \deg(G)$. On suppose que le pinceau d'hyperplans $\lambda x + \mu y = 0$ est un pinceau de Lefschetz par rapport à Z et que $\{u = 0\}$ est transverse à Z. Posons aussi $\mathbb{C}^3 = \mathbb{P}^3 \backslash \{u = 0\}$ avec pour coordonnées (x, y, z), $C = Z \cap \mathbb{C}^3$, $l : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ et $l(x, y, z) = x$.

Avec ces conditions, on a

(i) $l_{|C}$ est propre et il y a exactement c points critiques $a_1, \cdots, a_c$ pour $l_{|C} : C \to \mathbb{C}$, tous de multiplicité 2, où $c = \text{classe}(Z)$ (on a $c = 2de - \chi(Z)$ [Lam], p 25, $\chi(Z) = (4 - d - e)de$ [Dim1], p.152). En outre $l(a_i) \neq l(a_j)$ pour $i \neq j$.

(ii) Si $j_0 : \mathbb{C}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} \times \mathbb{P}^2$ est l'inclusion naturelle, alors $j_0(C)$ est fermé dans $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^2$ (sinon on a une contradiction avec $l_{|C}$ propre).

On considère $X = \mathbb{C}^3 \backslash C$, $\overline{X} = \mathbb{C} \times \mathbb{P}^2$, $L_\infty = \mathbb{P}^2 \backslash \mathbb{C}^2$ la droite à l'infini et la stratification (de Whitney) de $\overline{X}$ donnée par

$$\mathcal{S}_{\overline{X}} \quad : \quad X \coprod C \coprod \mathbb{C} \times L_\infty.$$

On a $\mathrm{Sing}(\overline{l}_{|\mathbb{C}^3 \backslash C}) = \mathrm{Sing}(\overline{l}_{|\mathbb{C} \times L_\infty}) = \emptyset$ et $\mathrm{Sing}(\overline{l}_{|C}) = \{a_1, \cdots a_c\} = A$ où $\overline{l} : \mathbb{C} \times \mathbb{P}^2 = \overline{X} \to \mathbb{C}$ est la projection sur le premier facteur.

On va aussi noter $j = j_{0|\mathbb{C}^3 \backslash C}$ la restriction de l'injection j_0 à $\mathbb{C}^3 \backslash C$.

Le faisceau $\mathcal{F}^\bullet = Rj_*(\mathbb{Q}_X)$ est un faisceau $\mathcal{S}_{\overline{X}}$-constructible car on a le résultat suivant

Proposition 1.6.4 *Soient X un espace muni d'une stratification de Whitney $\mathcal{S}_X$, $S \in \mathcal{S}_X$ une strate et $j : S \hookrightarrow X$ l'inclusion. Alors $\mathcal{F}^\bullet = Rj_*\mathbb{Q}_S$ est cohomologiquement constructible par rapport à $\mathcal{S}_X$.*

Preuve. Il suffit d'utiliser la trivialité topologique le long d'une strate T, $T \in \overline{S}$. □

– Calcul de $\mathcal{H}^q(\varphi_{\bar{l}-s}(\mathcal{F}^\bullet))_a$ pour $a \in (\{s\} \times \mathbb{P}^2) \cap A$.

Soit $a \in (\{s\} \times \mathbb{P}^2) \cap A$, $F_a := \bar{l}^{-1}(\beta) \cap B_\epsilon(a)$ la fibre de Milnor de $\bar{l}$ en a où $B_\epsilon(a)$ est la boule ouverte de centre a est de rayon ϵ, pour $\epsilon > 0$ assez petit et pour un certain plongement local de X dans un espace affine et β suffisamment proche de $\bar{l}(a)$.

On a

$$\mathcal{H}^q(\varphi_{\bar{l}-s}(\mathcal{F}^\bullet))_a = \mathbb{H}^{q+1}(B_\epsilon(a), F_a, \mathcal{F}^\bullet) = H^{q+1}(B_\epsilon(a)\backslash C, F_a\backslash C, \mathbb{Q}).$$

Une étude du couple $(B_\epsilon(a)\backslash C, F_a\backslash C)$ nous dit qu'il est homotopiquement équivalent au couple $((S^3 \times [0,1])/\sim, S^3 \times \{0\} \vee_{p_0} S^3 \times \{1\})$ où $(x,s) \sim (y,t)$ si $x = y = p_0$ est un point fixé de S^3.

D'où le résultat

$$\varphi^q_{\bar{l}-s}(\mathcal{F}^\bullet)_a = \begin{cases} \mathbb{Q} \text{ si } q = 3 \text{ et } a \in (\{s\} \times \mathbb{P}^2) \cap A, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

L'inclusion j n'étant pas un morphisme affine, on peut aussi calculer ces cycles évanescents en passant par une autre compactification de X, qui a un plongement j_1 affine.

Soit $\overline{X_1}$ l'éclatement de $\overline{X}$ le long de $Z \cap \overline{X}$, $\pi : \overline{X}_1 \to \overline{X}$ le morphisme naturel et $E = \pi^{-1}(Z \cap \overline{X})$. On note aussi $j_1 : X \hookrightarrow \overline{X}_1$ l'injection naturelle et $\bar{l}_1 = \bar{l} \circ \pi$.

On considère la stratification (de Whitney) de $\overline{X}_1$ donnée par

$$\mathcal{S}_{\overline{X}_1} \quad : \quad X \coprod E \coprod \mathbb{C} \times L_\infty.$$

On a $\mathrm{Sing}_{\mathcal{S}_{\overline{X}_1}}(\bar{l}_1) = A \times \mathbb{P}^1$ et $\mathrm{Sing}_{\overline{X}_1}(\bar{l}_1) = \{(a_1, t_{a_1}), \cdots (a_c, t_{a_c})\}$ où t_{a_i} est un point de $\pi^{-1}(a_i) \simeq \mathbb{P}^1$.

En un point de A, on se ramène localement à la situation

$$C : z = 0, \quad y - x^2 = 0 \quad \text{et} \quad \bar{l}_1(x,y,z) \mapsto y.$$

On a deux cartes et dans une des deux cartes $\bar{l}_1$ s'écrit $(x,y,z) \mapsto x^2 + yz$ et $E : y = 0$.

La proposition 1.6.4 nous dit que le complexe de faisceaux $\mathcal{F}_1^\bullet := Rj_{1*}\mathbb{Q}_X$ est $\mathcal{S}_{\overline{X}_1}$-constructible.

– Calcul de $\mathcal{H}^q(\varphi_{\bar{l}_1-s}(\mathcal{F}_1^\bullet))_{(a,t)}$, pour $(a,t) \in \pi^{-1}((\{s\} \times \mathbb{P}^2) \cap A)$.

Soit $(a,t) \in \pi^{-1}((\{s\} \times \mathbb{P}^2) \cap A$, $F^1_{(a,t)}$ la fibre de Milnor de $\bar{l}_1 := \bar{l}_1^{-1}(\beta) \cap B_\epsilon(a,t)$ en (a,t), $0 < |\bar{l}_1(a,t) - \beta| \ll \epsilon \ll 1$.

On a

$$\mathcal{H}^q(\varphi_{\bar{l}_1-s}(\mathcal{F}_1^\bullet))_{(a,t)} = \mathbb{H}^{q+1}(B_\epsilon(a,t), F^1_{(a,t)}, \mathcal{F}_1^\bullet) = H^{q+1}(B_\epsilon(a,t)\backslash E, F^1_{(a,t)}\backslash E, \mathbb{Q}).$$

Pour étudier le couple $(B_\epsilon(a,t)\backslash E, F^1_{(a,t)}\backslash E)$, on doit distinguer deux cas.

Premier cas $t \neq t_a$. $(B_\epsilon(a,t)\backslash E, F^1_{(a,t)}\backslash E)$ est homotope à $((S^1 \times [0,1])/\sim, S^1 \times \{0\} \vee_{p_0} S^1 \times \{1\})$ où $(x,s) \sim (y,t)$ si $x = y = p_0$ est un point fixé de S^1.

D'où le résultat pour $t \neq t_a$

$$\varphi^q_{\overline{l}_1 - s}(\mathcal{F}^\bullet_1)_{(a,t)} = \begin{cases} \mathbb{Q} \text{ si } q = 1 \text{ et } (a,t) \in \pi^{-1}((\{s\} \times \mathbb{P}^2) \cap A), \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Deuxième cas $t = t_a$. On se ramène au germe d'hypersurface $x^2 + yz = 0$ et on utilise le difféomorphisme donné par [Lam], p. 37.

Le couple $(B_\epsilon(a,t_a)\backslash E, F^1_{(a,t_a)}\backslash E)$ est alors homotope à (S^1, S^1) ce qui veut dire qu'il n'y a pas de cycles évanescents en ce point.

D'où le résultat

$$\varphi^q_{\overline{l}_1 - s}(\mathcal{F}^\bullet_1)_{(a,t)} = \begin{cases} \mathbb{Q} \text{ si } q = 1 \text{ et } (a,t) \in \pi^{-1}((\{s\} \times \mathbb{P}^2) \cap A), \quad t \neq t_a, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

L'avantage de la première compactification est que dimsupp $\varphi_{\overline{l}-s}(\mathcal{F}^\bullet) = 0$, son défaut est que le plongement j n'est pas affine, en particulier le faisceau $Rj_*(\mathbb{Q}_X[3])$ n'est pas pervers. La deuxième compactification corrige ce défaut mais par contre cette fois dimsupp $\varphi_{\overline{l}_1 - s}(\mathcal{F}^\bullet_1) = 1$.

Remarque 1.6.5 Pour le cas $l : \mathbb{C}^3\backslash C \longrightarrow \mathbb{C}$ que l'on vient de discuter on peut calculer $b_4(X)$ et $b_4(F)$ et vérifier que $b_4(X) \neq b_4(F)$. Cela entraîne, via le théorème 1.3.5, que $d(\overline{f}) > 0$ pour toute compactification avec j affine.

Pour calculer $b_4(X)$ on utilise la suite exacte de Gysin pour une intersection complète lisse

$$H^4(\mathbb{C}^3) \longrightarrow H^4(X) \xrightarrow{R} H^1(C) \longrightarrow H^5(\mathbb{C}^3) \longrightarrow$$

d'où $b_4(X) = b_1(C) = 1 - \chi(C) = 1 - (\chi(Z) - de) = 1 + de - (4 - d - e)de = 1 - (3 - d - e)de \neq 0$. D'autre part $F = \mathbb{C}^2\backslash\{de \text{ points}\}$ a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères de dimension 3, donc $b_4(F) = 0$. Des calculs de ce type nous permettent aussi de montrer que les applications l et $\overline{l}_1$ sont des applications sympa.

Cet exemple est un cas particulier de la remarque 1.6.3 (i) et (ii). Ici, on peut calculer de deux façons différentes $\chi(F)$ ce qui va nous permettre de calculer le nombre λ. En effet on a

$$\chi(F) = 1 - de,$$

$$\chi(F) = \chi(X) + (\mu + \lambda) = (1 + de - \chi(Z)) + (\mu + \lambda),$$

$$\mu = 0.$$

On en conclut que $\lambda = -c$ est dans ce cas strictement négatif.

Si H est un hyperplan générique de $\mathbb{C}^3$ alors on peut considérer $\bar{l}_H = \bar{l}_{|H\backslash C}$, $\lambda_H = \lambda(\bar{l}_H)$. On a $\chi(F_{\bar{l}_H}) = \chi(H\backslash C) - \lambda_H$ ce qui nous donne $\lambda_H = -de$. Donc $\lambda + \lambda_H$ est strictement négatif contrairement au cas des polynômes à singularités isolées, voir [CD], p. 133.

Chapitre 2

Sur les paires spectrales de polynômes à deux variables

2.1 Introduction

Le contenu du chapitre est le suivant.

Dans la section 2.2, on donne une définition des paires spectrales (et du spectre) puis on rappelle des résultats de Steenbrink et de Dimca qui nous serviront par la suite.

Dans la section 2.3, on donne une formule pour les paires spectrales de polynômes à deux variables qui fait intervenir la multiplicité des diviseurs dans la résolution à l'infini. Par la suite, on montre comment on peut calculer les paires spectrales (ou le spectre) à partir du diagramme de Eisenbud et Neumann de l'entrelacs à l'infini de la fibre générique (celui-ci détermine la topologie de la fibre générique en tant que courbe lisse plongée dans $\mathbb{C}^2$, voir [N1]). On donne aussi une autre description.

Dans la section 2.4, on considère le cas irréductible (singularité irréductible ou polynôme irréductible à l'infini).

Dans la section 2.5, on considère le cas non dégénéré par rapport au polygone de Newton et commode (pour une singularité ou pour un polynôme).

Dans la section 2.6, on définit et on calcule le spectre associé à un parallélogramme à l'aide des fonctions génératrices.

Enfin dans la section 2.7, on finit par des exemples qui illustrent ce qui précède.

2.2 Définition du spectre et rappels

Soit $f : X \to S$ un morphisme de variétés algébriques complexes telles que $\dim X = n+1$ pour $n \geq 0$ et $\dim S = 1$. On suppose que X et S sont lisses et que $\overline{X}$ et $\overline{S}$ sont des compactifications lisses de X et S respectivement et telles que le prolongement $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{S}$ soit un morphisme.

Soit $B \subset S$ un ensemble fini tel que si on pose $S^* = S \setminus B$ et $X^* = X \setminus f^{-1}(B)$, alors $f^* : X^* \to S^*$ est une fibration topologique localement triviale avec comme fibre générique F. On suppose aussi que $\overline{f}^* : \overline{X}^* \to \overline{S}$ est une fibration topologique localement triviale.

On pose $\overline{B} = B \cup (\overline{S} \setminus S)$ et $F_s = f^{-1}(s)$ pour chaque $s \in S$. La fibre F_s est homéomorphe à F pour chaque $s \in S^*$.

2.2.1 Structure de Hodge mixte limite

Pour tout $b \in \overline{B}$, il existe une structure de Hodge mixte limite sur la cohomologie $H^*(F, \mathbb{Q})$, voir [SZ]. Quand $H^*(F, \mathbb{Q})$ est équipé de cette structure de Hodge Mixte, la structure correspondante sera notée $H^*_{lim,b}(F, \mathbb{Q})$. On la notera aussi tout simplement $H^*(F, \mathbb{Q})$ lorsqu'il n'y a pas ambiguïté. Les groupes $H^*(F_s, \mathbb{Q})$ pour s dans S seront équipés de la structure de Hodge mixte de Deligne, voir [De].

2.2.2 Définition des paires spectrales et du spectre

Soit (H, T, m) un triplet formé d'une structure de Hodge mixte (SHM) H sur $\mathbb{Q}$, d'un automorphisme d'ordre fini T de H et d'un entier m. On note W la filtration par le poids (filtration croissante) sur H et F la filtration de Hodge (filtration décroissante) sur $H_{\mathbb{C}} = H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$.

Les paires spectrales du triplet (H, T, m)

$$\mathrm{Spp}(H, T, m) = \sum_{\alpha, w} m_{\alpha,w}(H, T, m)(\alpha, w) \in \mathbb{N}^{(\mathbb{Q}\times\mathbb{Z})}$$

sont données par

$$m_{\alpha,w}(H, T, m) = \begin{cases} \dim Gr^W_w Gr^{[m-\alpha]}_F H_\lambda, \text{ si } \lambda \neq 1 \\ \dim Gr^W_{w+1} Gr^{[m-\alpha]}_F H_\lambda, \text{ si } \lambda = 1 \end{cases}$$

où $\lambda = exp(-2i\pi\alpha)$, $H_\lambda = \mathrm{Ker}\ (T - \lambda I)$ et $[x]$ désigne la partie entière de x.

Le spectre du triplet (H, T, m)

$$\mathrm{Spp}(H, T, m) = \sum_{\alpha} m_\alpha(H, T, m)(\alpha) \in \mathbb{N}^{(\mathbb{Q})}$$

est donné par la projection sur la première composante des paires spectrales, c'est à dire $m_\alpha(H, T, m) = \sum_{w \in \mathbb{Z}} m_{\alpha,w}$, où $\mathrm{Spp}(H, T, m) = \sum_{\alpha,w} m_{\alpha,w}(H, T, m)(\alpha, w)$.

Dans [Dim], A. Dimca (suivant C. Sabbah [Sab2]) donne une définition similaire. Pour passer de la définition donnée ici à celle de Dimca, il faut appliquer la transformation suivante pour chaque paire :

$$(\alpha, w) \to \begin{cases} (\alpha+1, w) & \text{si } \exp(-2i\pi\alpha) \neq 1, \\ (\alpha+1, w+1) & \text{si } \exp(-2i\pi\alpha) = 1. \end{cases}$$

Si on prend f comme dans les hypothèses du départ, avec $b \in \overline{B}$, on pose

$$(H, T, m) = (\tilde{H}^j_{lim,b}(F, \mathbb{Q}), S_b, j), \ j \geq 1,$$

où S_b est la partie semi-simple de l'opérateur de monodromie T_b (associé à un tour autour de $b \in \overline{S}$ dans le sens trigonométrique). On note $\mathrm{Spp}^j(f, b)$ les paires spectrales correspondantes et $\mathrm{Sp}^j(f, b)$ le spectre. On pose de plus

$$\mathrm{Spp}(f, b) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \mathrm{Spp}^j(f, b),$$

et

$$\mathrm{Sp}(f, b) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \mathrm{Sp}^j(f, b).$$

Remarque 2.2.1 Historiquement la première définition des paires spectrales a été donnée dans le cas d'une singularité isolée par Steenbrink dans [St1]. La principale difficulté dans cette situation est de définir la structure de Hodge mixte sur la fibre de Milnor (voir [St1] et [SS]).

Remarque 2.2.2 Pour une application polynomiale, on sait construire deux structures de Hodge mixtes sur $H^*(F, \mathbb{Q})$: celle définie précédemment et une autre définie à l'aide des D-modules. Dans le cas d'une application polynomiale cohomologiquement modérée (plus généralement faiblement modérée voir section 2.3.2, et [NS]) on sait que les paires spectrales associées à ces deux structures coïncident. De plus la deuxième définition nous permet de montrer que l'on a comme dans le cas local l'inclusion du support du spectre dans l'intervalle $]-1, n[$ et qu'il est symétrique par rapport à $\frac{n-1}{2}$ (voir [Sab3] section 5 et [Sab2] Corollary 13.9).

Remarque 2.2.3 Si $\mathrm{Spp}(H,T,m) = (\alpha_1) + \cdots + (\alpha_\mu)$ alors on note

$$\chi_{\mathrm{Spp}(H,T,m)}(t) = \sum_{i=1}^{\mu} t^{\alpha_i+1}.$$

C'est une notation introduite par Saito, elle a l'avantage de permettre des calculs sur le spectre. On verra dans la suite (sections 2.6.3, 3.3.2 et 3.4) que cela nous permet, dans le cas non dégénéré par rapport au polygone de Newton, de calculer explicitement la variance du spectre.

De la même façon que précédemment, on note

$$\chi^j_{(f,b)} = \chi_{\mathrm{Spp}^j(f,b)}$$

et

$$\chi_{(f,b)} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \chi^j_{(f,b)}.$$

2.2.3 Construction de Steenbrink

Soient $b \in \overline{B}$ fixé, $\mathbb{D}$ un petit disque autour de b (on peut supposer que c'est le disque unité), $\overline{N} = \overline{f}^{-1}(\mathbb{D})$ et $N^* = f^{-1}(\mathbb{D}^* \cap S)$. On suppose que $\overline{N} \backslash N^*$ est un diviseur à croisements normaux et égal à $E_1 \cup \cdots \cup E_m$. Notons e_i la multiplicité de E_i et $e =$ ppcm $(e_0, \cdots, e_m)$. Il est aussi utile de décomposer cette réunion sous la forme :

$$\overline{N} \setminus N^* = \mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_{\mathrm{dic}},$$

où

- $\mathcal{E}_b$ est la réunion des composantes sur lesquelles $\overline{f}$ prend la valeur b,
- $\mathcal{E}_{\mathrm{dic}}$ est la réunion des composantes sur lesquelles $\overline{f}$ est surjective. Par définition, un dicritique est une composante de $\mathcal{E}_{\mathrm{dic}}$.

On notera aussi

$$\mathcal{E}_{\mathrm{dic},b} = \mathcal{E}_{\mathrm{dic}} \cap \overline{f}^{-1}(b).$$

On peut alors faire la construction suivante, qui est un cas particulier de celle de Steenbrink dans [St1]. Soit $\tilde{\mathbb{D}}$ une autre copie du disque unité et $\sigma : \tilde{\mathbb{D}} \to \mathbb{D}$, définie par $\sigma(t) = t^e$.

Notons $\tilde{N}$ la normalisation de $N \times_{\mathbb{D}} \tilde{\mathbb{D}}$, $\pi : \tilde{N} \to N$ et $\tilde{f} : \tilde{N} \to \tilde{\mathbb{D}}$ les applications naturelles.

Notons $D_i = \pi^{-1}(E_i)$, $i = 1, \cdots, m$ et $D = \cup_{i=0}^m D_i$.

$$\begin{tikzcd} D_i \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & \tilde{N} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi"] & \tilde{\mathbb{D}} \arrow[d, "\sigma"] \\ E_i \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] & \mathbb{D} \end{tikzcd}$$

Cette construction nous permet d'avoir un diviseur réduit au-dessus de la valeur b.

On note aussi $\tilde{D}^p$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ l'union disjointe des intersections $D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_p}$, pour $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m_b$.

D'après Steenbrink [St1], on a le corollaire suivant

Théorème 2.2.4 (Steenbrink [St1] Corollaire 2.9) *Il existe une suite spectrale de structures de Hodge mixtes munies d'automorphismes d'ordre fini telle que*

$$E_1^{-r,q+r} = \bigoplus_{k \geq \max(0,-r)} H^{q-r-2k}(\tilde{D}^{(2k+r+1)}, \mathbb{Q})(-r-k) \Rightarrow (H^q_{lim,b}(F, \mathbb{Q}), S_b).$$

En effet, les groupes de cohomologie $H^q(\tilde{D}^{(r)}, \mathbb{Q})$ sont munis d'une structure de Hodge pure (car $\tilde{D}^{(r)}$ est réunion disjointe de variétés projectives lisses), ainsi que d'un automorphisme induit par la monodromie de certains revêtements cycliques $\pi : \tilde{D}^r \to \tilde{E}^r$, voir (loc. cit.) pour plus de détails.

2.2.4 Un résultat de A. Dimca en dimension 2

En dimension 2, il est possible de comparer les deux types de paires spectrales $\mathrm{Spp}(f, b)$ et $\mathrm{Spp}(\overline{f}, b)$. On a, grâce à Dimca [Dim] Proposition 3.5, le résultat suivant

Proposition 2.2.5 *Pour $b \in \overline{B}$, on a*

$$\mathrm{Spp}^1(f, b) = \mathrm{Spp}^1(\overline{f}, b) + B(f, b)$$

où

$$B(f, b) = (|\mathcal{E}_{\mathrm{dic},b}| - 1)(0, 1) + \sum_{\substack{D \subset \mathcal{E}_{\mathrm{dic},b} \\ D \,\mathrm{dicritique} \\ a \in D}} \left(\sum_{0 < s < k_a} \left(-\frac{s}{k_a}, 2 \right) \right),$$

$k_a = \mathrm{ord}_a f_{|D}$.

2.3 Spectre d'une application polynomiale à deux variables

Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ une application polynomiale. On supposera pour toute la suite du chapitre que f a une fibre générale connexe.

2.3.1 Construction explicite d'une compactification

L'homogénéisé de f nous donne une fonction rationnelle de $\mathbb{P}^2$ dans $\mathbb{P}^1$ qui a un nombre fini de points d'indétermination sur la droite à l'infini L_∞. Il existe une suite finie d'éclatements qui nous permettent de prolonger f sur une compactification de $\mathbb{P}^2$. On construit ainsi X, π et $\overline{f}$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & \mathbb{C} \arrow[d, hook] \\
\mathbb{P}^2 \arrow[r, dotted] & \mathbb{P}^1 \\
X \arrow[u, "\pi"] \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

On se trouve maintenant dans les circonstances de la section 2.2.1 et on peut définir les paires spectrales $\mathrm{Spp}^1(f, \infty)$ (resp. le spectre $\mathrm{Sp}^1(f, \infty)$) de f au voisinage de l'infini, où $\{\infty\} = \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{C}$. L'objet de ce chapitre est principalement l'étude de ces paires spectrales.

Pour pouvoir utiliser la construction de Steenbrink on effectue des éclatements supplémentaires afin d'avoir $\overline{f}^{-1}(t)$ à croisements normaux pour tout t dans $\mathbb{P}^1$.

On classe les composantes de $\overline{f}^{-1}(L_\infty)$ de la façon suivante

$$f^{-1}(L_\infty) = \mathcal{E}_\infty \cup \mathcal{E}_{cte} \cup \mathcal{E}_{dic},$$

où

$\mathcal{E}_\infty$ est la réunion des composantes sur lesquelles $\overline{f}$ prend la valeur ∞,

$\mathcal{E}_{cte}$ est la réunion des composantes sur lesquelles $\overline{f}$ prend une valeur constante finie.

On définit le degré d'un dicritique D par le degré de l'application induite $\overline{f}_{|D} : D \to \mathbb{P}^1$. Plus tard, on va décrire cette compactification à l'aide d'un graphe. Pour décrire ce graphe, on indexe les composantes de $\overline{f}^{-1}(\infty)$ par $V \cup \{\infty\}$ et les composantes de $\mathcal{E}_{\mathrm{dic}}$ par A :

$$\overline{f}^{-1}(\infty) = \bigcup_{v \in V \cup \{\infty\}} E_v,$$

$E_\infty = L_\infty$ et
$$\mathcal{E}_{\text{dic}} = \bigcup_{v \in A} E_v.$$

2.3.2 Polynômes «bons» à l'infini

On va donner maintenant une propriété importante dont jouissent les polynômes dont la fibre générique à une seule branche à l'infini. Pour cela, on va commencer par rappeler quelques définitions connues.

Définition 2.3.1 ([NR]) *Soit $f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ une application polynomiale. Une fibre $f^{-1}(c)$ de f (resp. un nombre complexe c) est dite régulière (resp. valeur régulière) s'il existe un voisinage D de c dans $\mathbb{C}$ tel que $f_{|f^{-1}(D)} : f^{-1}(D) \to D$ est une fibration $\mathcal{C}^\infty$ localement triviale et est dite régulière à l'infini (resp. valeur régulière à l'infini) s'il existe un ensemble compact K dans $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que $f_{|f^{-1}(D)\setminus K} : f^{-1}(D) \setminus K \to D$ est une fibration $\mathcal{C}^\infty$ localement triviale.*

Le polynôme $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est dit bon si toutes ses fibres sont régulières à l'infini.

Définition 2.3.2 ([Br]) *Soit $f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ un polynôme. Le polynômes f est dit modéré s'il existe un voisinage compact de ses points critiques tel que le gradient est minoré par une constante strictement positive en dehors de ce compact.*

Il existe d'autres notions pour un "bon" comportement à l'infini :
- les polynômes M-modérés introduits par Némethi et Zaharia, voir [NZ1],
- les polynômes sans singularités à l'infini définis par Siersma et Tibăr, voir [ST1],
- les polynômes cohomologiquement modérés introduits par Sabbah, voir [Sab4] et l'exemple 1.2.13.

Un polynôme qui vérifie l'une des cinq propriétés précédentes est aussi appelé un polynôme faiblement modéré par Némethi et Sabbah, voir [NS].

En dimension 2, on sait que les valeurs irrégulières à l'infini sont données par la réunion de $\overline{f}(\mathcal{E}_{cte})$ et des valeurs critiques des restrictions de $\overline{f}$ à chaque composante dicritique. D'après Broughton [Br] on sait qu'un polynôme modéré n'a pas de valeurs irrégulières à l'infini. En outre en dimension 2 les notions de polynômes M-modérés et de polynômes bons sont exactement les mêmes, voir [Ha]. L'ensemble des polynômes modérés est inclus dans l'ensemble des polynômes bons. Cassou-Noguès et Ha [CH] ont exhibé un polynôme qui est bon mais pas modéré donc on a une inclusion stricte. Pour d'autres notions de bon comportement à l'infini des polynômes et de l'étude des relations entre ces notions on peut regarder [NZ2] en plus de l'article [NZ1].

On a quelques informations générales sur le spectre de tels polynômes, en effet pour les polynômes cohomologiquement modérés Sabbah [Sab2] a montré que le spectre est contenu dans $]-1, n-1[$ et symétrique par rapport au point $\frac{n-2}{2}$. On a les mêmes propriétés dans le cas M-modéré (voir [NS]) et dans le cas sans singularités à l'infini définis par Siersma et Tibăr puisque ces polynômes sont des polynômes cohomologiquement modérés.

Douai [Do2] a montré en explicitant des résultats de [Sab2] que dans le cas d'un polynôme non dégénéré par rapport à son polygone de Newton à l'infini et commode (en particulier modéré) on peut calculer le spectre à partir de la filtration de Newton.

Grâce au lemme suivant, on a parmi les polynômes bons un analogue global de la famille des singularités irréductibles de courbes planes.

Définition 2.3.3 *Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ une application polynomiale. L'entrelacs à l'infini de f est l'entrelacs $f^{-1}(0) \cap S_R$ où S_R est une sphère de rayon R suffisamment grand.*

Lemme 2.3.4 ([NR] Lemma 7.1) *Si $V \subset \mathbb{C}^2$ est une fibre de $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ qui est réduite et dont son entrelacs à l'infini est un noeud (V est connexe à l'infini) alors f est un polynôme bon.*

2.3.3 Une formule pour les paires spectrales

Au graphe dual Γ'_∞ de la décomposition de $\mathcal{E}_\infty$, on rajoute des flèches qui correspondent aux dicritiques. On note Γ_∞ le graphe ainsi obtenu. Les sommets de Γ_∞ sont indexé par l'ensemble $A \cup V \cup \{\infty\}$. Par construction Γ_∞ est un arbre connexe (voir [LW], [N3]). On notera de plus R l'ensemble des points de rupture de Γ'_∞, c'est l'ensemble des sommets de Γ'_∞ qui ont au moins deux arêtes incidentes.

Pour $v \in A \cup V$, on définit $p(v) \in V \cup \{\infty\}$ le premier sommet rencontré dans un chemin de v à ∞ dans V (il est unique car Γ_∞ est un arbre).

On note

m_v la multiplicité de la transformée totale de $\overline{f}$ le long de E_v pour $v \in A \cup V \cup \{\infty\}$ (les dicritiques étant de multiplicité 0),

$\delta_v = \mathrm{pgcd}(m_v, m_{p(v)})$ pour $v \in V$ et δ_v est le degré du dicritique qui correspond à la flêche pour $v \in A$,

$V_v = \{\mu \in V \cup \{\infty\} : \mu \text{ est connecté à } v\}$, pour $v \in V \cup \{\infty\}$,

$r_v = \mathrm{pgcd}(m_\mu, \mu \in V_v)$, pour $v \in V \cup \{\infty\}$,

$\{x\} \in [0, 1[$ la partie fractionnaire de $x \in \mathbb{R}$.

On définit alors des éléments de $\mathbb{Z}^{(\mathbb{Q}\times\mathbb{Z})}$ par :

$$a_v = \sum_{\substack{0<s<m_v \\ m_v \nmid s r_v}} \left(-1 + \sum_{\mu \in V_v} \left\{\frac{s m_\mu}{m_v}\right\}\right) \left[\left(\frac{s}{m_v} - 1, 1\right) + \left(1 - \frac{s}{m_v}, 1\right)\right], \ v \in V \cup \{\infty\},$$

$$b_v = \sum_{0<s<r_v} \left[\left(-\frac{s}{r_v}, 2\right) + \left(\frac{s}{r_v}, 0\right)\right], \ v \in V \cup \{\infty\},$$

$$c_v = \sum_{0<s<\delta_v} \left[\left(-\frac{s}{\delta_v}, 2\right) + \left(\frac{s}{\delta_v}, 0\right)\right], \ v \in V,$$

$$c'_v = \sum_{0<s<\delta_v} \left(-\frac{s}{\delta_v}, 2\right), \ v \in A.$$

Théorème 2.3.5 *Pour une application polynomiale $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ à fibre générale connexe, on a*

$$\mathrm{Spp}^1(f, \infty) = \sum_{v \in R} a_v + \sum_{v \in R \setminus \{\infty\}} (c_v - b_v) - b_\infty + \sum_{v \in A} c'_v + (|A| - 1)(0, 1).$$

Preuve. Il suffit de suivre la preuve de [SSS] dans le cas local. On applique le théorème 2.2.4, qui nous donne une suite spectrale $E_1^{p,q}$ aboutissant à $H^*(\overline{F}, \mathbb{Q})$. On a

$$\begin{array}{ll} E_1^{-1,2} = H^0(\tilde{D}^{(2)}, \mathbb{Q})(-1), & \text{(pur de type } (1,1)), \\ E_1^{0,q} = H^q(\tilde{D}^{(1)}, \mathbb{Q}), \ q = 0,1,2 & \text{(pur de poids } q), \\ E_1^{1,0} = H^0(\tilde{D}^{(2)}, \mathbb{Q}), & \text{(pur de type } (0,0)), \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{ll} E_1^{-1,2} = \bigoplus_{v \in V} \mathbb{Q}(-1)^{\delta_v}, & \text{(pur de type } (1,1)), \\ E_1^{0,q} = \bigoplus_{v \in V \cup \{\infty\}} H^q(D_v, \mathbb{Q}), \ q = 0,1,2 & \text{(pur de poids } q), \\ E_1^{1,0} = \bigoplus_{v \in V} \mathbb{Q}^{\delta_v}, & \text{(pur de type } (0,0)), \end{array}$$

tous les autres $E_1^{p,q}$ sont nuls.

On en déduit

$$\begin{aligned}
\mathrm{Spp}(E_1^{-1,2}) &= \sum_{v\in V}\left(\sum_{0<s<\delta_v}\left(-\frac{s}{\delta_v},2\right)+(0,1)\right),\\
\mathrm{Spp}(E_1^{0,2}) &= \sum_{v\in V\cup\{\infty\}}\left(\sum_{0<s<r_v}\left(-\frac{s}{r_v},2\right)+(0,1)\right),\\
\mathrm{Spp}(E_1^{0,0}) &= \sum_{v\in V\cup\{\infty\}}\left(\sum_{0<s<r_v}\left(\frac{s}{r_v},0\right)+(1,-1)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Spp}(E_1^{1,0}) &= \sum_{v\in V}\left(\sum_{0<s<\delta_v}\left(\frac{s}{\delta_v},0\right)+(1,-1)\right),\\
\mathrm{Spp}(E_1^{0,1}) &= a_v.
\end{aligned}$$

De la même façon, on a

$$\mathrm{Spp}(\overline{f},\infty)=\sum_{r,s}(-1)^{r+s-1}\mathrm{Spp}(E_1^{r,s})+(1,-1),$$

on peut conclure en utilisant la proposition 2.2.5 qui implique

$$\mathrm{Spp}^1(f,\infty)=\mathrm{Spp}(\overline{f},\infty)+\mathrm{Spp}^0(\overline{f},\infty)+\mathrm{Spp}^2(\overline{f},\infty)+B(f,\infty).$$

□

Remarque 2.3.6 – Dans la définition que l'on donne des paires spectrales (resp. du spectre) $\mathrm{Sp}^1(f,\infty)$, on fait un tour dans $\mathbb{P}^1$ autour du point ∞ dans le sens trigonométrique. Ramené à $\mathbb{C}$ ce petit cercle autour du point ∞ devient (à homotopie près dans $\mathbb{P}^1 \smallsetminus B$) un grand cercle qui contient B, orienté dans le sens opposé au sens trigonométrique. Ce changement d'orientation change les paires spectrales (resp. le spectre). Le lemme 2.6 dans [Dim] nous explique comment faire.
Si l'on note $\mathrm{Spp}^1_+(f,\infty)$ (resp. $\mathrm{Sp}^1_+(f,\infty)$) les paires spectrales ainsi obtenues alors, on a :

$$\mathrm{Spp}^1_+(f,\infty)=\sum_{v\in R}a_v^+ + \sum_{v\in R\backslash\{\infty\}}(c_v-b_v)-b_\infty+\sum_{v\in A}c'_v+(|A|-1)(0,1),$$

où

$$a_v^+ = \sum_{\substack{0<s<m_v \\ m_v \nmid s r_v}} \left(-1 + \sum_{\mu \in V_v} \left\{ \frac{s m_\mu}{m_v} \right\} \right) \left[\left(-\frac{s}{m_v}, 1 \right) + \left(\frac{s}{m_v}, 1 \right) \right], \ v \in R.$$

- Si $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est un polynôme homogène (ou quasi homogène) alors on a

$$\mathrm{Spp}_+^n(f, \infty) = \mathrm{Spp}^n(f, 0).$$

- Ici on a choisi le sommet qui correspond à la droite à l'infini comme point de base. On peut, comme dans le cas local, choisir n'importe quel sommet.
- Le spectre $\mathrm{Sp}^1(f, \infty)$ est symétrique par rapport à 0 si et seulement si la somme $\sum_{v \in A} c'_v$ est nulle c'est-à-dire tous les dicritiques sont de degré 1, fait déjà remarqué dans [Dim].

2.3.4 Calcul des paires spectrales à partir du diagramme de Eisenbud et Neumann de l'entrelacs à l'infini de la fibre générique

Pour la notion d'entrelacs ou de multientrelacs, on peut se référer à [EN] et pour ce qui est de la notion d'entrelacs à l'infini de la fibre générique d'un polynôme à [N1].

Pour les définitions, les détails et les notations de ce qui suit, on se réfère à [N3].

On va montrer ici comment calculer les paires spectrales $\mathrm{Spp}_+^1(f, \infty)$ à partir du diagramme de Eisenbud et Neumann (minimal) de l'entrelacs à l'infini de la fibre générique noté $\Gamma(K_{f,\infty})$.

Notons $\Gamma'(K_{f,\infty})$ le graphe obtenu de $\Gamma(K_{f,\infty})$ en ajoutant les sommets qui correspondent aux dicritiques. Le degré d'un dicritique est le nombre de flèches attachées au sommet correspondant.

Si l'on ôte tous les sommets de $\Gamma'(K_{f,\infty})$ de multiplicité inférieure ou égale à 0 et que l'on remplace les sommets horizontaux par une flèche (dont la multiplicité est l'unique multiplicité qui laisse invariant les multiplicités des autres sommets) alors on obtient le diagramme de Eisenbud et Neumann du multientrelacs fibré K_0 défini dans [N1] et rappelé dans [AC].

Comme l'ont remarqué [SSS], il est possible de donner une définition des paires spectrales pour les multientrelacs fibrés. On utilise ici cette définition et l'on note $\mathrm{Spp}(\Gamma(K_0))$ les paires spectrales ainsi obtenues.

L'objet de ce paragraphe est donc de montrer la proposition suivante

Proposition 2.3.7

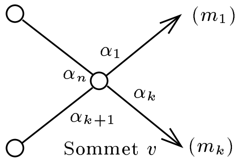
$$\mathrm{Spp}_+^1(f, \infty) = \mathrm{Spp}(\Gamma(K_0)).$$

Cela répond ainsi dans un cas particulier à la question posée dans [SSS] remarque 4.1 sur l'interprétation de $\mathrm{Spp}(\Gamma(K_0))$.

Indépendement P. Cassou-Noguès [C1] a considéré des formules similaires associées à un diagamme de Eisenbud et Neumann et elle a conjecturé implicitement une relation avec le spectre d'un polynôme.

Preuve. D'après [N3] section 6, on sait exactement comment passer du graphe dual de la résolution de f au diagramme de Eisenbud et Neumann de l'entrelacs à l'infini de la fibre générique de f.

Si on calcule les nombres s_j associés à un sommet v comme dans le cas local (après désatellisation, voir [C1]).



où $m_i = 0$ pour $i = k+1 \cdots n$ et β_j, $j = 1, \cdots, n$ tels que

$$\beta_j \alpha_1 \cdots \hat{\alpha_j} \cdots \alpha_n \equiv 1 \mathrm{mod} \alpha_j$$

et

$$s_j = \frac{m_j - \beta_j m_v}{\alpha_j},$$

alors les s_j nous donnent l'opposé des multiplicités des sommets voisins au sommet v modulo m_v. Cela est dû au fait qu'au diagramme de résolution correspond (avec même sommets et même arêtes) un diagramme de Eisenbud et Neumann dont les arêtes ont pour déterminant -1, voir [N3] section 6.

D'après ce qui précède, les seules parties des paires spectrales $\mathrm{Spp}^1_+(f, \infty)$ et $\mathrm{Spp}(\Gamma(K_0))$ qui peuvent être différentes sont celles qui correspondent aux termes a_v.

Dans le premier cas, on a :

$$a_v = \sum_{\substack{0<s<m_v \\ m_v \nmid sr_v}} \left(-1 + \sum_{\mu \in V_v} \left\{ \frac{sm_\mu}{m_v} \right\} \right) \left[\left(\frac{s}{m_v}, 1 \right) + \left(\frac{s}{m_v}, 1 \right) \right]$$

et dans le deuxième cas, on a :

$$a_v = \sum_{\substack{0<s<m_v \\ m_v \nmid sr_v}} \left(-1 + \sum_{\mu \in V_v} \left\{ \frac{-sm_\mu}{m_v} \right\} \right) \left[\left(\frac{s}{m_v} - 1, 1 \right) + \left(1 - \frac{s}{m_v}, 1 \right) \right].$$

Pour conclure, on remarque que les deux sommes précédentes sont égales. □

2.3.5 Une autre description des paires spectrales

On a une équivalence entre la donnée des paires spectrales de $H^1(F,\mathbb{Q})$ et la donnée de trois polynômes avec certains nombres entiers. Plus précisemment, on a équivalence entre la donnée de

$$\mathrm{Spp}^1_+(F,\infty) = \sum_{\alpha,w} m_{\alpha,w}(\alpha,w)$$

et la donnée de

$$\begin{cases} \Delta(t) = \prod_{\alpha,w}(t-\lambda)^{m_{\alpha,w}}, \\ \Delta^1(t) = \prod_{0<\alpha<1}(t-\lambda)^{m_{\alpha,0}}, \\ \Delta'(t) = \prod_{-1<\alpha<0}(t-\lambda)^{m_{\alpha,2}-m_{-\alpha,0}}, \\ \sigma_\lambda = m_{\alpha,1} - m_{\alpha+1,1},\ \lambda = \exp(-2i\pi\alpha), \\ r \text{ le nombre de branches à l'infini.} \end{cases}$$

Réciproquement, si on connait les multiplicités des trois polynômes précédents ainsi que σ_λ et r, on peut calculer les paires spectrales comme suit. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on lui associe ses multiplictés m_λ, m^1_λ et m'_λ dans $\Delta(t)$, $\Delta^1(t)$ et $\Delta'(t)$ respectivement. Avec $\lambda = \exp(2i\pi\alpha)$, on a

$$\begin{cases} m_{\alpha,2} = m^1_\lambda + m'_\lambda & \text{pour } -1<\alpha<0, \\ m_{\alpha,1} = (m_\lambda - m'_\lambda - 2m^1_\lambda + \sigma_\lambda)/2 & \text{pour } -1<\alpha<0, \\ m_{\alpha,1} = (m_\lambda - m'_\lambda - 2m^1_\lambda - \sigma_\lambda)/2 & \text{pour } 0<\alpha<1, \\ m_{\alpha,0} = m_{-\alpha,2} & \text{pour } 0<\alpha<1, \\ m_{0,1} = r-1. \end{cases}$$

On remarque que

$\Delta(t)$ est le polynôme caractéristique de la monodromie,

$\Delta^1(t)$ est le polynôme de la monodromie restreinte à $\mathrm{Im}(I-(T^1_\infty)^q)$ (q est un multiple commun aux ordres des valeurs propres de la monodromie).

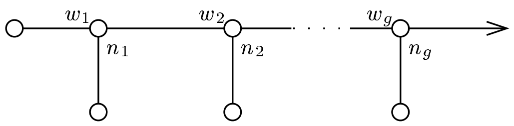
Pour le calcul explicite de $\Delta(t)$, on peut regarder la proposition 3.7 de [AC] ou le théorème 12.1 de [EN].

Pour le calcul explicite de $\Delta^1(t)$, on peut regarder la proposition 3.10 de [AC] ou le théorème 14.1 de [EN].

Pour le polynôme $\Delta'(t)$ Dimca [Dim] donne une description de $\Delta'(t)$ (description qui est en fait donnée par la proposition 2.2.5).

2.4 Calcul du spectre dans le cas irréductible

Considérons le diagramme de Eisenbud et Neumann suivant



que l'on note $\Gamma(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g)$ avec $(n_k, w_k) \in \mathbb{N}^{*2}$ pour $1 \leq k \leq g$.

On pose aussi $\Delta_k(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g) = w_k - n_{k-1} n_k w_{k-1}$ pour $2 \leq k \leq g$ et $n'_k = n_{k+1} \cdots n_g$ pour $2 \leq k \leq g$ et $n'_g = 1$.

On a le théorème suivant (voir [EN] pour le cas local et [NN2] pour l'entrelacs à l'infini).

Théorème 2.4.1 *Le noeud d'un germe irréductible a un diagramme de Eisenbud et Neumann de la forme*

$$\Gamma(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g)$$

avec $n_k > 1$, $w_k > 1$, $\mathrm{pgcd}(n_k, w_k) = 1$, *pour* $1 \leq k \leq g$ *et* $\Delta_k > 0$ *pour* $2 \leq k \leq g$.

Réciproquement un diagramme $\Gamma(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g)$ *avec* $n_k > 1$, $\mathrm{pgcd}(n_k, w_k) = 1$, *pour* $1 \leq k \leq g$, $\Delta_k > 0$ *pour* $2 \leq k \leq g$ *provient du noeud d'un germe irréductible de courbe plane.*

Un noeud à l'infini d'une courbe algébrique plane a un diagramme de Eisenbud et Neumann de la forme

$$\Gamma(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g)$$

avec

$$\begin{cases} n_k > 1, \quad w_k > 1, \quad \mathrm{pgcd}(n_k, w_k) = 1, \ \textit{pour } 1 \leq k \leq g, \\ \Delta_k < 0, \ \textit{pour } 2 \leq k \leq g, \quad w_1 < n_1, \\ w_{k+1} \in n_1 n_2 \cdots n_k \mathbb{N} \oplus n_2 \cdots n_k w_1 \mathbb{N} \oplus \cdots \oplus n_k w_{k-1} \mathbb{N} \oplus w_k \mathbb{N}, \quad \text{pour } 2 \leq k \leq g-1. \end{cases}$$

Comme dans le cas local, on a la réciproque.

Définition 2.4.2 *Un polynôme f est dit irréductible à l'infini si f est réduit et si l'entrelacs à l'infini associé à f est un noeud. Ceci est équivalent à dire qu'il existe un seul dicritique et que celui-ci est de degré* 1.

Remarque 2.4.3 Le lemme 2.3.4 de Neumann et Rudolph nous permet de dire que si f est irréductible à l'infini alors pour toute constante $c \in \mathbb{C}$, $f - c$ est aussi un polynôme irréductible à l'infini.

Définition 2.4.4 *Les paires spectrales associées au diagramme* $\Gamma(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g)$ *avec* $(n_k, w_k) \in \mathbb{Z}^2$ *pour* $1 \leq k \leq g$ *sont*

$$\mathrm{Spp}(\Gamma(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g)) = \sum \left(1 - \frac{1}{n'_k}\left(\frac{i}{n_k} + \frac{j}{w_k} + r\right), 1\right) + \left(\frac{1}{n'_k}\left(\frac{i}{n_k} + \frac{j}{w_k} + r\right) - 1, 1\right)$$

avec $\quad 1 \leq k \leq g, \quad 0 < i < n_k, \quad 0 < j < w_k,$ *tels que* $\frac{i}{n_k} + \frac{j}{w_k} < 1$ *et* $0 \leq r < n'_k$.

Théorème 2.4.5 *Soit* $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *(resp.* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*) un germe irréductible (resp. un polynôme irréductible à l'infini) dont le diagramme du noeud associé est* $\Gamma(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g)$ *alors*

$$\mathrm{Spp}^1(f, 0) = \mathrm{Spp}(\Gamma(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g))$$

(resp. $\mathrm{Spp}^1_+(f, \infty) = \mathrm{Spp}(\Gamma(n_1, w_1; \cdots; n_g, w_g))$*).*

Preuve. A un sommet v_k du diagramme il correspond le couple (n_k, w_k), on peut montrer que l'on a $\delta'_k = n'_{k-1}$, $r_k = n'_k$. Donc pour $1 \leq k \leq g$, on a

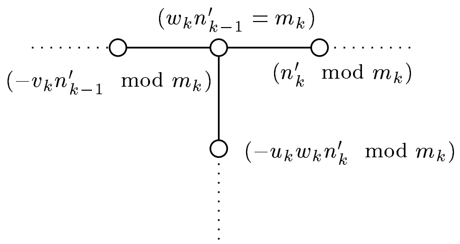
$$c_{v_k} = \sum_{0 < s < n'_{k-1}} \left(-\frac{s}{n'_{k-1}}, 2\right) + \left(\frac{s}{n'_{k-1}}, 0\right), \quad \text{pour } 1 \leq k \leq g$$

et

$$b_{v_k} = \sum_{0 < s < n'_k} \left(-\frac{s}{n'_k}, 2\right) + \left(\frac{s}{n'_k}, 0\right), \quad \text{pour } 0 \leq k \leq g.$$

On remarque donc que $\mathrm{Spp}(f) = \sum_{v \in R} a_v$.

Considérons un sommet v_k fixé, on va calculer a_{v_k}. On choisit u_k, $v_k \in \mathbb{Z}$ tels que $w_k u_k + n_k v_k = 1$.



En faisant une division euclidienne de s par $w_k n_k$ et en utilisant le théorème de Bezout, on obtient

$$a_{v_k} = \sum_{\substack{0<s<w_k n'_k \\ w_k n_k \nmid s}} A_k(s) \left[\left(\frac{s}{w_k n'_k} - 1, 1 \right) + \left(1 - \frac{s}{w_k n'_k}, 1 \right) \right]$$

avec

$$A_k(s) = \begin{cases} 1, & \text{si } s = \alpha w_k + \beta n_k + r w_k n_k, \quad 0 < \alpha < n_k, \quad 0 < \beta < w_k, \quad 0 \leq r < n'_k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\square$

2.5 Calcul du spectre dans le cas non-dégénéré par rapport au polygone de Newton et commode

2.5.1 Non dégénérescence : définitions

Soit $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^{n+1}} a_k x^k$, un germe analytique définissant une singularité isolée.

On définit $\Gamma_0(f)$ comme étant l'enveloppe convexe de l'ensemble

$$\bigcup_{\substack{k \in \mathbb{N}^{n+1} \\ k \neq 0}} \left(k + \mathbb{R}_+^{n+1} \right).$$

Le polyèdre $\Gamma_0(f)$ est appelé polyèdre de Newton du germe f.

De la même façon, pour une application polynomiale f, $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^{n+1}} a_k x^k$, on définit $\Gamma_\infty(f)$ comme étant l'enveloppe convexe de l'ensemble

$$\{0\} \cup \{k \in \mathbb{N}^{n+1} : a_k \neq 0\}.$$

Le polyèdre $\Gamma_\infty(f)$ est appelé polyèdre de Newton de l'application polynomiale f.

Pour la suite f est un germe ou une application polynomiale comme précédemment et on note $\Gamma(f)$ le polyèdre associé à f.

Soit σ une face du polyèdre de f et $f_\sigma(x) = \sum_{k \in \sigma} a_k x^k$.

Définition 2.5.1 *On dit que f est non dégénéré par rapport à son polyèdre de Newton si pour chaque face σ de $\Gamma(f)$, les polynômes $\left(x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_\sigma$, $i = 1, \cdots, n$ ne s'annulent pas simultanément sur $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^{n+1}$ (voir [Kou]).*

2.5.2 Filtration de Newton

On se place dans la situation précédente avec f un germe ou une application polynomiale. Soit $\Gamma(f)$ le polyèdre associé à f. Si σ est une face de $\Gamma(f)$, on note ϕ_σ la forme linéaire qui vaut 1 sur σ. Si $g \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$, $g(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^{n+1}} b_k x^k$, alors on note

$$\Phi_\sigma(g) = \max_{\substack{k \in \mathbb{N}^{n+1} \\ a_k \neq 0}} \phi_\sigma(k + \mathbf{1}),$$

$$\Phi(g) = \max_\sigma \Phi_\sigma(g).$$

Soit

$$\Omega_f = \frac{\Omega^{n+1}}{\mathrm{d}f \wedge \Omega^n},$$

Ω^k est l'espace des k-formes différentiables à coefficients dans $\mathbb{C}\{x_1, \cdots, x_{n+1}\}$ si f est un germe ou dans $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_{n+1}]$ si f est un polynôme.

On définit pour $r \in \mathbb{Q}$:

$$\mathcal{N}_{<\alpha}\Omega^{n+1} = \{g\mathrm{d}x : \Phi(g) < \alpha\},$$

et

$$\mathcal{N}_{\alpha}\Omega^{n+1} = \{g\mathrm{d}x : \Phi(g) \leq \alpha\}.$$

La filtration $\mathcal{N}_\alpha$ définit une filtration croissante sur Ω_f et un spectre par :

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{N}}(f, P) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} \dim_{\mathbb{Q}} \left(\mathrm{gr}_\alpha^{\mathcal{N}} \Omega_f\right)(\alpha - 1)$$

où

$$\mathrm{gr}_\alpha^{\mathcal{N}} \Omega_f = \frac{\mathcal{N}_\alpha \Omega_f^{n+1}}{\mathcal{N}_{<\alpha}\Omega_f^{n+1}}$$

et P est égal à 0 ou ∞ suivant que l'on considère un germe ou un polynôme.

Théorème 2.5.2 ([AGV], [Do1], [Do2], [C1]) *Si f est non dégénéré par rapport à son polygone de Newton et commode alors* $\mathrm{Sp}(f, P) = \mathrm{Sp}_{\mathcal{N}}(f, P)$.

2.5.3 Une expression explicite du spectre

Dans le cas de la dimension 2, on sait très bien calculer le spectre d'un germe ou d'une application polynomiale en utilisant les résultats de Schrauwen, Steenbrink et Stevens [SSS], le théorème 2.3.5 ou plus explicitement les articles de Douai [Do2] et Cassou-Noguès [C1].

Soit f une singularité de courbe ou une fonction polynomiale à deux variables non dégénérée et commode par rapport au polygone de Newton. On considère son spectre $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}^1_+(f,\infty)$ si f est un polynôme et $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}^1(f,0)$ si f est une singularité de courbe plane.

Soient $X_0 = (m_0, n_0)$, $X_1 = (m_1, n_1), \cdots$, $X_r = (m_r, n_r)$ les points du polygone de Newton de f, ordonnés tels que $m_i n_{i-1} - m_i n_{i-1} > 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$. On suppose que ce polygone est commode (i.e. $m_0 = 0$, $n_r = 0$). Il est très utile de definir deux nouveaux points $X_{-1} = X_{r+1} = (1,1)$.

Soit :
- σ_i la i-ième face donnée par X_{i-1} et X_i,
- P_{σ_i} le parallélogramme ouvert engendré par X_{i-1} et X_i,
- L_i le segment ouvert entre 0 et $2X_i$,
- ϕ_i la forme linéaire qui prend la valeur 1 sur σ_i.

Proposition 2.5.3 *On a*

$$Sp(f) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{(m,n)\in P_{\sigma_i}\cap\mathbb{N}^2} (1 - \phi_i(m,n)) + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{(m,n)\in L_i\cap\mathbb{N}^2} (1 - \phi_i(m,n)).$$

En dimension quelconque et pour les germes on a aussi une expression explicite du spectre en fonction du polygone de Newton mais nettement plus difficile à décrire.

Dans [St1] Steenbrink pose une conjecture qui décrit le spectre. Cette conjecture a été prouvé quelques années après par [Sai2] à l'aide des D-modules et plus tard par Varchenko et Khovanskiĭ [VK] d'une autre façon.

2.6 Spectre d'un parallélogramme

D'après la section précédente, on sait calculer le spectre d'un polynôme (ou d'une singularité isolée) qui est non dégénéré par rapport à son polygone de Newton et commode. Ici, on supposera de plus que le polygone de Newton du polynôme f considéré a une seule face compacte et qui est non dégénéré par rapport au polygone de Newton. Le spectre se calcule alors à partir d'un parallélogramme ce qui nous conduit à définir formellement le spectre d'un parallélogramme (pour un parallélogramme engendré par deux vecteurs à coordonnées entières et positives). On va calculer à nouveau ce spectre mais sous la forme $\chi_f(t)$ ce qui nous permettra de faire des calculs sur le spectre.

2.6.1 Notations et définitions

Soient $X_1 = (m_1, n_1)$, $X_2 = (m_2, n_2)$ deux vecteurs indépendants à coordonnées entières, positives et telles que $m_2 n_1 - m_1 n_2 > 0$. Soit K le cône de $\mathbb{R}^2_+$ engendré par X_1 et X_2

$$K = K_{X_1,X_2} = \{\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 : 0 \leq \lambda_i \text{ pour } i = 1, 2\}$$

et P le parallélogramme de $\mathbb{R}^2_+$ engendré par X_1 et X_2

$$P = P_{X_1,X_2} = \{\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 : 0 \leq \lambda_i < 1 \text{ pour } i = 1, 2\}.$$

Alors, on a

$$\sum_{(m,n)\in K\cap\mathbb{Z}^2} x^m y^n = \left(\sum_{(m,n)\in P\cap\mathbb{Z}^2} x^m y^n \right) \frac{1}{1 - x^{m_1} y^{n_1}} \frac{1}{1 - x^{m_2} y^{n_2}}$$

et si X_1, X_2 est une base de $(\mathbb{Z}X_1 + \mathbb{Z}X_2)$ alors

$$\sum_{(m,n)\in K\cap\mathbb{Z}^d} x^m y^n = \frac{1}{1 - x^{m_1} y^{n_1}} \frac{1}{1 - x^{m_2} y^{n_2}}.$$

Si $A \subset \mathbb{R}^2_+$, on note

$$f_A(x, y) = \sum_{(m,n)\in A\cap\mathbb{Z}^2} x^m y^n$$

la fonction génératrice de A.

Pour simplifier les notations, on pose

$$\begin{cases} f_{X_1,X_2} = f_{K_{X_1,X_2}} \\ g_{X_1,X_2} = f_{P_{X_1,X_2}}. \end{cases}$$

Si on se donne P_{X_1,X_2}, on pose ϕ_{X_1,X_2} la forme linéaire qui vaut 1 sur la face de P_{X_1,X_2} (ensemble des points de la forme $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ pour $\lambda_i > 0$, $i = 1,\ 2$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$).

Le spectre du parallélogramme est défini par

$$\chi_{(P_{X_1,X_2})}(t) = f_{X_1,X_2}(t^{\frac{n_1 - n_2}{m_2 n_1 - m_1 n_2}}, t^{\frac{m_2 - m_1}{m_2 n_1 - m_1 n_2}}).$$

On pose

$$\mu = \mu(X_1, X_2) = \mu(P_{X_1,X_2}) = \chi_{(P_{X_1,X_2})}(1).$$

En écrivant

$$\chi_{(P_{X_1,X_2})}(t) = t^{\alpha_1+1} + \cdots + t^{\alpha_\mu+1},$$

alors on a

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_\mu = 0$$

et on pose

$$S(X_1, X_2) = S(P_{X_1,X_2}) = \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_i^2.$$

Remarque 2.6.1 Le lien entre le spectre de la section 2.5.3 et le spectre d'un parallélogramme est donné par

$$\chi_f(t) = \sum_{i=1}^{r} \chi_{P_{X_{i-1},X_i}}(t) + \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{k=0}^{d_i-1} t^{\frac{k}{d_i}}(t-1) - \sum_{k=0}^{n_0-1} t^{\frac{k}{n_0}} - \sum_{k=0}^{m_r-1} t^{\frac{k}{m_r}} + 1,$$

où $d_i = \text{pgcd}(m_i, n_i)$.

2.6.2 Fonction génératrice d'un cône et d'un parallélogramme

Soient p et q deux nombres premiers entre eux. On considère la fraction continue de $\frac{p}{q}$, construite à partir des entiers positifs $a_1, \cdots, a_r$,

$$\frac{p}{q} = \frac{p(a_1, \cdots, a_r)}{q(a_1, \cdots, a_r)},$$

$p(a_1, \cdots, a_i) = a_1 p(a_2, \cdots, a_i) + q(a_2, \cdots, a_i)$, $\quad q(a_1, \cdots, a_i) = p(a_2, \cdots, a_i)$ avec $1 \leq i \leq r$.

Pour simplifier, on note $p_i = p_{1,\cdots,i} = p(a_1, \cdots, a_i)$ et $q_i = q_{1,\cdots,i} = q(a_1, \cdots, a_i)$, pour $1 \leq i \leq r$ et $p_0 = 1$, $q_0 = 0$.

Proposition 2.6.2 *On a*

$$f_{(p_{2r-1},q_{2r-1}),(1,0)}(x,y) = \sum_{i=0}^{2r-2} (-1)^i \frac{1}{1 - x^{p_i}y^{q_i}} \frac{1}{1 - x^{p_{i+1}}y^{q_{i+1}}}$$

et

$$f_{(0,1),(q_{2r},p_{2r})}(x,y) = \sum_{i=0}^{2r-1} (-1)^i \frac{1}{1 - x^{q_i}y^{p_i}} \frac{1}{1 - x^{q_{i+1}}y^{p_{i+1}}} + \frac{1}{1 - x^{q_{2r}}y^{p_{2r}}}$$

Preuve. On pose

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\sigma_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère les égalités suivantes

$$\begin{array}{rcl} K_{(a_1,1),(1,0)} & = & \sigma_1(K_{(0,1),(1,0)}), \\ K_{(0,1),(a_2,a_1a_2+1)} & = & \sigma_1'(K_{(0,1),(a_2,1)}), \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{(p_{2r-1},q_{2r-1}),(1,0)} & = & \sigma_1(K_{(q_{2,\cdots,2r-1},p_{2,\cdots,2r-1}),(1,0)}), \\ K_{(0,1),(q_{2r},p_{2r})} & = & \sigma_1'(K_{(0,1),(p_{2,\cdots,2r},q_{2,\cdots,2r})}). \end{array}$$

On écrit les fonctions génératrices correspondantes avec $f_0(x,y) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-y}$

$$f_{(0,1),(m,n)}(x,y) = f_0(x,y) - f_{(m,n),(1,0)}(x,y) + \frac{1}{1-x^m y^n},$$

$$f_{(m,n),(1,0)}(x,y) = f_0(x,y) - f_{(0,1),(m,n)}(x,y) + \frac{1}{1-x^m y^n},$$

et

$$f_{\sigma(m_1,n_1),\sigma(m_2,n_2)}(x,y) = f_{(m_1,n_1),(m_2,n_2)}(x^a y^c, x^b y^d),$$

où

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{rcl} f_{(a_1,1),(1,0)}(x,y) & = & f_0(x, x^{a_1} y), \\ f_{(0,1),(a_2,1)}(x,y) & = & f_0(x,y) - f_0(x, x^{a_2} y) + \frac{1}{1-x^{a_2}y}, \\ f_{(0,1),(a_2,a_1a_2+1)}(x,y) & = & f_{(0,1),(a_2,1)}(xy^{a_1}, y), \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Ainsi par récurrence on peut conclure. □

Remarque 2.6.3 Par symétrie, on a

$$f_{(p_{2r},q_{2r}),(1,0)}(x,y) = \sum_{i=0}^{2r-1} (-1)^i \frac{1}{1-x^{p_i}y^{q_i}} \frac{1}{1-x^{p_{i+1}}y^{q_{i+1}}} + \frac{1}{1-x^{p_{2r}}y^{q_{2r}}}$$

et

$$f_{(0,1),(q_{2r-1},p_{2r-1})}(x,y)=\sum_{i=0}^{2r}(-1)^i\frac{1}{1-x^{q_i}y^{p_i}}\frac{1}{1-x^{q_{i+1}}y^{p_{i+1}}}+\frac{1}{1-x^{q_{2r-1}}y^{p_{2r-1}}}.$$

La fonction génératrice du parallélogramme $(d_1p,d_1q),(m_2,0)$ est égale à

$$g_{(d_1p,d_1q)(m_2,0)}(x,y)=f_{(p,q),(1,0)}(x,y)(1-x^{d_1p}y^{d_1q})(1-x^{m_2}).$$

2.6.3 Calcul du spectre d'un parallélogramme

Dans le cas particulier où le parallélogramme est un rectangle, on a

$$\chi_{(P_{(0,n_1),(m_2,0)})}(t)=\frac{1-t}{1-t^{\frac{1}{n_1}}}\frac{1-t}{1-t^{\frac{1}{m_2}}}.$$

Dans ce paragraphe, on généralise ce résultat à un parallélogramme quelconque.

On commence par le parallélogramme engendré par (d_1p,d_1q) et $(m_2,0)$ où $m_2,\ d_1$ sont des entiers strictement positifs et $p,\ q$ sont des entiers positifs premiers entre eux. Comme dans la section précédente, on considère la fraction continue de $\frac{p}{q}$ qui nous définit une suite finie d'entiers positifs $a_1,\cdots,a_{r'}$. On considère deux cas : r' pair et r' impair.

Soient $c_i=\frac{1}{m_2}p_i+\left(\frac{1}{d_1q_{2r}}-\frac{p_{2r}}{q_{2r}}\frac{1}{m_2}\right)q_i$ et $c'_i=\frac{1}{m_2}p_i+\left(\frac{1}{d_1q_{2r-1}}-\frac{p_{2r-1}}{q_{2r-1}}\frac{1}{m_2}\right)q_i$, alors on a la proposition suivante.

Proposition 2.6.4 *Si c_i est non nul pour tout i alors on a*

$$\begin{aligned}\chi_{(P_{(d_1p_{2r},d_1q_{2r}),(m_2,0)})}(t) &= \sum_{i=0}^{2r-1}(-1)^i\frac{t^{c_i}-t}{1-t^{c_i}}\frac{t^{c_{i+1}}-t}{1-t^{c_{i+1}}}+\frac{1-t}{1-t^{\frac{1}{m}}}-\frac{t-t^2}{1-t^{\frac{1}{d}}}\\ &= \sum_{i=0}^{2r-1}(-1)^i\frac{1-t}{1-t^{c_i}}\frac{1-t}{1-t^{c_{i+1}}}+\frac{(1-t)^2}{1-t^{c_{2r}}}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\chi_{(P_{(d_1p_{2r-1},d_1q_{2r-1}),(m_2,0)})}(t) &= \sum_{i=0}^{2r-2}(-1)^i\frac{t^{c'_i}-t}{1-t^{c'_i}}\frac{t^{c'_{i+1}}-t}{1-t^{c'_{i+1}}}+\frac{1-t}{1-t^{\frac{1}{m}}}+\frac{t^{\frac{1}{d}}-t}{1-t^{\frac{1}{d}}}\\ &= \sum_{i=0}^{2r-2}(-1)^i\frac{1-t}{1-t^{c'_i}}\frac{1-t}{1-t^{c'_{i+1}}}.\end{aligned}$$

Preuve. Soit ϕ l'application linéaire qui vaut 1 sur (d_1p, d_1q) et $(m_2, 0)$,

$$\phi(m,n) = \frac{d_1qm + (m_2 - d_1p)n}{m_2d_1q}.$$

En posant $x = t^{\frac{1}{m_2}}$ et $y = t^{\frac{1}{d_1q} - \frac{p}{q}\frac{1}{m_2}}$, on peut calculer le spectre.

□

Remarque 2.6.5 Par unicité du développement en fraction continue, s'il existe i_0 tel que $c_{i_0} = 0$ alors il est unique. Dans la démonstration précédente il faut faire le calcul suivant :

$$\frac{1}{1-x^{p_{i-1}}y^{q_{i-1}}}\frac{1}{1-x^{p_i}y^{q_i}} - \frac{1}{1-x^{p_i}y^{q_i}}\frac{1}{1-x^{p_{i+1}}y^{q_{i+1}}} =$$
$$= \frac{(1 + x^{p_i}y^{q_i} + (x^{p_i}y^{q_i})^2 + \cdots + (x^{p_i}y^{q_i})^{\alpha_{i+1}-1})x^{p_{i-1}}y^{q_{i-1}}}{(1-x^{p_{i-1}}y^{q_{i-1}})(1-x^{p_{i+1}}y^{q_{i+1}})}$$

puis après changement de variable, on trouve avec $c_i = 0$:

$$\frac{\alpha_{i+1}t^{c_{i-1}}}{(1-t^{c_{i-1}})^2}.$$

Cette remarque nous permet de faire dans la suite des calculs sur le spectre en supposant que tous les c_i sont non nuls.

Remarque 2.6.6 Pour le cas général on peut utiliser la même méthode en remarquant que

$$f_{(m_2,n_2),(m_1,n_1)}(x,y) = f_{(m_2,n_2),(1,0)}(x,y) - f_{(m_1,n_1),(1,0)}(x,y) + \frac{1}{1-x^{\frac{m_1}{d_1}}y^{\frac{n_1}{d_1}}},$$

avec $d_1 = \mathrm{pgcd}(m_1, n_1)$ et

$$f_{(m_2,n_2),(m_1,n_1)}(x,y) = f_{(m_2,n_2),(m_1,n_1)}(x,y)(1-x^{m_1}y^{n_1})(1-x^{m_2}y^{n_2}).$$

Remarque 2.6.7 Les formules précédentes permettent de calculer le spectre d'un germe ou d'une application polynomiale non dégénéré par rapport à son polygone de Newton d'une façon différente que celle déjà rencontrée (voir remarque 2.6.1 et section 3.3.2). On va voir dans le prochain chapitre que cette nouvelle formulation va nous permettre de calculer explicitement la variance du spectre, ce qui n'est pas évident à priori.

2.7 Exemples de spectres

2.7.1 Le polynôme de Briançon

Notons

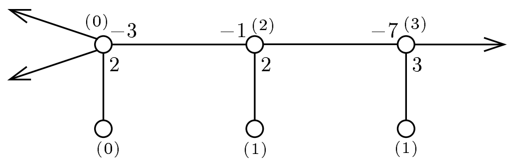
$$s = 1 + xy,\ p = sx - 1,\ g = p^3 + p^4 + p^2 x,\ h = g/x^2.$$

Le polynôme

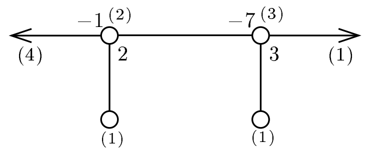
$$f = h + \frac{5}{3}ps - \frac{1}{3}s$$

est appelé le polynôme de Briançon. Nous calculons ici ses paires spectrales associées à la monodromie à l'infini.

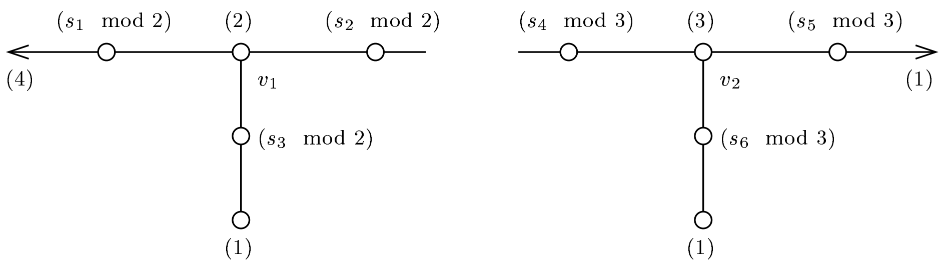
Le diagramme de Eisenbud et Neumann de l'entrelacs à l'infini de la fibre générique du polynôme de Briançon est donné par le diagramme suivant :



Le diagramme de K_0 (voir section 2.3.4) est :



On calcule les multiplicités modulo m_v des sommets voisins à l'aide de la section précédente.



On peut prendre :

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 0, \quad s_1 = -4 \equiv 0 \mod 2,\\
\beta_2 &= 0, \quad s_2 = 3 \equiv 1 \mod 2,\\
\beta_3 &= 1, \quad s_3 = -1 \equiv 1 \mod 2,\\
\beta_4 &= 5, \quad s_4 = 1 \equiv 1 \mod 3,\\
\beta_5 &= 0, \quad s_5 = 1 \equiv 1 \mod 3,\\
\beta_6 &= 2, \quad s_6 = -2 \equiv 1 \mod 3.
\end{aligned}$$

On a alors $a^+_{v_1} = 0$, $a^+_{v_2} = \left(-\frac{1}{3}, 1\right) + \left(\frac{1}{3}, 1\right)$.
On a :

$$Spp_+(f,\infty) = \left(-\frac{1}{3}, 1\right) + \left(\frac{1}{3}, 1\right) + \left(-\frac{1}{2}, 2\right) + (0,1)$$

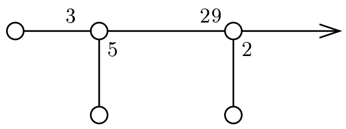
et

$$Sp_+(f,\infty) = \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + (0).$$

Ces résultats ont été obtenus dans [Dim] par une autre méthode.

2.7.2 Le polynôme $(y^5 - x^3)^2 + xy^8$

Soit $f = (y^5 - x^3)^2 + xy^8$. Alors le diagramme de Eisenbud et Neumann de la fibre générique de f est



Le spectre $\mathrm{Sp}^1_+(f,\infty)$ est

$$\begin{aligned}
&(1/30) + (-1/30) + (1/15) + (-1/15) + (2/15) + (-2/15) + (7/30) + (-7/30)\\
&+(8/15) + (-8/15) + (17/30) + (-17/30) + (19/30) + (-19/30) + (11/15) + (-11/15)\\
&+(1/58) + (-1/58) + (3/58) + (-3/58) + (5/58) + (-5/58) + (7/58) + (-7/58)\\
&+(9/58) + (-9/58) + (11/58) + (-11/58) + (13/58) + (-13/58) + (15/58) + (-15/58)\\
&+(17/58) + (-17/58) + (19/58) + (-19/58) + (21/58) + (-21/58) + (23/58) + (-23/58)\\
&+(25/58) + (-25/58) + (27/58) + (-27/58).
\end{aligned}$$

Chapitre 3

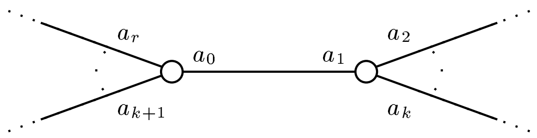
Variance des nombres spectraux et polygones de Newton

3.1 Introduction

En 2000 Hertling et Dimca proposèrent une conjecture tout à fait inattendue sur la variance du spectre associé à une singularité ou à un polynôme (par rapport à la monodromie à l'infini). Nous donnons ici la preuve des deux conjectures en dimension 2 dans le cas non dégénéré par rapport au polygone de Newton et dans le cas irréductible (à l'infini pour le cas d'un polynôme).

Dans le chapitre 2, on a montré (rappelé dans le cas local) qu'on peut calculer le spectre à partir du diagramme de Eisenbud et Neumann associé au germe ou à la fibre générale du polynôme.

A une arête de diagramme de Eisenbud et Neumann qui relie deux sommets de rupture (c'est-à-dire qui a plus de deux arêtes d'incidence), on associe un nombre entier Δ qui est le déterminant de l'arête (voir [EN]) de la façon suivante : à l'arête



on associe l'entier $\Delta = a_0 a_1 - a_2 \cdots a_r$.

Soient f un germe définissant une singularité isolée ou un polynôme et

$$\mathrm{Sp}(f) = (\alpha_1) + \cdots (\alpha_\mu)$$

avec $-1 \leq \alpha_1 \leq \cdots \alpha_\mu \leq n$ le spectre associé.

Notons $V(f)=\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{\mu}\left(\alpha_i-\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_\mu}{\mu}\right)^2$ et $\mathrm{HD}(f)=\mu(12V(f)-(\alpha_\mu-\alpha_1))$. Les conjectures portent sur le signe de $\mathrm{HD}(F)$. Dans [H] Hertling a introduit l'invariant $\gamma=-\frac{HD(f)}{48}$.

Les deux théorèmes importants sont ici les théorèmes 3.2.1 et 3.4.1 qui répondent aux conjectures en donnant une formule exacte de l'invariant $\mathrm{HD}(f)$ pour certaines familles de germes ou de polynômes à deux variables. Dans les deux cas considérés, cet invariant est une combinaison linéaire à coefficients strictement négatifs des déterminants du diagramme de Eisenbud et Neumann associé à f.

Deux questions se posent naturellement : est-ce que ce type d'égalité est vrai pour tout f à deux variables vérifiant les hypothèses des conjectures ? Si oui quelle est la signification des coefficients des déterminants ?

Afin de prouver le théorème 3.2.2, on a besoin de résultats arithmétiques sur la partie de $\mathbb{Z}^2$ définie par

$$\Lambda(a,b)=\left\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2 : i,j>0, \frac{i}{a}+\frac{j}{b}<1\right\}$$

pour $a>1$, $b>1$ et $\mathrm{pgcd}(a,b)=1$. Le lemme 3.2.5 est juste une reformulation de la Proposition 5.2 de Dimca dans [Dim]. Le lemme 3.2.6 est un calcul qui fait intervenir dans la démonstration les sommes de Dedekind et qui généralise le Lemme 5.3 de Saito dans [Sai3].

Dans la démonstration du théorème 3.4.2 on a besoin de faire un calcul sur un parallélogramme ouvert. On donne ici deux méthodes de calcul. La première est directe mais demande l'utilisation d'un programme de calcul formel pour ne pas être fastidieuse. Cette démonstration a permis d'énoncer un lemme qui a été utile dans la démonstration du théorème 3.2.2. La deuxième méthode est plus conceptuelle et montre comment sont cachées les sommes de Dedekind dans le spectre (et semble être généralisable en dimension supérieure).

Pour finir ce chapitre on finit par regarder formellement ce que devient la conjecture de Hertling pour un parallélogramme. On donne un théorème de majoration pour les sommes de Dedekind et on l'applique pour montrer que l'invariant HD est positif pour un parallélogramme. Ce dernier résultat est pour l'instant purement formel et non associé à un polynôme. Pour éviter cela il faudrait par exemple étudier le spectre associé à une singularité non isolée.

Pour décrire les germes et les polynômes vérifiant les hypothèses des théorèmes 0.0.3 et 0.0.4 qui ont un invariant HD nul, on a besoin d'introduire les notions suivantes.

Soit $f:\mathbb{C}^{n+1}\to\mathbb{C}$ un polynôme quasi-homogène de poids $w=(w_1,\cdots,w_n)$ et de degré $d=d_w(f)$ qui définit une singularité isolée.

Définition 3.1.1 – *Une déformation positive de f est un polynôme de la forme*

$$f(x)+\sum_{\substack{a\in\mathbb{N}^{n+1}\\ d_w(x^a)>d}} c_a x^a.$$

– *Une déformation négative de f est un polynôme de la forme*

$$f(x) + \sum_{\substack{a\in\mathbb{N}^{n+1} \\ d_w(x^a)<d}} c_a x^a.$$

3.2 Conjecture de Hertling-Dimca dans le cas irréductible

Ici, on reprend les notations de la section 2.4 et on pose de plus
$\mu = \mu(n_1, w_1; \cdots ; n_g, w_g) = \mathrm{card}(\mathrm{Sp}(\Gamma(n_1, w_1; \cdots ; n_g, w_g)))$,
$\alpha = \alpha(n_1, w_1; \cdots ; n_g, w_g) = \max(\mathrm{Sp}(\Gamma(n_1, w_1; \cdots ; n_g, w_g)))$,
$S = S(n_1, w_1; \cdots ; n_g, w_g)$ la somme des carrés des valeurs spectrales
et

$$E_k(n_1, w_1; \cdots ; n_g, w_g) = \frac{(n'_{k-1} - 1)\left(n'_k w_{k-1} w_k \left(\frac{n'_0}{n'_{k-1}} w_1 - n_1 - w_1\right) + \frac{n'_0}{n'_{k-2}} w_1\right)}{n'_0 w_1 w_{k-1} w_k}.$$

Remarque 3.2.1 *On a* $\mu = \sum_{k=1}^{g} (n_k - 1)(w_k - 1)n'_k$ *et* $\alpha = 1 - \frac{w_1+n_1}{n'_0 w_1}$.

Théorème 3.2.2 *On a*

$$6S - \mu\alpha = -\sum_{k=2}^{g} E_k \Delta_k.$$

De cette formule, avec $E_k > 0$, pour $2 \leq k \leq g$, on en déduit immédiatement le corollaire suivant comme une conséquence du changement de signe des quantités Δ_k.

Corollaire 3.2.3 *Si f est un germe analytique de courbe irréductible ou un polynôme irréductible à l'infini et à deux variables alors la conjecture de Hertling-Dimca est vraie pour f. De plus, on a égalité si et seulement si f est une déformation positive ou négative d'un polynôme quasi-homogène définissant une singularité isolée.*

Avant de commencer, on a besoin de quelques résultats d'arithmétique.
Pour $a > 1$, $b > 1$, $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$, on pose

$$\Lambda(a, b) = \left\{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : i, j > 0, \frac{i}{a} + \frac{j}{b} < 1\right\}.$$

Lemme 3.2.4 $\mathrm{card}(\Lambda(a, b)) = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$.

Preuve. C'est un cas très particulier du théorème de Pick, (voir [F]). $\square$

Lemme 3.2.5

$$12 \sum_{(i,j)\in\Lambda(a,b)} \left(1-\frac{i}{a}-\frac{j}{b}\right)^2 = (a-1)(b-1)\left(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

Preuve. C'est un cas particulier de la proposition 5.2 de [Dim]. $\square$

Lemme 3.2.6

$$12 \sum_{(i,j)\in\Lambda(a,b)} \left(1-\frac{i}{a}-\frac{j}{b}\right) = (a-1)(b-1)\left(2-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{ab}\right).$$

Preuve.

Pour $p,q \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{pgcd}(p,q)=1$, on définit la somme de Dedekind

$$s(p,q) = \sum_{k=1}^{q-1} \left(\left(\frac{k}{q}\right)\right)\left(\left(\frac{pk}{q}\right)\right)$$

où

$$((x)) = \begin{cases} x-[x]-\frac{1}{2}, & \text{si } x \notin \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

et x est un réel. Les sommes de Dedekind vérifient la loi de réciprocité suivante

$$s(p,q)+s(q,p) = -\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}+\frac{1}{pq}\right),$$

voir J. E. Pommersheim [P] et les références qui y sont données.

Le lemme 3.3.2 nous donne les égalités :

$$\sum_{(i,j)\in\Lambda(a,b)} i = \frac{-b}{6}(a-1)(2a-1)+(b-1/2)\frac{a(a-1)}{2}+as(b,a)$$

et

$$\sum_{(i,j)\in\Lambda(a,b)} j = \frac{-a}{6}(b-1)(2b-1)+(a-1/2)\frac{b(b-1)}{2}+bs(a,b).$$

Il reste à utiliser la loi de réciprocité de sommes de Dedekind pour trouver le résultat. $\square$

On en déduit

Lemme 3.2.7

$$12\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{(i,j)\in\Lambda(a,b)}\left(1-\frac{i}{a}-\frac{j}{b}+k\right)^2=(a-1)(b-1)\left(2c-1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{ab}+\frac{1}{abc}\right).$$

Preuve. Il suffit d'appliquer directement les lemmes précédents. □

Lemme 3.2.8

$$\mu(n_1,w_1;\cdots;n_g,w_g)=(n_1'w_1-1)(n_0'-1)+\sum_{k=2}^{g}(n_{k-1}'-1)n_k'\Delta_k.$$

Preuve. Par une récurrence sur g. □

Preuve du théorème. On procède par récurrence sur g sachant que le résutat à déjà été démontré dans le cas $g=1$, il reste à passer du cas g au cas $g+1$.

Pour $1\leq k\leq g+1$, on pose

$$S_k(n_1,w_1;\cdots;n_{g+1},w_{g+1})=$$
$$2\sum_{r=0}^{n_{k+1}\cdots n_{g+1}-1}\sum_{(i,j)\in\Lambda(n_k,w_k)}\left(\frac{1}{n_{k+1}\cdots n_{g+1}}\left(1-\frac{i}{n_k}-\frac{j}{w_k}+r\right)\right)^2.$$

On a

$$S(n_1,w_1;\cdots;n_{g+1},w_{g+1})=\sum_{k=1}^{g+1}S_k(n_1,w_1;\cdots;n_{g+1},w_{g+1})$$

et

$$S_k(n_1,w_1;\cdots;n_{g+1},w_{g+1})=S_{k-1}(n_2,w_2;\cdots;n_{g+1},w_{g+1})\text{ pour }2\leq k\leq g+1.$$

Par hypothèse de récurrence,

$$6S(n_1,w_1;\cdots;n_{g+1},w_{g+1})=$$
$$-\sum_{k=3}^{g+1}E_{k-1}(n_2,w_2;\cdots;n_{g+1},w_{g+1})\Delta_k-E_2'(n_1,w_1;\cdots;n_{g+1},w_{g+1})$$
$$+\mu(n_1,w_1;\cdots;n_{g+1},w_{g+1})\alpha(n_1,w_1;\cdots;n_{g+1},w_{g+1}).$$

avec

$$\begin{aligned}
&E_2'(n_1, w_1; \cdots; n_{g+1}, w_{g+1}) = \\
&\quad +\mu(n_1, w_1; \cdots; n_{g+1}, w_{g+1})\alpha(n_1, w_1; \cdots; n_{g+1}, w_{g+1}) \\
&\quad -\mu(n_2, w_2; \cdots; n_{g+1}, w_{g+1})\alpha(n_2, w_2; \cdots; n_{g+1}, w_{g+1}) \\
&\quad -6S_1(n_1, w_1; \cdots; n_{g+1}, w_{g+1}).
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
&E_2'(n_1, w_1; \cdots; n_{g+1}, w_{g+1}) = \\
&\quad \left((n_1-1)(w_1-1)n_1' + \cdots + (n_{g+1}-1)(w_{g+1}-1)n_{g+1}'\right)\left(1 - \frac{w_1+n_1}{n_0'w_1}\right) \\
&\quad - \left((n_2-1)(w_2-1)n_2' + \cdots + (n_{g+1}-1)(w_{g+1}-1)n_{g+1}'\right)\left(1 - \frac{w_2+n_2}{n_1'w_2}\right) \\
&\quad -(n_1-1)(w_1-1)\left(2n_1' - 1 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{w_1} - \frac{1}{n_1w_1} + \frac{1}{n_0'w_1}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&E_2'(n_1, w_1; \cdots; n_{g+1}, w_{g+1}) = \\
&\quad (n_1-1)(w_1-1)\left(n_1' - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{w_1}\right) \\
&\quad - \left(\sum_{k=2}^{g+1}(n_k-1)(w_k-1)n_k'\right)\left(\frac{w_1w_2 + n_1w_2 - n_1w_1w_2 - n_1n_2w_1}{n_0'w_1w_2}\right) \\
&\quad -(n_1-1)(w_1-1)\left(2n_1' - 1 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{w_1} - \frac{1}{n_1w_1} + \frac{1}{n_0'w_1}\right).
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 3.2.8 et en simplifiant, on a :

$$\begin{aligned}
&E_2'(n_1, w_1; \cdots; n_{g+1}, w_{g+1}) = \\
&\qquad - \left((n_2'w_2-1)(n_1'-1) + \textstyle\sum_{k=3}^{g+1}(n_{k-1}'-1)n_k'\Delta_k\right)\left(\tfrac{w_1w_2+n_1w_2-n_1w_1w_2-n_1n_2w_1}{n_0'w_1w_2}\right) \\
&\qquad -(n_1-1)(w_1-1)\left(n_1' - 1 - \tfrac{1}{n_1w_1} + \tfrac{1}{n_0'w_1}\right).
\end{aligned}$$

D'où finalement

$$E_2'(n_1, w_1; \cdots; n_{g+1}, w_{g+1}) = \sum_{k=2}^{g+1} E_k''(n_1, w_1; \cdots; n_{g+1}, w_{g+1})$$

avec

$E''_2(n_1, w_1; \cdots; n_{g+1}, w_{g+1}) =$

$$-(n'_1 - 1)\left[(n'_2 w_2 - 1)\tfrac{w_1w_2+n_1w_2-n_1w_1w_2-n_1n_2w_1}{n'_0w_1w_2} + (n_1 - 1)(w_1 - 1)(1 - \tfrac{1}{n'_0 w_1})\right]$$

et

$$E''_k(n_1, w_1; \cdots; n_{g+1}, w_{g+1}) = -(n'_{k-1} - 1)n'_k \Delta_k \frac{w_1w_2 + n_1w_2 - n_1w_1w_2 - n_1n_2w_1}{n'_0 w_1 w_2}$$

pour $3 \leq k \leq g + 1$.

Il suffit de remarquer que

$$E''_2(n_1, w_1; \cdots; n_{g+1}, w_{g+1}) = E_2(n_1, w_1; \cdots; n_{g+1}, w_{g+1})\Delta_2$$

et

$$E''_k(n_1, w_1; \cdots; n_{g+1}, w_{g+1}) + E_{k-1}(n_2, w_2, \cdots, n_{g+1}, w_{g+1})\Delta_k =$$

$$E_k(n_1, w_1, \cdots, n_{g+1}, w_{g+1})\Delta_k,$$

pour $3 \leq k \leq g + 1$.

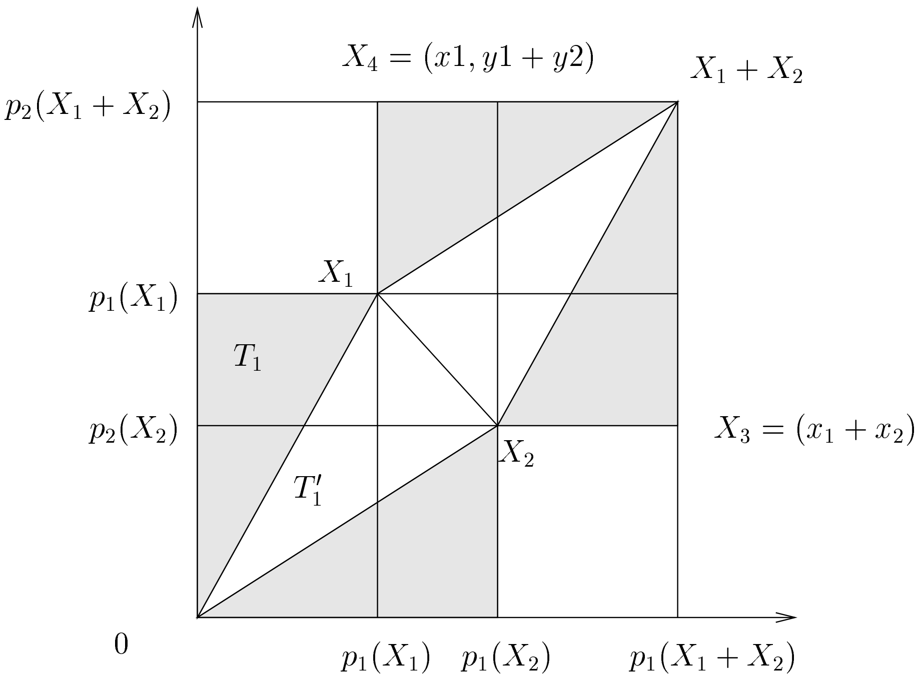
$\square$

Preuve du corollaire. La première affirmation est claire. Pour avoir l'égalité la formule du théorème nous dit que g doit-être égal à 1, c'est-à-dire qu'il y a une seule paire caractéristique associée à f. L'algorithme de Newton Puiseux appliqué à f n'aura qu'un seule étape et en l'écrivant, on remarque que l'on a une déformation positive. $\square$

3.3 Variance d'un parallélogramme

3.3.1 Calcul direct

On construit la figure suivante pour calculer la somme S_0 des nombres spectraux sur parallélogramme ouvert général donné par $X_1 = (m_1, n_1)$, $X_2 = (m_2, n_2)$, avec $0 \leq m_1 < m_2$, $0 \leq n_2 < n_1$.



Plus précisemment, on définit

- $P(X_1, X_2)$ le parallélogramme ouvert engendré par X_1 et X_2,
- $a = \frac{n_1 - n_2}{m_2 n_1 - m_1 n_2}$, $b = \frac{m_2 - m_1}{m_2 n_1 - m_1 n_2}$
- $\phi(m, n) = am + bn$,
- $S_0 = \sum_{(m,n) \in P(X_1,X_2) \cap \mathbb{N}^2} (1 - \phi(m, n))^2$,

et les sommes suivantes

- $S_1 = \sum_{X \in R_1 \cap \mathbb{N}^2} (1 - \phi(X))^2$, où $R_1 =]0, m_1 + m_2[\times]0, n_1 + n_2[$,
- $S_2 = \sum_{X \in R_2 \cap \mathbb{N}^2} (1 - \phi(X))^2$, où $R_2 =]m_2, m_1 + m_2[\times]0, n_2[$,
- $S_3 = \sum_{X \in R_3 \cap \mathbb{N}^2} (1 - \phi(X))^2$, où $R_3 =]0, m_1[\times]0, n_1[$,
- $S_4 = \sum_{X \in R_4 \cap \mathbb{N}^2} (1 - \phi(X))^2$, où $R_4 =]0, X_1[$,
- $S_4' = \sum_{X \in R_5 \cap \mathbb{N}^2} (1 - \phi(X))^2$, où $R_5 =]0, X_2[$,
- $S_5 = \sum_{X \in T_1' \cap \mathbb{N}^2} m$, où T_1' est le triangle ouvert $(0, p_1(X_1), X_1)$,
- $S_6 = \sum_{X \in T_1' \cap \mathbb{N}^2} n$,
- $S_7 = \sum_{X \in T_1 \cap \mathbb{N}^2} 1$, où T_1 est le triangle ouvert $(0, X_1, p_2(X_1))$,
- $S_8 = \sum_{X \in T_1 \cap \mathbb{N}^2} (1 - \phi(X))^2$,
- $S_8' = \sum_{X \in T_1' \cap \mathbb{N}^2} (1 - \phi(X))^2$,
- $S_9 = \sum_{X \in R_6 \cap \mathbb{N}^2} (1 - \phi(X))^2$, où $R_6 = \{m_2\} \times]0, n_2[$,
- $S_{10} = \sum_{X \in R_7 \cap \mathbb{N}^2} (1 - \phi(X))^2$, où $R_7 =]m_2, m_1 + m_2[\times \{m_2\}$.

Alors on a les égalités suivantes

$$S_3 = S_8 + S_8' + S_4,$$

$$S_8 = \sum_{X \in T_1 \cap \mathbb{N}^2} \phi(X_1 - X)^2 = \sum_{X \in T_1' \cap \mathbb{N}^2} \phi(X)^2,$$

$$S_3 = 2 \sum_{X \in T_1' \cap \mathbb{N}^2} \phi(X)^2 - 2 \sum_{X \in T_1' \cap \mathbb{N}^2} \phi(X) + \sum_{X \in T_1' \cap \mathbb{N}^2} 1 + S_4,$$

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{1}{2}(S_3 + 2 \sum_{X \in T_1' \cap \mathbb{N}^2} \phi(X) - \sum_{X \in T_1' \cap \mathbb{N}^2} 1 - S_4), \\ &= \frac{1}{2}(S_3 + 2aS_5 + 2bS_6 - S_7 - S_4). \end{aligned}$$

Cela nous donne un résultat intermédiaire pour S_0 :
si $m_1 \neq 0$ et $n_2 \neq 0$ alors

$$S_0 = S_1 - 2(S_2 + S_8 + S_8' + S_4 + S_4' + S_9 + S_{10}),$$

si $m_1 = 0$ et $n_2 \neq 0$ alors

$$S_0 = S_1 - 2(S_8' + S_4'),$$

si $m_1 \neq 0$ et $n_2 = 0$ alors

$$S_0 = S_1 - 2(S_8 + S_4),$$

si m_1 et $n_2 = 0$ alors

$$S_0 = S_1.$$

Pour simplifier les notations, on introduit $S(d,n) = \sum_{k=1}^{n} k^d$, pour n et d des entiers plus grands que 1.

Lemme 3.3.1 *On a*

$$S_7 = \sum_{X \in T_1'} 1 = \# T_1' = \frac{1}{2} m_1 n_1 - \frac{1}{2}(m_1 + n_1 + d_1) + 1.$$

Preuve. C'est une conséquence du théorème de Pick voir [F], p 113. □

Lemme 3.3.2 *On a*

$$S_5 = \sum_{(m,n)\in T_1'} m = \frac{n_1}{m_1}S(2,m_1-1) - \frac{1}{2}S(1,m_1-1) - \frac{1}{2}\frac{m_1}{d_1}S(1,d_1-1) - m_1 s_1'$$

et

$$S_6 = \sum_{(m,n)\in T_1'} n = -\frac{m_1}{n_1}S(2,n_1-1) + (m_1-\frac{1}{2})S(1,n_1-1) - \frac{1}{2}\frac{n_1}{d_1}S(1,d_1-1) + n_1 s_1$$

où $s_1 = s\left(\frac{m_1}{d_1}, \frac{n_1}{d_1}\right)$ *et* $s_1' = s\left(\frac{n_1}{d_1}, \frac{m_1}{d_1}\right)$.

Preuve.

$$\begin{aligned}
\sum_{(m,n)\in T'1} m &= \sum_{m=1}^{m_1-1}\sum_{n=1}^{\left[\frac{n_1}{m_1}m\right]} m - \sum_{k=1}^{d_1-1}\frac{m_1}{d_1}k \\
&= \sum_{m=1}^{m_1-1}\left[\frac{n_1}{m_1}m\right]m - \frac{m_1}{d_1}S(1,d_1-1) \\
&= \sum_{m=1}^{m_1-1}\left(\frac{n_1}{m_1}m - \left(\left(\frac{n_1}{m_1}m\right)\right) - \frac{1}{2}\right)m - \sum_{k=1}^{d_1-1}\left(\frac{n_1}{m_1}\frac{m_1}{d_1}k - ((0)) - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{m_1}{d_1}k\right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{d_1-1}\left[\frac{n_1}{m_1}\frac{m_1}{d_1}k\right]\frac{m_1}{d_1}k - \frac{m_1}{d_1}S(1,d_1-1) \\
&= \frac{n_1}{m_1}S(2,m_1-1) - \sum_{m=1}^{m_1-1} m\left(\left(\frac{n_1}{m_1}m\right)\right) - \frac{1}{2}S(1,m_1-1) - \frac{1}{2}S(1,d_1-1).
\end{aligned}$$

Avec l'égalité

$$\sum_{m=1}^{m_1-1} m\left(\left(\frac{n_1}{m_1}m\right)\right) = m_1 s\left(\frac{n_1}{d_1}, \frac{m_1}{d_1}\right),$$

on obtient le résultat. Pour S_6 c'est le même type de calculs. □

Après un calcul (avec un programme de calcul formel comme Maple), on trouve la somme sur un parallélogramme général.

Proposition 3.3.3 *Soient* $d_1 = \mathrm{pgcd}(m_1,n_1)$, $d_2 = \mathrm{pgcd}(m_2,n_2)$, $A_{2,1} = m_2n_1 - m_1n_2$, $s_1 = s\left(\frac{m_1}{d_1}, \frac{n_1}{d_1}\right)$ *et* $s_2 = s\left(\frac{m_2}{d_2}, \frac{n_2}{d_2}\right)$.

1. *Si $m_1 \neq 0$ et $n_2 \neq 0$ alors*

$$6S_0 = \frac{1}{A_{2,1}}\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)(d_1^2 - n_1) + \frac{1}{A_{2,1}}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)(d_2^2 - n_2) + \left(1 - \frac{1}{n_1 n_2}\right)A_{2,1}$$
$$+12(s_2 - s_1) - \frac{(2d_1 - 1)(d_1 - 1)}{d_1} - \frac{(2d_2 - 1)(d_2 - 1)}{d_2},$$

2. *si $m_1 = 0$ et $n_2 \neq 0$, alors*

$$6S_0 = (d_2^2 - n_2)\left(\frac{1}{A_{2,1}} - \frac{1}{m_2 n_2}\right) + \frac{n_2}{m_2 n_1} + \frac{n_1}{m_2} - 2n_1 - \frac{1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2} - \frac{n_2}{m_2}$$
$$+m_2 n_1 - \frac{1}{m_2} + 12s_2 - \frac{(2d_2 - 1)(d_2 - 1)}{d_2} + 3,$$

3. *si $m_1 \neq 0$ et $n_2 = 0$, alors*

$$6S_0 = (d_1^2 - n_1)\frac{1}{m_2 n_1} + \frac{m_2}{n_1} - 2m_2 - 12s_1 + m_2 n_1 - \frac{(2d_1 - 1)(d_1 - 1)}{d_1},$$

4. *si $m_1 = 0$ et $n_2 = 0$ alors*

$$6S_0 = (n_1 - 1)(m_2 - 1)\left(1 - \frac{1}{m_2} - \frac{1}{n_1}\right).$$

3.3.2 Calcul à partir du chapitre précédent

Le but de cette section est de donner un preuve plus élégante de la proposition 3.3.3.

Suivant Dimca et Saito [Dim], proposition 5.2, on définit l'ensemble A des germes holomorphes au voisinage de 1 et

$$\begin{array}{rccl} \psi : & A & \to & \mathbb{C} \\ & h & \mapsto & 12a_2 + 6a_1, \end{array}$$

où

$$\frac{h(1+s)}{(1+s)} = \sum_{k \geq 0} a_k s^k.$$

L'application ψ est une application linéaire. Pour $a \in \mathbb{R}$, t^a définit un élément de A et

$$\psi(t^a) = 6(a-1)^2.$$

De la même façon pour $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$, $\frac{(1-t)^2}{1-t^a}$ et $\frac{1-t}{1-t^a}\frac{1-t}{1-t^b}$, $\frac{t^a-t}{1-t^a}\frac{t^b-t}{1-t^b}$ définissent des éléments de A et

$$\psi\left(\frac{(1-t)^2}{1-t^a}\right) = 6,$$

$$\psi\left(\frac{1-t}{1-t^a}\frac{1-t}{1-t^b}\right) = \frac{1}{ab} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 3$$

et

$$\psi\left(\frac{t^a-t}{1-t^a}\frac{t^b-t}{1-t^b}\right) = (a-1)(b-1)\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Ces résultats nous permettent d'avoir

$$\begin{aligned}
6S(P_{(0,n_1),(m_2,0)}) = \psi & \left(\frac{1-t}{1-t^{\frac{1}{n_1}}}\frac{1-t}{1-t^{\frac{1}{m_2}}}\right) \\
= \ & (n_1-1)(m_2-1)\left(1-\frac{1}{n_1}-\frac{1}{m_2}\right) + \frac{(n_1-1)(2n_1-1)}{n_1} + \frac{(m_2-1)(2m_2-1)}{m_2} + 6 \\
= \ & n_1 m_2 + \frac{n_1}{m_2} + \frac{m_2}{n_1} + 3.
\end{aligned}$$

Lemme 3.3.4 *On a*

$$\mu\left(P_{(d_1p_{2r},d_1q_{2r}),(m_2,0)}\right) = \sum_{i=0}^{2r-1}(-1)^i\frac{1}{c_ic_{i+1}} = m_2dq_{2r}$$

et

$$\mu\left(P_{(dp_{2r-1},dq_{2r-1}),(m_2,0)}\right) = \sum_{i=0}^{2r-2}(-1)^i\frac{1}{c'_ic'_{i+1}} = m_2dq_{2r-1}.$$

Preuve. C'est une conséquence du théorème de Pick et de ce qui précède. □

On peut maintenant prouver, par la proposition suivante, les affirmation 2 et 3 de la proposition 3.3.3.

Proposition 3.3.5 *Soient m_1, n_1, m_2 des entiers strictement positifs $d_1 = \mathrm{pgcd}(m_1,n_1)$ et $s_1 = s\left(\frac{m_1}{d_1},\frac{n_1}{d_1}\right)$, alors on a*

$$6S\left(P_{(m_1,n_1),(m_2,0)}\right) = m_2n_1 + \frac{m_2}{n_1} + \frac{d_1^2}{m_2n_1} + 3 - 12s_1.$$

Preuve. On reprend les notations de la section 2.6 en posant $m = m_2$, $d = d_1$, $p = \frac{m_1}{d_1}$ et $q = \frac{n_1}{d_1}$. On suppose que tous les c_i sont non nuls sinon on utilise la remarque 2.6.5 pour faire le calcul. Cette remarque nous dit de plus que le calcul suivant sera correct aussi dans le cas où l'un des c_i est nul.

– Pour le cas pair, la somme est égale à

$$6S = \sum_{i=0}^{2r-1} (-1)^i \left(\frac{1}{c_i c_{i+1}} + \frac{c_i}{c_{i+1}} + \frac{c_{i+1}}{c_i} + 3 \right) + 6$$

d'où

$$6S = mdq + \frac{c_1}{c_0} - \frac{c_{2r-1}}{c_{2r}} + \sum_{i=1}^{2r-1} (-1)^i \frac{c_{i-1} - c_{i+1}}{c_i} + 6.$$

On en déduit que

$$6S = mdq + mc_1 - dc_{2r-1} - \sum_{i=2}^{2r} (-1)^i a_i + 6.$$

Or par récurrence avec la formule de réciprocité, on peut montrer que l'on a

$$12s(p_{2r}, q_{2r}) = -3 + \frac{p_{2r}}{q_{2r}} + \frac{q_{2r-1}}{q_{2r}} + \sum_{i=1}^{2r} (-1)^i a_i.$$

Donc

$$6S = mdq + \frac{m}{dq} + \frac{d}{qm} + 3 - 12s(p_{2r}, q_{2r}).$$

– Pour le cas impair la somme est égale à

$$6S = \sum_{i=0}^{2r-2} (-1)^i \left(\frac{c'_i}{c'_{i+1}} + \frac{c'_{i+1}}{c'_i} + \frac{1}{c'_i c'_{i+1}} + 3 \right)$$

d'où

$$6S = \mu(P_{(dp,dq),(m_2,0)}) + \frac{c'_1}{c'_0} + \frac{c'_{2r-2}}{c'_{2r-1}} + \sum_{i=1}^{2r-2} (-1)^i \frac{c'_{i+1} - c'_{i-1}}{c'_i} + 3$$

et de même que précédemment,

$$6S = mdq + mc'_1 + dc'_{2r-2} - \sum_{i=2}^{2r-2} (-1)^i a_i,$$

puis on utilise le fait que

$$12s(p_{2r-1}, q_{2r-1}) = \frac{p_{2r-1}}{q_{2r-1}} + \frac{1}{p_{2r-1}q_{2r-1}} - \frac{p_{2r-2}}{p_{2r-1}} + \sum_{i=1}^{2r-1}(-1)^i a_i.$$

□

La proposition suivante nous permet d'avoir l'affirmation 1 de la proposition 3.3.3.

Proposition 3.3.6 *Soient m_1, n_1, m_2, n_2 des entiers stritement positifs avec $A_{2,1} = m_2n_1 - m_1n_2 > 0$, $s_1 = s\left(\frac{m_1}{d_1}, \frac{n_1}{d_1}\right)$ et $s_2 = s\left(\frac{m_2}{d_2}, \frac{n_2}{d_2}\right)$. Alors on a*

$$6S_{(m_1,n_1),(m_2,n_2)} = \frac{d_1^2}{A_{2,1}}\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) + \frac{d_2^2}{A_{2,1}}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) + \left(1 - \frac{1}{n_1n_2}\right)A_{2,1} + 12(s_2 - s_1) + 6.$$

Preuve. On suppose que le développement en fraction continue a un nombre impair de termes (les autres cas se prouvent de la même façon) et que tous les c_i sont non nuls (voir remarque 2.6.5). Notons $\chi(t) = \chi_{P_{(m_1,n_1),(m_2,n_2)}}(t)$.

On écrit les deux couples (m_1, n_1), (m_2, n_2) sous la forme

$$(d_1p_{2r-1}, d_1q_{2r-1}) \text{ et } (d_2p'_{2r'-1}, d_2q'_{2r'-1})$$

respectivement.

On définit $A = m_2n_1 - m_1n_2$, $a = \frac{n_1-n_2}{A}$, $b = \frac{m_2-m_1}{A}$, $c_i = ap_i + bq_i$ pour $0 \leq i \leq 2r-1$ et $c'_i = ap'_i + bq'_i$ pour $0 \leq i \leq 2r'-1$.

On a

$$\chi(t) = \sum_{i=0}^{2r'-2}(-1)^i\frac{1-t}{1-t^{c'_i}}\frac{1-t}{1-t^{c'_i}} - \sum_{i=0}^{2r-2}(-1)^i\frac{1-t}{1-t^{c_i}}\frac{1-t}{1-t^{c_i}} + \frac{(1-t)^2}{1-t^{\frac{1}{d_1}}}$$

donc

$$\psi(\chi(t)) = \sum_{i=0}^{2r'-2}(-1)^i\left(\frac{1}{c'_ic'_{i+1}} + \frac{c'_i}{c'_{i+1}} + \frac{c'_{i+1}}{c'_i} + 3\right) - \sum_{i=0}^{2r-2}(-1)^i\left(\frac{1}{c_ic_{i+1}} + \frac{c_i}{c_{i+1}} + \frac{c_{i+1}}{c_i} + 3\right) + 6,$$

$$\psi(\chi(t)) = m_1n_2 - m_2n_1 + \frac{c'_1}{c'_0} + \frac{c'_{2r'-2}}{c'_{2r'-1}} + \sum_{i=1}^{2r'-2}(-1)^i\frac{c'_{i+1} - c'_{i-1}}{c'_i} - \frac{c_1}{c_0} - \frac{c_{2r-2}}{c_{2r-1}} - \sum_{i=1}^{2r-2}(-1)^i\frac{c_{i+1} - c_{i-1}}{c_i}.$$

Comme on a $c'_{i+1} = a_{i+1}c'_i + c'_{i-1}$ et $c_{i+1} = a_{i+1}c_i + c_{i-1}$ il ne reste plus qu'à faire apparaître les sommes de Dedekind et à simplifier la somme. □

3.4 Conjecture de Hertling-Dimca dans le cas à singularité isolée, non dégénéré par rapport au polygone de Newton et commode

Ici on reprend les notations de la section 2.5.3 et de la proposition 3.3.3.
On considère
- $S(X_0, \cdots, X_r)$ la somme des carrés des nombres spectraux,
- μ le nombre de Milnor,
- $A_{i,j} = A_{i,j}(X_0, \cdots, X_r) = m_i n_j - m_j n_i$, $-1 \leq i, j \leq r+1$,
- $a_i = \frac{n_{i-1} - n_i}{A_{i,i-1}}$, $0 \leq i \leq r+1$,
- $b_i = \frac{m_i - m_{i-1}}{A_{i,i-1}}$, $0 \leq i \leq r+1$,
- $d_i = \mathrm{pgcd}(m_i, n_i)$, $1 \leq i \leq r$.

Remarque 3.4.1 On a $\mu = A_{0,-1} + A_{1,0} + \cdots + A_{r+1,r} + 1$ comme un cas particulier des résultats de [Kou], $\phi_i(m,n) = a_i m + b_i n$ et $\frac{\alpha_\mu - \alpha_1}{12} = \frac{\alpha_\mu}{6}$ par la symétrie du spectre par rapport à 0.

Soit

$$C_i(X_0, \cdots, X_r) = \frac{1}{A_{i,i-1}(X_0, \cdots, X_r)} + \frac{1}{A_{i+1,i}(X_0, \cdots, X_r)} - \frac{A_{i+1,i-1}(X_0, \cdots, X_r)}{A_{i,i-1}(X_0, \cdots, X_r) A_{i+1,i}(X_0, \cdots, X_r)}.$$

On a

Théorème 3.4.2

$$6S(X_0, \cdots, X_r) = \mu - 1 + \sum_{i=0}^{r} (d_i^2 - n_i) C_i(X_0, \cdots, X_r).$$

Corollaire 3.4.3 *Si f est un germe analytique de courbe irréductible ou un polynôme non dégénéré et commode par rapport au polygone de Newton et à deux variables alors la conjecture de Hertling-Dimca est vraie pour f. De plus, on a égalité si et seulement si f est une déformation positive ou négative d'un polynôme quasi-homogène définissant une singularité isolée.*

Remarque 3.4.4 On a $(m_i - n_i)C_i(X_0, \cdots, X_r) = \phi_i(1,1) - \phi_{i+1}(1,1)$ donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{k=i}^{r} A_{k+1,k}(m_i - n_i)C_i(X_0, \cdots, X_r) = \\
&\quad = \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{k=i}^{r} A_{k+1,k}(\phi_i(1,1) - \phi_{i+1}(1,1)) \\
&\quad = A_{1,0} + \cdots + A_{r+1,r} - \sum_{i=1}^{r} A_{i,i-1}\phi_i(1,1) - A_{r+1,r}\phi_r(1,1) \\
&\quad = \mu - 1 - A_{r+1,r}\phi_r(1,1) \\
&\quad = \mu - 1 + (d_r^2 - n_r)C_r(X_0, \cdots, X_r).
\end{aligned}$$

En introduisant $E_i(X_0, \cdots, X_r) = \sum_{k=i}^{r} A_{k+1,k}(X_0, \cdots, X_r)(m_i - n_i) + d_i^2 - n_i$ on peut écrire la formule dans la proposition 3.4.2 sous la forme

$$6S(X_0, \cdots, X_r) = \sum_{i=0}^{r-1} E_i(X_0, \cdots, X_r)C_i(X_0, \cdots, X_r).$$

Le résultat précédent est intéressant car $C_i(X_0, \cdots, X_r)$ (pour $1 \leq i \leq r-1$) est négatif pour une singularité isolée d'hypersurface et positif pour un polynôme non dégénéré par rapport à son polygone de Newton.

Soit ϕ la fonction definie par ϕ_i dans le secteur entre X_{i-1} et X_i. Rappelons le résultat suivant.

Proposition 3.4.5 (voir [St1], [Sab2], [Sab4], [Do2]) La valeur spectrale maximale est $1 - \phi(1,1)$.

Exemple 3.4.6 Considérons le polygone $X_0 = (0,3)$, $X_1 = (2,2)$, $X_2 = (3,0)$ qui correspond à un polynome non dégénéré par rapport à son polygon de Newton alors $\mu = 7$, $S = \frac{11}{18}$ et $\alpha_\mu = \frac{1}{2}$.

Maintenant, avec les égalités

$$S(X_0, \cdots, X_r) = \sum_{i=0}^{r-1} S_0(X_i, X_{i+1}) + 2\sum_{i=1}^{r-1} S_4(X_i, X_{i+1})$$

et

$$S_4(X_i, X_{i+1}) = \frac{(d_i - 1)(2d_i - 1)}{6d_i}$$

il est maintenant facile de prouver le théorème 3.4.2.

Preuve du corollaire 3.4.2. Choisissons j tel que $n_i \leq m_i$ pour tout i avec $j \leq i \leq r$ et $m_i \leq n_i$ pour tout i avec $1 \leq i \leq j-1$. On a

$$\begin{aligned} 6S(X_0, \cdots, X_r) - \mu(1 - \phi_j(1,1)) = \\ \sum_{i=1}^{j-1} \left(\sum_{k=-1}^{i-1} A_{k+1,k}(n_i - m_i) + d_i^2 - m_i \right) C_i(X_0, \cdots, X_r) \\ + \sum_{i=j}^{r-1} \left(\sum_{k=i}^{r} A_{k+1,k}(m_i - n_i) + d_i^2 - n_i \right) C_i(X_0, \cdots, X_r). \quad (*) \end{aligned}$$

Dans le cas d'une singularité isolée de courbe, on a les inégalités suivantes :

$$0 < m_1 < \cdots < m_r$$

et

$$0 < n_{r-1} < \cdots < n_0.$$

Par récurrence on obtient

$$A_{0,-1} + \cdots + A_{i,i-1} > n_{i-1}(m_i - 1) \text{ pour } i \geq 1,$$

et

$$A_{i+1,i} + \cdots + A_{r+1,r} > m_{i+1}(n_i - 1) \text{ pour } i \geq 1.$$

On voit que

$$\sum_{k=-1}^{i-1} A_{k+1,k}(n_i - m_i) + d_i^2 - m_i > (m_i - 1)(n_{i-1}(n_i - m_i) - 1) + d_i^2 - 1$$

et

$$\sum_{k=i}^{r} A_{k+1,k}(m_i - n_i) + d_i^2 - n_i > (n_i - 1)(m_{i+1}(m_i - n_i) - 1) + d_i^2 - 1.$$

Dans le cas d'un polynome non dégénéré par rapport à son polygone de Newton, on fait la somme des inégalité suivantes

$$A_{l,l-1} + A_{i,l} > A_{i,l-1}$$

(obtenues par convexité). Cela nous donne $\sum_{k=-1}^{i-1} A_{k+1,k} > A_{0,-1} + A_{i,0} = n_0(m_i - 1)$ donc

$$\sum_{k=-1}^{i-1} A_{k+1,k}(n_i - m_i) + d_i^2 - m_i > (m_i - 1)(n_0(n_i - m_i) - 1) + d_i^2 - 1,$$

et enfin par symétrie,

$$\sum_{k=i}^{r} A_{k+1,k}(m_i - n_i) + d_i^2 - n_i > (n_i - 1)(m_r(m_i - n_i) - 1) + d_i^2 - 1.$$

□

Remarque 3.4.7 Si on écrit l'égalité (*) en fonction des données du diagramme de Eisenbud et Neumann associé à la singularité ou le polynôme considéré alors on trouve une formule analogue à celle du théorème 3.2.2 dans le cas non dégénéré et commode par rapport au polygone de Newton.

3.5 Exemples

3.5.1 Le polynôme de Briançon

Pour le polynôme de Briançon, on trouve que $\mathrm{HD}(f) = 25/3$. L'invariant $\mathrm{HD}(f)$ est strictement positif bien que le polynôme de Briançon ne soit pas faiblement modéré. En fait, pour tous les exemples calculés jusqu'à présent on a obtenu $\mathrm{HD}(f) \geq 0$ donc on peut penser que cette inégalité est vraie pour tous les polynômes $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$.

3.5.2 Le polynôme $(y^5 - x^3)^2 + xy^8$

Considérons le polynôme $f(x, y) = (y^5 - x^3)^2 + xy^8$. On trouve directement, grâce au résultat donné dans le chapitre (exemple section 2.7.2) précédent pour les paires spectrales ou par le théorème, que $\mathrm{HD}(f) = 2(6S - \mu\alpha) = 68/145$.

3.5.3 Variance associée au parallélogramme $((m_2, 0), (m_1, n_1))$

Le but ici, est de voir ce que devient la conjecture de Hertling pour le parallélogramme $((m_2, 0), (m_1, n_1))$ avec n_1, m_1, m_2 tous strictement positifs.

Théorème 3.5.1 *Soient p et q deux entiers naturels tels que $0 \leq p < q$ et soit $d = \mathrm{pgcd}(p,q)$. Alors, on a*

$$s\left(\frac{p}{d},\frac{q}{d}\right) \leq \frac{q-1}{12q}\left(q-p-\frac{q-d^2}{q-p}\right) - \frac{(2d-1)(d-1)}{12d},$$

avec égalité si et seulement si $q-p-d = \mathrm{pgcd}(p-1,q-1)-1$.

Preuve. Soient p et q deux entiers naturels, $0 \leq p < q$, $d = \mathrm{pgcd}(p,q)$.
D'après la proposition 3.3.5, on a

$$\begin{aligned} 6S_0((p,q),(1,1)) &= \tfrac{1}{q-p}(1-\tfrac{1}{q})(d^2-q) + (1-\tfrac{1}{q})(q-p) - 12s\left(\tfrac{p}{d},\tfrac{q}{d}\right) - \tfrac{(2d-1)(d-1)}{d}, \\ &= \tfrac{q-1}{q}(q-p-\tfrac{q-d^2}{q-p}) - 12s\left(\tfrac{p}{d},\tfrac{q}{d}\right) - \tfrac{(2d-1)(d-1)}{d}. \end{aligned}$$

Si $d=1$, comme $S_0 \geq 0$, on a l'inégalité recherchée. D'autre part $S_0 = 0$ si et seulement si les seuls points à l'intérieur du parallélogramme sont sur le segment $](p,q),(1,1)[$. Il y en a $\mathrm{pgcd}(p-1,q-1)-1$. Le nombre de points à l'intérieur du parallélogramme étant égal à $q-p-1$ il en découle que $\mathrm{pgcd}(p-1,q-1)-1 \leq q-p-1$ est une égalité si et seulement si $S_0 = 0$.
Le cas d quelconque se déduit du cas $d=1$. □

Proposition 3.5.2 *L'invariant $\mathrm{HD}(P_{(m_2,0),(m_1,n_1)})$ est positif.*

Preuve. On pose $D((m_1,n_1),(m_2,0)) = 6S_0((m_1,n_1),(m_2,0)) - \mu(P_{(m_2,0),(m_1,n_1)})\alpha_\mu$.
On a $\mu(P_{(m_2,0),(m_1,n_1)}) = m_2n_1 - m_2 + d_1$. Il existe deux entiers naturels q_1 et r_1 tels que $m_1 = q_1n_1 + r_1$, avec $0 \leq r_1 < n_1$. Ici, on a $\alpha_\mu = 1 - \phi(q_1+1,1)$, où $\phi(x,y) = \frac{n_1x+(m_2-m_1)y}{m_2n_1}$.
Après calculs, on montre qu'on a

$$\begin{aligned} D((m_1,n_1),(m_2,0)) &= \tfrac{(n_1-1)(n_1-2)}{n_1} - 12s\left(\tfrac{r_1}{d_1},\tfrac{n_1}{d_1}\right) - \tfrac{(r_1-1)(m_2(n_1-1)+1)}{m_2n_1} \\ &\quad +(d_1-1)\tfrac{d_1^2+d_1(n_1-r_1)+m_2n_1(d_1-1)+d_1m_2+d_1}{m_2n_1d_1}. \end{aligned}$$

Le théorème précédent nous permet de déduire que $D((n_1,m_1),(n_2,0))$ est toujours positif. □

Bibliographie

[AC] E. Artal-Bartolo, P. Cassou-Noguès, *Polynôme d'Alexander à l'infini d'un polynôme à deux variables*, Rev. Mat. Complut. **13** (2000), no. 2, 267–285.

[ACD] E. Artal-Bartolo, P. Cassou-Noguès, A. Dimca, *Sur la topologie des polynômes complexes*, Progress in Math. **162**, Birkhäuser 1998, pp. 317–343.

[AGV] V.I. Arnold, S.M. Gusein-Zade and A.N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps*, vol 1,2, Birkhäuser, Boston, 1988.

[ALM] E. Artal-Bartolo, I. Luengo-Velasco, A. Melle-Hernandez, *Milnor number at infinity, topology and Newton boundary of a polynomial function*, Math. Z. **233** (2000), no. 4, 679–696

[BP] A. Barvinok, J. Pommersheim, *An algorithmic theory of lattice points in polyhedra*, New perspectives in algebraic combinatorics, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **38** (1999), 91–147.

[BS] A. Borel, N. Spaltenstein, *Sheaf theoretic intersection cohomology*, Intersection cohomology (Bern, 1983), Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1984, pp. 47–182.

[BT] R. Bott, L.W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Grad. Texts in Maths. **82**, Springer 1982.

[Br] Broughton, S. A., *Milnor numbers and the topology of polynomial hypersurfaces*, Invent. Math., **92** (1988), 217–241.

[C1] P. Cassou-Noguès, *Entrelacs toriques itérés et intégrales associées à une courbe plane*, Sémin. Théor. Nombres Bordx. Sér. II **2** (1990), 273–331.

[CD] P. Cassou-Noguès, A. Dimca, *Topology of complex polynomials via polar curves*, Kodai Math. J., **22**, (1999), 131–139.

[CH] P. Cassou-Noguès, Ha Huy Vui, *Théorèmes de Kuiper-Kuo-Bochnack-Lojasiewicz à l'infini*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse **3**, (1996), 387–406.

[De] P. Deligne, *Le formalisme des cycles évanescents*, dans SGA 7 XIII et XIV, Lect. Notes in Math. vol. **340**, Springer, Berlin, 1973, pp. 82–115 et 116–164.

[De] P. Deligne, *Théorie de Hodge I*, Actes Congrès Intern. Math., vol. **1**, (1970), 425–430 ; *II*, Publ. math. IHES **40**, (1971), 5–57 ; *III*, Publ. math. IHES **44**, (1974), 5–77.

[Dim] A. Dimca, *Monodromy and Hodge theory of regular functions*, New developments in singularity theory (Cambridge, 2000), 257–278.

[Dim1] A. Dimca, *Singularities and topology of hypersurfaces*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[Dim2] A. Dimca, *Une introduction aux faisceaux pervers*, notes d'un cours post DEA à l'université de Bordeaux 1, 1999, Notes rédigées par T. Brélivet. `http://www.math.u-bordeaux.fr/~brelivet/pervers.ps.gz`

[DS1] A. Dimca, M. Saito, *On the cohomology of the general fiber of a polynomial map*, Compositio Math., **85** (1993), 299–309.

[DS2] A. Dimca, M. Saito, *Algebraic Gauss-Manin systems and Brieskorn modules*, Amer. J. Math. **123** (2001), no. 1, 163–184.

[DN] A. Dimca, A. Némethi, *On the monodromy of complex polynomials*, Duke Math. J. **108** (2001), no. 2, 199–209.

[Do1] A. Douai, *Equations aux différences finies, intégrales de fonctions multiformes et polyèdre de Newton*, Compositio mathematica **87** (1993),311–355.

[Do2] A. Douai, *Très bonnes bases du réseau de Brieskorn d'un polynôme modéré*, Bull. Soc. Math. France **127** (1999), 255–287.

[EN] D. Eisenbud, W. Neumann, *Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities*, Annals of Mathematics Studies, 110. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985.

[F] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Annals of Math, Studies **131**, Princeton University Press, 1993.

[H] C. Hertling, *Frobenius manifolds and variance of the spectral numbers*, Proceedings of the Summer Institute on Singularities, Newton Institute, Cambridge 2000, voir aussi Preprint math.CV/0007187.

[Ha] Ha Huy Vui, *On the irregular at infinity algebraic plane curves*, Preprint Institute of Mathematics National Center for Scientific Rechearch of Vietnam.

[Ham] H. Hamm, *On the cohomology of fibres*, Trends in Singularities, eds. A. Libgober and M. Tibăr, Birkhäuser 2002.

[KS] M. Kashiwara, P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Grund der Math. Wiss. **292**, Springer Verlag 1990.

[Kou] A.G. Koushnirenko, *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor*, Invent. Math. **32** (1976), 1–31.

[Lam] K. Lamotke, *The topology of complex projective varieties after S. Lefschetz*, Topology **20** (1981), no. 1, 15–51.

[Lê] Lê Dung Tráng, *Sur les cycles évanouissants des espaces analytiques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B **288** (1979), no. 4, A283–A285.

[LS] A. Libgober, S. Sperber, *On the zeta function of monodromy of a polynomial map*, Compositio Math. **95** (1995), 287–307.

[LW] Lê Dung Tráng, C. Weber, *Polynômes à fibres rationnelles et conjecture jacobienne à 2 variables*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **320** (1995), no. 5, 581–584.

[MW] F. Michel, C. Weber, *On the monodromies of a polynomial map from $\mathbb{C}^2$ to $\mathbb{C}$*, Topology **40** (2001), no. 6, 1217–1240.

[Mil] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1968, Annals of Mathematics Studies, No. **61**.

[N1] W. Neumann, *Complex algebraic plane curves via their link at infinity*, Invent. math. **98**, (1989), 445–489.

[N2] W. Neumann, *Splicing Algebraic links*, Adv. Studies in Pures Math., **8** (1986), 349–361.

[N3] W. Neumann, *Irregular links at infinity of complex affine plane curves*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **50** (1999), no. 199, 301–320.

[NN1] W. D. Neumann, P. Norbury, *Vanishing cycles and monodromy of complex polynomials*, Duke Math. J. **101** (2000), no. 3, 487–497.

[NN2] W. Neumann, P. Norbury, *The Orekov invariant of an affine plane curve*, Preprint math.AG/0110286.

[NR] W. Neumann, L. Rudolph, *Unfolding in Knot Theory*, Math. Ann., **278**, (1987), 409–439 et Corrigendum 282 (1988), 349–351.

[NS] A. Némethi, C. Sabbah, *Semicontinuity of the spectrum at infinity*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **69** (1999), 25–35.

[NZ1] A. Némethi, A. Zaharia, *Milnor fibration at infinity*, Indag. Math. **3** (1992), 323–335.

[NZ2] A. Némethi, A. Zaharia, *On the bifurcation set of a polynomial function an Newton boundary*, R.I.M.S. **26** (1990), 681–689.

[P] J.E. Pommersheim, *Toric varieties, lattice points and Dedekind sums*, Math Ann. **295** (1993), 1–24.

[Sab1] C. Sabbah, *On the comparaison theorem for elementary irregular D-modules*, Nagoya Math. J., Vol. **141** (1996), 107–124.

[Sab2] C. Sabbah, *Hypergeometric periods for a tame polynomial*, preprint 1996.

[Sab3] C. Sabbah, *Monodromy at infinity and Fourier transform*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **33** (1997), no. 4, 643–685.

[Sab4] C. Sabbah, *Hypergeometric periods for a tame polynomial*, C. R. Acad. Sci. Paris, **328** Série I (1999) 603–608.

[Sai2] M. Saito, *Exponents and Newton polyhedra of isolated hypersurface singularities*, Math. Ann. **281** (1988), 411–417.

[Sai3] M. Saito, *Exponents of an irreducible curve singularity*, Preprint math.AG/0009133.

[SS] J. Scherk and J. Steenbrink, *On the mixed Hodge structure on the cohomology of the Milnor fiber*, Math. Ann. **271** (1985), 641–665.

[SSS] R. Schrauwen, J. Steenbrink, J. Stevens, *Spectral pairs and the topology of curve singularities*, Amer. Math. Soc., Proc. Symp. Pures Math., **53** (1991), 305–328.

[ST1] D. Siersma, M. Tibăr, *Singularities at infinity and their vanishing cycles*, Duke Math. J. **80** (1995), 771–783.

[ST2] D. Siersma M. Tibăr, *Vanishing cycles and singularities of meromorphic functions*, preprint 1999.

[St1] J.H.M., Steenbrink, *Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology.* Real and complex singularities, Sympos. Math., Oslo, (1976), 525–563.

[St2] J. Steenbrink, *Applications of Hodge theory to singularities*, Proc. I.C.M. Kyoto (1990), 559–576.

[SZ] J.H.M. Steenbrink, S. Zucker, *Variation of mixed Hodge structure I*, Invent. Math. **80**, (1985), 485–542.

[T] M. Tibăr, *Topology at infinity of polynomial maps and Thom regularity condition*, Compositio Math., **111**, (1998), 89–109.

[V] A. N. Varchenko, *The asymptotics of holomorphic forms determine a mixed Hodge structure*, Sov. Math. Dokl. **22** (1980), 248–252.

[Ve] J.-L. Verdier, *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard*, Invent. Math. **36** (1976), 295–312.

[VK] A. N. Varchenko, A. G. Khovanskiĭ, *Asymptotic behavior of integrals over vanishing cycles and the Newton polyhedron*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **283** (1985), no. 3, 521–525.

Topologie des polynômes, spectre et variance du spectre (résumé) :

La première partie est consacrée à l'étude de la topologie d'un morphisme d'une variété algébrique complexe lisse de dimension quelconque dans une courbe algébrique complexe lisse. On étudie différentes approches des cycles évanescents et cette étude nous conduit à montrer des résultats d'annulation de la cohomologie associée aux fibres du morphisme. Dans la deuxième partie, on introduit la structure de Hodge mixte sur la cohomologie des fibres. Cela permet de définir le spectre et les paires spectrales. Pour une application polynomiale à deux variables, on montre comment on peut dans la pratique calculer le spectre et les paires spectrales. Dans la troisième partie, on répond dans le cas irréductible et non dégénéré par rapport au polygone de Newton à la conjecture qu'ont posée Hertling et Dimca en 2000 lors de la conférence sur les singularités à Cambridge.

Topology of polynomials, spectrum and variance of the spectrum (abstract) :

In the first part, we study the topology of a morphism between a smooth complex algebraic variety and a smooth complex curve. We investigate different approach of vanishing cycles, this bring us to results of the vanishing of the cohomology associated to the morphism fibers. In the second part, we introduce the mixed Hodge structure on the cohomology of the fibers and use this to define the spectrum and the spectral pairs. We show how to compute the spectral pairs of polynomials of two variables. In the third part, we consider the conjecture given by Hertling and Dimca in 2000 at the summer school in Cambridge and give an answer in the local or global situation for the irreducible or the Newton non degenerated cases.

Mots clés : Applications régulières, Cycles évanescents, Connexité, Paires spectrales, Spectre d'une singularité, Polygones de Newton, Sommes de Dedekind.

Laboratoire de Mathématiques Pures de Bordeaux,
Université Bordeaux I,
33405 TALENCE,
FRANCE.