Une introduction aux faisceaux pervers

Un cours proposé par Alexandru Dimca
Notes rédigées par Thomas Brélivet

Table des matières

Introduction

On peut commencer avec la citation suivante :
«Although perverse sheaves have a short history, they play an important role in various branches of mathematics, such as algebraic geometry or group representations. This theory is now well understood, but it is difficult to find in the literature a systematic treatment of it in the analytic case.» voir [KS], p. 411.

La première partie affirme l'utilité de la théorie des faisceaux pervers, fait confirmé aussi par les nombreux articles dédiés récemment aux faisceaux pervers ou à leurs applications à la théorie des singularités et à la topologie des variétés algébriques ou analytiques complexes, voir [BMM], [HLê], [Ma2], [Ma3], [Ma4].
D'autres applications récentes des faisceaux pervers utilisent la correspondance de Riemann-Hilbert pour relier les propriétés topologiques aux propriétés de D-modules de type «système de Gauss-Manin», voir [Pa], [S2], [DS2], [DP], [BD].

La deuxième partie de la citation affirme un certain manque de références sur les faisceaux pervers, surtout les présentations assez rapides mais aussi assez complètes pour permettre au lecteur (venant par exemple de la théorie des singularités, des variétés algébriques complexes) de comprendre les articles utilisant ce «jargon» et après de l'utiliser soi-même dans sa recherche.

A notre connaissance, la situation des références générales au sujet des faisceaux pervers se présente comme suit :

(i) Il y a deux textes très complets voir Beilinson, Bernstein et Deligne [BBD] et Kashiwara et Schapira [KS], auxquels on peut ajouter les deux livres édités par Borel [B1] et [B2], qui traitent en détail le cas du faisceau de la cohomologie d'intersection et la correspondance de Riemann-Hilbert. A voir aussi Goresky-MacPherson [GoM1].

(ii) Il y a aussi quelques introductions ou présentations rapides des faisceaux pervers, comme par exemple Brylinski [Br], Kirwan [Ki] et Massey [Ma1] (la dernière, non publiée, a été en effet un des moteurs pour notre démarche).

Le texte que nous proposons voudrait combler le vide entre les travaux (i) très complets et par cela même difficile à lire par le néophyte et les présentations (ii), excellentes comme motivations mais insuffisantes au «bricoleur» qui aimerait utiliser les faisceaux pervers dans son travail.
Quelques mots sur le contenu de ce texte.
Chapitre 1 donne une présentation des catégories dérivées, en suivant de près Borel [B2], Iversen [I] et Gelfand-Manin [GM]. Pour cette partie les références ne manquent pas!
Chapitre 2 introduit les catégories dérivées les plus utilisées en topologie algébrique ainsi que d'autres éléments de base comme le triangle de cohomologie locale à support dans un fermé.
Chapitre 3 continue cette discussion avec la dualité de Verdier dans la catégorie dérivée $D^b(A_X)$, $A = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C}$.
On introduit ici les complexes cohomologiquement constructibles (disons par rapport à une stratification régulière de Whitney d'un espace analytique complexe) et les deux foncteurs clé $\psi_f =$ cycles proches et $\varphi_f =$ cycles évanescents.
Les références principales pour Chapitre 2 et Chapitre 3 sont Iversen [I] et Kashiwara-Schapira [KS] (en effet [I] ne contient rien sur les foncteurs ψ_f et φ_f ...).
Parmi d'autres exemples, nous expliquons ici en détail comment la dualité de Verdier contient comme un cas particulier la dualité de Poincaré pour les variétés topologiques.
Dans le Chapitre 4 nous arrivons (enfin!) à définir et à étudier les faisceaux pervers. Nous démontrons dans un cas particulier (singularités isolées) le fait que le faisceaux $\mathbb{C}_X[n]$ est pervers si X est une variété algébrique, localement à intersection complète avec $n = \dim X$. Nous décrivons aussi la catégorie $Perv(X, \mathbb{C})$ lorsque $\dim X = 0$ ou $\dim X = 1$.
Nous donnons aussi un exemple de l'utilité des D-modules même pour obtenir des résultats purement topologiques sur les faisceaux pervers.
Le dernier Chapitre présente quelques applications des faisceaux pervers à la théorie locale des singularités (connectivité homologique des fibres de Milnor et des «links» complexes) qui sont déjà présentes dans Massey [Ma1], mais aussi à l'étude globale de la topologie d'une fonction polynômiale $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$.
En particulier, même la notion de base ici, fonction f à singularités cohomologiquement isolées sur $\mathbb{C}^n$ et à l'infini, peut se définir seulement en utilisant le foncteur cycles évanescents. Pour en tirer les conséquences et pour faire entrer en jeux les D-modules, on a besoin de beaucoup de propriétés des faisceaux pervers. Ce point de vue sur les polynômes qui apporte au sujet toute la puissance de la théorie des D-modules à été inauguré par Sabbah [S2] et continué par Dimca-Saito [DS2].
Ce texte a été préparé initialement à l'occasion d'un cours post-DEA que j'ai donné à l'uni-

versité de Bordeaux au printemps de 1999.
Je tiens à remercier tous mes collègues et les thésards qui ont subi mes exposés et qui m'ont apporté leurs remarques très utiles.

Chapitre 1

Catégories dérivées

Dans cette partie, on donne une présentation rapide des catégories dérivées. Pour plus de détails et pour des preuves, le lecteur est renvoyé à Borel [B2], Chapitre I, Iversen [I], Chapitre I et XI, et Gelfand-Manin [GM].

1.1 Les catégories $C^*(\mathcal{A}), * = \phi, +, -, b$ des complexes d'une catégorie

Définition 1.1 *On dit que la catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie exacte si elle admet un objet zéro, tous les morphismes dans $\mathcal{C}$ ont noyaux et conoyaux, et pour tout morphisme f, le morphisme induit $Coim\ f \to Im\ f$ est un isomorphisme.*

Nous pouvons faire un peu d'algèbre homologique dans une catégorie exacte, par exemple on a le lemme du serpent et la suite exacte longue d'homologie associée à une suite exacte courte de complexes, voir [I], p. 1-10 pour plus de détails.

Définition 1.2 *On dit que la catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie additive si*

(i) pour deux objets X, Y de $\mathcal{C}$ l'ensemble $Hom(X, Y)$ a une structure de groupe abélien tel que toutes les compositions de morphismes sont bilinéaires,

(ii) il existe un objet zéro, noté $0_{\mathcal{C}}$,

(iii) pour deux objets X, Y de $\mathcal{C}$ la somme directe $X \oplus Y$ existe.

Si on dénote par $\mathcal{C}^0$ la catégorie opposée à la catégorie $\mathcal{C}$ (mêmes objets mais tous les morphismes renversés), alors on a

$$\mathcal{C} \text{ exacte } \Longleftrightarrow \mathcal{C}^0 \text{ exacte,}$$
$$\mathcal{C} \text{ additive } \Longleftrightarrow \mathcal{C}^0 \text{ additive.}$$

En utilisant la deuxième équivalence on voit que dans une catégorie additive le produit direct $X \times Y$ de deux objets quelconques existe et $X \times Y$ est isomorphe à $X \oplus Y$, voir [I], p. 11-12.

Définition 1.3 *Un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ entre deux catégories additives est un foncteur additif si pour tout objets X, Y de $\mathcal{C}$, l'application induite par F*

$$Hom(X, Y) \longrightarrow Hom(F(X), F(Y))$$

est un morphisme de groupes abéliens.

Exercice 1.1 Montrer que $F(0_{\mathcal{C}}) = 0_{\mathcal{D}}$ si F est un foncteur additif.

Indication. Pour tout objet X dans une catégorie abélienne, on a deux morphismes dans $\mathrm{Hom}(X, X)$, $1_X =$ l'identité de X et $0_X =$ l'élément neutre du groupe $Hom(X, X)$.
Montrer qu'un objet X est isomorphe à l'objet nul $0_{\mathcal{C}}$ si et seulement si ces deux morphismes coïncident, $1_X = 0_X$.

Pour les catégories additives, on peut développer une théorie homotopique assez riche, voir [I], p. 11-33.
Les catégories «usuelles» sont en effet des catégories abéliennes dans le sens de la définition suivante.

Définition 1.4 *Une catégorie $\mathcal{C}$ est abélienne si elle est en même temps exacte et additive.*

Exemple 1.1 (Exemples de catégories abéliennes) ([GM], p. 109-133)

1. $Ab =$ la catégorie des groupes abéliens,
2. $\mathrm{mod}(A) =$ la catégorie des modules (à droite ou à gauche) sur un anneau A,
3. $Ab(X) =$ la catégorie des faisceaux en groupes sur l'espace topologique X,
4. $mod(\mathcal{A}) =$ la catégorie des modules sur un faisceau d'anneau $\mathcal{A}$ sur l'espace topologique X.

Le foncteur «sections globales» induit deux foncteurs additifs

$$\Gamma : Ab(X) \longrightarrow Ab$$

et

$$\Gamma : mod(\mathcal{A}) \longrightarrow mod(A) \text{ où } A = \Gamma(X, \mathcal{A}).$$

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie. On définit $C(\mathcal{A})$ comme la catégorie dont les objets sont les complexes d'objets de $\mathcal{A}$ c'est-à-dire

$$A^\bullet : \cdots \longrightarrow A^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} A^0 \xrightarrow{d^0} A^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$$

et les morphismes évidents $A^\bullet \xrightarrow{u} B^\bullet$ sont donnés par

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "u^{-1}"'] & A^0 \arrow[r] \arrow[d, "u^0"'] & A^1 \arrow[r] \arrow[d, "u^1"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{-1} \arrow[r] & B^0 \arrow[r] & B^1 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

L'ensemble de ces morphismes $A^\bullet \xrightarrow{u} B^\bullet$ est noté par $Hom(A^\bullet, B^\bullet)$.

On a un plongement des catégories

$$\begin{array}{rccc} c_0 : & \mathcal{A} & \longrightarrow & C(\mathcal{A}) \\ & A & \longmapsto & \cdots \to 0 \to \underset{\bullet}{A} \to 0 \to \cdots \end{array}$$

où le point en dessous indique la position 0.

Si $\mathcal{A}$ est une catégorie additive (resp. abélienne) alors $C(\mathcal{A})$ est une catégorie additive (resp. abélienne). Si $\mathcal{A}$ est abélienne alors on peut définir les foncteurs de cohomologie

$$H^k : C(\mathcal{A}) \to \mathcal{A},\ \ H^k(A^\bullet) = \frac{\mathrm{Ker}\ d^k}{\mathrm{Im}\, d^{k-1}}.$$

Le foncteur H^k est un δ-foncteur exact i.e. à une suite exacte courte dans $C(\mathcal{A})$

$$0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0$$

est associée une suite exacte longue

$$\cdots \to H^k(A^\bullet) \to H^k(B^\bullet) \to H^k(C^\bullet) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(A^\bullet) \to \cdots$$

dans $\mathcal{A}$, voir [I], p. 7-8.

Notation. $C^*(\mathcal{A})$
$* = +$ pour la sous-catégorie pleine dont les objets sont $\cdots \to 0 \to \cdots \to A^{-1} \to A^0 \to \cdots$ les complexes bornés à gauche ($\exists n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $A^m = 0,\ \ \forall m \leq n_0$),
$* = -$ pour la sous-catégorie pleine dont les objets sont $\cdots \to A^0 \to A^1 \to \cdots \to 0 \to \ldots$

les complexes bornés à droite,
$* = b$ pour la sous-catégorie pleine dont les objets sont les complexes bornés, ce sont les complexes bornés à gauche et à droite.

Définition 1.5
Soient $X^\bullet, Y^\bullet \in C^*(\mathcal{A})$

(i) $X^\bullet \xrightarrow{u} Y^\bullet$ *est un isomorphisme homologique (on dit aussi quasi-isomorphisme) si et seulement si* $H^k(X^\bullet) \xrightarrow{H^k(u)} H^k(Y^\bullet)$ *est un isomorphisme pour tout* k.
(ii) Soient $u, v : X^\bullet \to Y^\bullet$ *alors on dit que* u *et* v *sont homotopes s'il existe* $h \in Hom^{-1}(X^\bullet, Y^\bullet)$ *tel que* $u - v = d_Y h + h d_X$

et

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{k-1} \arrow[r, "d_{X^\bullet}^{k-1}"] \arrow[d] & X^k \arrow[r, "d_{X^\bullet}^{k}"] \arrow[d] \arrow[dl, "h"'] & X^{k+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, "h"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{k-1} \arrow[r, "d_{Y^\bullet}^{k-1}"'] & Y^k \arrow[r, "d_{Y^\bullet}^{k}"'] & Y^{k+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

notation : $u \sim v$.

Sens géométrique de l'homotopie : Soient $V \xrightarrow{f} W$ et $V \xrightarrow{g} W$ deux applications continues entre deux espaces topologiques qui sont homotopes, c'est-à-dire il existe $H : V \times I \to W$ continue telle que pour tout $v \in V$, $H(v, 0) = f(v)$ et $H(v, 1) = g(v)$. Alors les applications induites au niveau des cochaînes, $C^*(V) \xrightarrow{f^*} C^*(W)$ et $C^*(V) \xrightarrow{g^*} C^*(W)$ sont homotopes au sens algébrique. Pour plus de détails voir [GM], p. 50-52.

Remarque 1.1 Soient $X^\bullet$ et $Y^\bullet$ deux objets de $C^*(\mathcal{A})$. On peut définir un nouveau complexe de groupes abéliens $Hom^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)$ en posant
$Hom^k(X^\bullet, Y^\bullet) = \{(u^m)_{m \in \mathbb{Z}} : u^m : X^m \to Y^{m+k} \text{ morphisme }\}$,
$d^k : Hom^k(X^\bullet, Y^\bullet) \to Hom^{k+1}(X^\bullet, Y^\bullet)$ et $d^k(u^m) = d_{Y^\bullet}^{k+m} \circ u^m + (-1)^{k+1} u^{m+1} \circ d_{X^\bullet}^m$.
On a

$$Hom(X^\bullet, Y^\bullet) \neq (Hom^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet), d),$$

car d'un coté on a un groupe et de l'autre un complexe.
Par contre on a

$$\begin{cases} Hom(X^\bullet, Y^\bullet) = \text{Ker } d^0, \\ u \sim v \text{ si et seulement si } u - v \in \text{Im } d^{-1}. \end{cases}$$

Le cône d'un morphisme de $C(\mathcal{A})$
Ici, $\mathcal{A}$ est une catégorie additive. On définit le foncteur de translation par $T(X^\bullet) = X^\bullet[1]$ où $(X^\bullet[n])^s = X^{n+s}$.

Définition 1.6 *Soit $u : X^\bullet \to Y^\bullet$ un morphisme de complexes. Le cône de u est le complexe*

$$C_u^\bullet = Y^\bullet \oplus (X^\bullet[1]),$$

avec $d_u(y,x) = (dy + u(x), -dx)$.

En terme géométrique : on se donne $f : X \to Y$, on pose $Cone(f) = CX \cup_{\approx} Y$, l'espace obtenu en identifiant les points x et $y = f(x)$.

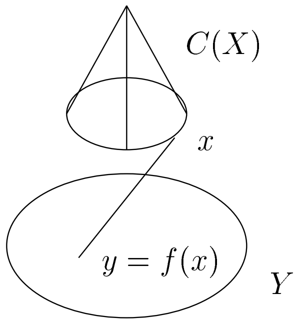

FIG. 1.1 – *Interprétation géométrique*

Les complexes de cochaînes nous donnent la relation entre les deux notions.
Plus précisément en utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris on peut voir que le cône du morphisme induit $f^* : C^*(Y) \to C^*(X)$ est quasi-isomorphe au complexe $C^*(Cone(f))$.

Le cône de u nous définit un triangle

$$T_u : X^\bullet \xrightarrow{u} Y^\bullet \xrightarrow{q} C_u^\bullet \xrightarrow{p} X^\bullet[1]$$

où q est l'inclusion et p la projection.

On le note aussi

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[rr] & & Y^\bullet \arrow[dl] \\ & C_u^\bullet \arrow[ul, "{[1]}"] & \end{tikzcd}$$

Définition 1.7 *Deux complexes $X^\bullet$ et $Y^\bullet$ sont homotopiquement équivalents s'il existe $X^\bullet \overset{u}{\to} Y^\bullet$ et $X^\bullet \overset{v}{\to} Y^\bullet$ tels que*

$$\begin{cases} v \circ u \sim Id_{X^\bullet}. \\ u \circ v \sim Id_{Y^\bullet}. \end{cases}$$

On note $X^\bullet \sim Y^\bullet$.

Dans ces conditions, u et v sont des quasi-isomorphismes. Par contre l'existence d'un quasi-isomorphisme $u : X^\bullet \to Y^\bullet$ n'implique pas en général $X^\bullet \sim Y^\bullet$ (voir Proposition 1.7 pour un résultat relié).

Lemme 1.1

(i) La composition de deux morphismes consécutifs dans le triangle T_u est homotope à 0.

(ii) Pour tout $X^\bullet$ le cône $C^\bullet_{Id_{X^\bullet}}$ est homotope au complexe nul.

(iii) Si $u \sim v$ alors il existe un isomorphisme de complexes $\varphi : C_u^\bullet \overset{\sim}{\to} C_v^\bullet$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} & C_u^\bullet \arrow[dd, "\varphi", "\sim"'] \arrow[dr, "p"] & \\ Y^\bullet \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "q"'] & & X^\bullet[1] \\ & C_v^\bullet \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

Dans la suite, on suppose que $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne.

Proposition 1.1 *Au triangle T_u est associé une suite exacte longue de cohomologie*

$$\cdots \longrightarrow H^k(X^\bullet) \xrightarrow{u^*} H^k(Y^\bullet) \xrightarrow{q^*} H^k(C_u^\bullet) \xrightarrow{\delta = p^*} H^{k+1}(X^\bullet) \xrightarrow{u^*} H^{k+1}(Y^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Corollaire 1.1 *u est un quasi-isomorphisme si et seulement si $C_u^\bullet$ est acyclique (i.e. $H^k(C_u^\bullet) = 0\ \forall k$).*

Proposition 1.2 *Soit*

$$0 \to X^\bullet \overset{u}{\to} Y^\bullet \overset{v}{\to} Z^\bullet \to 0$$

une suite exacte dans $C^*(\mathcal{A})$

(i) Il existe un quasi-isomorphisme m *tel que*

$$\begin{tikzcd} C_u^\bullet \arrow[rr, "m", "\sim"'] & & Z^\bullet \\ & Y^\bullet \arrow[ul, "q"] \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

soit un diagramme commutatif (où q *est l'inclusion)*

(ii) Si cette suite exacte est semi-scindée (i.e. on a une section de $Y^\bullet \overset{v}{\to} Z^\bullet$*) alors* m *est une équivalence d'homotopie.*

La preuve des trois résultats précédents se trouve par exemple dans [B2], p. 41-42.

1.2 La catégorie $K^*(\mathcal{A})$, $* = \phi, +, -, b$ homotopique des complexes d'une catégorie

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive.
On pose

$$Ob(K^*(\mathcal{A})) = Ob(C^*(\mathcal{A})),$$

$$Hom_{K^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) = Hom(X^\bullet, Y^\bullet)/\sim = H^0(Hom^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet))$$

ce dernier est un groupe abélien qu'on note aussi $[X^\bullet, Y^\bullet]$.

Remarque 1.2 La catégorie $K^*(\mathcal{A})$ est additive ([B2], p. 44), mais pas abélienne (même si $\mathcal{A}$ est abélienne). On n'a donc plus la notion de suite exacte courte, image et noyau.

(i) Pour $\varphi \in Hom_{K^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$, $C_\varphi^\bullet$ n'est défini qu'à isomorphisme près (par le lemme 1.1 (iii)),

(ii) on a le triangle commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} C^*(\mathcal{A}) \arrow[rr, "H^k"] \arrow[dr] & & \mathcal{A} \\ & K^*(\mathcal{A}) \arrow[ur, "H^k"'] & \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire, si on a $u \sim v$ alors $H^k(u) = H^k(v)$.

Définition 1.8 *(triangles distingués, catégorie triangulée)*

Soit $\mathcal{T}$ la famille des triangles dans $K^*(\mathcal{A})$ qui sont isomorphes à un triangle standard T_u. Cette famille de triangles est par définition la famille des triangles distingués. Une catégorie additive $\mathcal{C}$ munie d'un foncteur de translation T et d'une famille de triangles distingués $\mathcal{T}$ est dite triangulée si $\mathcal{T}$ vérifie les axiomes Tr1 à Tr4. Voir [B2], pp 26-28.

Définition 1.9 *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie triangulée, $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ est un foncteur cohomologique si pour tout triangle distingué*

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \xrightarrow{+1} X$$

la suite

$$F(X) \longrightarrow F(Y) \longrightarrow F(Z)$$

est exacte.

Si F est un foncteur cohomologique, on pose $F^i(X) = F(X[i]) = F \circ T^i(X)$.
Le système de foncteurs F^i est conservatif si pour tout triangle distingué

$$F(X) \longrightarrow F(Y) \longrightarrow F(Z)$$

la suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow F^i(X) \longrightarrow F^i(Y) \longrightarrow F^i(Z) \longrightarrow F^{i+i}(X) \longrightarrow \cdots$$

est exacte.

On peut montrer le résultat suivant [B2], p. 50.

Proposition 1.3 *La catégorie homotopique $K^*(\mathcal{A})$ est une catégorie triangulée.*

Exemple 1.2 Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne alors $H^0 : K^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ est un foncteur cohomologique et le système H^k est conservatif.

Définition 1.10 *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories triangulées. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est un δ-foncteur si F est compatible avec les deux foncteurs translation ($F \circ T = T' \circ F$) et si F transforme les triangles distingués dans $\mathcal{C}$ en des triangles distingués dans $\mathcal{C}'$.*

1.3 Les catégories dérivées $D^*(\mathcal{A})$

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne.
Soit $His = \{$tous les isomorphismes cohomologiques de $K^*(\mathcal{A})\}$

Proposition 1.4 *His est un système multiplicatif dans $K^*(\mathcal{A})$ compatible avec la structure triangulée.*

Voir [B2], p. 52-54 où on montre que His vérifie les conditions FR1-FR5 nécessaires pour la localisation d'une catégorie.

Définition 1.11 *On appelle catégorie dérivée de la catégorie abélienne $\mathcal{A}$ la localisation $D^*(\mathcal{A})$ de $K^*(\mathcal{A})$ relativement au système His.*

On a $Ob(D^*(\mathcal{A})) = Ob(K^*(\mathcal{A})) = Ob(C^*(\mathcal{A}))$, les morphismes $Hom_{D^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ sont donnés à quasi-isomorphisme près par des diagrammes dans $K^*(\mathcal{A})$ du type

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr] & \\ X^\bullet & & Y^\bullet \end{tikzcd}$$

la composition est donnée par

$$\begin{tikzcd} & & \bullet \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr] & & \\ & \bullet \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr] & \\ X^\bullet & & Y^\bullet & & Z^\bullet \end{tikzcd}$$

où le carré dénote un produit fibré.
On note $p^*_{\mathcal{A}} : K^*(\mathcal{A}) \longrightarrow D^*(\mathcal{A})$ le foncteur de localisation.
La catégorie dérivée $D^*(\mathcal{A})$ est munie d'une structure triangulée telle que le foncteur de localisation $p^*_{\mathcal{A}}$ est un δ-foncteur, voir [B2], p. 54.

Proposition 1.5 ([B2], p. 55-57)

(i) $\alpha \in Hom_{D^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ isomorphisme $\Longleftrightarrow$ α est représentable par un diagramme

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr, "\sim"] & \\ X^\bullet & & Y^\bullet \end{tikzcd}$$

(ii) Soit $u : X^\bullet \to Y^\bullet$; alors $p(u) = 0$ implique $u^* = 0$ où $u^* : H^*(X^\bullet) \to H^*(Y^\bullet)$,

(iii) le foncteur D de plongement

$$\begin{aligned} D: \ \mathcal{A} &\longrightarrow D^*(\mathcal{A}) \\ A &\longmapsto (0 \to \underset{\bullet}{A} \to 0) \end{aligned}$$

est pleinement fidèle, c'est-à-dire

$$Hom_{\mathcal{A}}(X, Y) = Hom_{D^*(\mathcal{A})}(DX, DY).$$

Définition 1.12 *Un objet I dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est injectif si le foncteur $Hom(-, I)$ est exact. Un complexe $I^\bullet$ est injectif si tous les objets I^k sont injectifs.*

Exemple 1.3 (Exemples d'objets injectifs)

(i) Si $\mathcal{C}$ est la catégorie Vect_k des espaces vectoriels sur un corps k, alors tout objet $X \in Ob(\mathcal{C})$ est injectif,

(ii) si $\mathcal{C} = Ab$, alors $G \in Ob(\mathcal{C})$ est injectif si et seulement si le groupe G est divisible (voir [G], p. 6),

(iii) si $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne et I et J sont injectifs alors $I \oplus J = I \times J$ est injectif.

Définition 1.13 *Une catégorie $\mathcal{C}$ admet suffisamment d'objets injectifs si tout objet X de $\mathcal{C}$ est un sous-objet d'un objet injectif I de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire $0 \to X \to I$ est une suite exacte avec I injectif.*

Théorème 1.1 ([G], I.1.2 et [H], III.2.2)

(i) Pour tout anneau A, la catégorie $mod(A)$ admet suffisamment d'objets injectifs,

(ii) La catégorie $mod(\mathcal{A})$ admet suffisamment d'objets injectifs pour tout faisceaux d'anneaux $\mathcal{A}$ sur un espace topologique X.

L'importance des catégories admettant suffisamment d'objets injectifs découle du résultat suivant

Proposition 1.6 *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne admettant suffisamment d'objets injectifs alors tout complexe $X^\bullet \in C^+(\mathcal{C})$ admet un quasi-isomorphisme $X^\bullet \to I^\bullet$ dans un complexe injectif $I^\bullet \in C^+(\mathcal{C})$.*

Dans ce cas, on appelle $I^\bullet$ une résolution injective du complexe $X^\bullet$. Une construction explicite du complexe $I^\bullet$ est décrite plus bas, c'est le complexe simple $s(I^{\bullet,\bullet})$ associé à une famille de résolutions injectives pour chaque terme X^k du complexe $X^\bullet$.

Soit $I(\mathcal{A})$ = la catégorie formée par les objets injectifs de $\mathcal{A}$.

Proposition 1.7 ([B2], p. 72-73) *Dans $K^+(I(\mathcal{A}))$ on a*

(i) u quasi-isomorphisme si et seulement si u est un isomorphisme.

(ii) Si $\mathcal{A}$ admet suffisamment d'objets injectifs alors le morphisme $\widetilde{p^+} : K^+(I(\mathcal{A})) \longrightarrow D^+(\mathcal{A})$ est une équivalence de catégories.

Ici, le morphisme $\widetilde{p^+}$ est la composition

$$K^+(I(\mathcal{A})) \xrightarrow{j} K^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{p^+_{\mathcal{A}}} D^+(\mathcal{A})$$

du foncteur plongement j avec le foncteur localisation $p^+_{\mathcal{A}}$.
L'intérêt de ce résultat est qu'on peut souvent remplacer la catégorie dérivée $D^+(\mathcal{A})$ par la catégorie plus concrète $K^+(I(\mathcal{A}))$.

Exemple 1.4 Soit $\mathcal{A}$ la catégorie des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels de dimension finie, on a $I(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, $D^+(\mathcal{A}) = K^+(\mathcal{A}) = K^+(I(\mathcal{A})) = \{0 \longrightarrow V_{-n} \longrightarrow V_{-n+1} \longrightarrow V_{-n+2} \longrightarrow \cdots\}$. Les morphismes sont les classes d'homotopies de morphismes.

On peut faire de façon duale tout ce qui précède avec les objets projectifs.

Soit $K^*(\mathcal{A}) \xrightarrow{F} K(\mathcal{B})$ un δ-foncteur (voir définition 1.10).

Définition 1.14 *On appelle foncteur dérivé à droite de F un couple (R^*F, ξ_F) où R^*F est un δ-foncteur $D^*(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$ et $\xi_F : p_{\mathcal{B}} \circ F \longrightarrow R^*F \circ p^*_{\mathcal{A}}$ est un morphisme de foncteurs qui satisfait la propriété d'universalité suivante :*
Pour tout δ-foncteur $G : D^*(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$ et tout morphime de foncteurs $\zeta : p_{\mathcal{B}} \circ F \to G \circ p^*_{\mathcal{A}}$, il existe un unique morphisme de foncteurs $\eta : R^*F \to G$ tel que $\zeta = (\eta \circ p^*_{\mathcal{A}}) \circ \xi_F$,

$$\begin{tikzcd}
K^*(\mathcal{A}) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p^*_{\mathcal{A}}"] & K(\mathcal{B}) \arrow[d, "p_{\mathcal{B}}"] \\
D^*(\mathcal{A}) \arrow[r, "R^*F"] & D(\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

Il existe une notion duale de foncteur dérivé à gauche L^*F.

Remarque 1.3 (i) Si R^*F ou L^*F existent, alors ils sont uniques à isomorphisme près.

(ii) Si $\varphi : F \to G$ est un morphisme de δ-foncteurs $F, G : K^*(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{B})$ et si les foncteurs dérivés R^*F et R^*G existent, alors il existe un morphisme de foncteurs $R^*\varphi : R^*F \longrightarrow R^*G$ tel que

$$\begin{tikzcd}
p_{\mathcal{B}} \circ F \arrow[r, "\xi_F"] \arrow[d, "p_{\mathcal{B}} \circ \varphi"] & R^*F \circ p^*_{\mathcal{A}} \arrow[d, "R^*\varphi \circ p^*_{\mathcal{A}}"] \\
p_{\mathcal{B}} \circ G \arrow[r, "\xi_G"] & R^*G \circ p^*_{\mathcal{A}}
\end{tikzcd}$$

Théorème 1.2 (Théorème d'existence) *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes et soit $F : K^*(\mathcal{A}) \longrightarrow K(\mathcal{B})$ un δ-foncteur. Supposons qu'il existe une sous-catégorie triangulée $\Gamma(\mathcal{A}) \subset K^*(\mathcal{A})$ telle que*

(i) Pour tout $X^\bullet \in Ob(K^*(\mathcal{A}))$, il existe $M^\bullet \in Ob(\Gamma(\mathcal{A}))$ et un quasi-isomorphisme $X^\bullet \to M^\bullet$,

(ii) si $M^\bullet \in Ob(\Gamma(\mathcal{A}))$ est acyclique, alors $F(M^\bullet)$ est aussi acyclique.
Alors le foncteur dérivé à droite (R^*F, ξ_F) existe et pour tout $M^\bullet \in Ob(\Gamma(\mathcal{A}))$, le morphisme $\xi_F(M^\bullet)$ est un isomorphisme dans $D(\mathcal{B})$.

Ce résultat permet le calcul de $R^*F(X^\bullet)$ à l'aide de la résolution $X^\bullet \to M^\bullet$ car $X^\bullet \simeq M^\bullet$ dans $D^*(\mathcal{A})$. Un cas particulier important est donné par le corollaire suivant

Corollaire 1.2 *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes et $F : K^*(\mathcal{A}) \longrightarrow K(\mathcal{B})$ un δ-foncteur. Suposons que*

(i) $\mathcal{A}$ admet suffisamment d'objets injectifs,

(ii) F transforme les complexes acycliques de $K^+(I(\mathcal{A}))$ en des complexes acycliques dans $K(\mathcal{B})$.
Alors le foncteur dérivé R^*F existe.

Remarque 1.4 Si $F : K^*(\mathcal{A}) \longrightarrow K(\mathcal{B})$ est un foncteur additif, alors la condition (ii) est automatiquement satisfaite. En effet si $M^\bullet \in K^+(I(\mathcal{A}))$ est acyclique, alors $0 \xrightarrow{u} M^\bullet$ est un quasi-isomorphisme donc u est un isomorphisme dans $K^+(I(\mathcal{A}))$ par la proposition 1.7 (i). $F(0) \xrightarrow{F(u)} F(M^\bullet)$ est aussi un isomorphisme et $F(0) = 0$ car F est additif, voir exercice 1.1.
Voilà une construction explicite pour le foncteur R^*F dans ce cas.
En prenant une résolution injective $X^k \longrightarrow I^{\bullet,k}$ pour tous les termes du complexe $X^\bullet$ dans $K^+(\mathcal{A})$ on obtient un complexe double $(I^{\bullet,\bullet})$. Soit $s(I^{\bullet,\bullet})$ le complexe simple associé à ce complexe double. Alors on a un quasi-isomorphisme

$$X^\bullet \longrightarrow s(I^{\bullet,\bullet})$$

et donc

$$R^+F(X^\bullet) = p_{\mathcal{B}} \circ F(s(I^{\bullet,\bullet})).$$

Si le foncteur F est exact, alors $F(X^\bullet) \to F(s(I^{\bullet,\bullet}))$ est encore un quasi-isomorphisme et donc on a

$$R^+F(X^\bullet) = p_{\mathcal{B}} \circ F(X^\bullet).$$

Pour cette raison, on dénote R^+F par F dans le cas d'un foncteur exact. Cette notation plus simple est quelques fois utilisée pour tout foncteur dérivé, voir [BBD].

Avec un foncteur dérivé R^*F, il y a deux familles associées de foncteurs de type «image directe d'ordre supérieur» :
les foncteurs $R^nF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ définis par la composition

$$\mathcal{A} \xrightarrow{D} D^*(\mathcal{A}) \xrightarrow{R^*F} D^*(\mathcal{B}) \xrightarrow{H^n} \mathcal{B}$$

et les foncteurs $\mathbb{R}^nF : D^*(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ définis par la composition

$$D^*(\mathcal{A}) \xrightarrow{R^*F} D^*(\mathcal{B}) \xrightarrow{H^n} \mathcal{B}.$$

Si le foncteur F est exact à gauche alors on a $F = R^0F$.

Définition 1.15 *Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur exact à gauche. Un objet X de $\mathcal{A}$ est F-acyclique si $R^iF(X) = 0$ pour tout $i \geq 1$.*

Exemple 1.5 Un objet injectif est F-acyclique pour tout foncteur F.

Proposition 1.8 ([I], I.7.15 ou [GM], III.7.1)
Soient $\mathcal{A} \overset{G}{\to} \mathcal{B} \overset{F}{\to} \mathcal{C}$ deux foncteurs additifs entre catégories abéliennes admettant suffisamment d'objets injectifs, F étant exact à gauche. Si G transforme les objets injectifs dans des objets F-acycliques, alors il existe un isomorphisme

$$R^+(F \circ G) = R^+F \circ R^+G$$

Pour calculer ces foncteurs dérivés composés, il est très utile d'utiliser le résultat suivant

Théorème 1.3 ([GM], p. 207) *Avec les hypothèses de la proposition précédente, on a*

(i) Pour tout objet X de $\mathcal{A}$, il existe une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = R^pF(R^qG(X))$$

qui converge vers $R^{p+q}(F \circ G)(X)$,

(ii) pour tout complexe $X^\bullet \in D^+(\mathcal{A})$, il existe une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = R^pF(\mathbb{R}^qG(X^\bullet))$$

qui converge vers $\mathbb{R}^{p+q}(F \circ G)(X^\bullet)$.

Ces suites spectrales sont fonctorielles en X, respectivement en $X^\bullet$.

Les foncteurs dérivés de Hom
Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On a déjà défini le foncteur

$$Hom^\bullet(-,-) : C(\mathcal{A})^\circ \times C(\mathcal{A}) \longrightarrow C(Ab)$$

où $C(\mathcal{A})^\circ$ est la catégorie opposée de $C(\mathcal{A})$,

$$Hom^n(X^\bullet, Y^\bullet) = \prod_{p\epsilon Z} Hom_A(X^p, Y^{p+n}).$$

Ici $d^n : Hom^n(X^\bullet, Y^\bullet) \longrightarrow Hom^{n+1}(X^\bullet, Y^\bullet)$, est donné par $d^n\varphi = d_Y \circ \varphi + (-1)^{n+1}\varphi \circ d_X$.
On remarque immédiatement que l'on a

$$\frac{\text{Ker } d^0}{\text{Im } d^{-1}} = [X^\bullet, Y^\bullet] = Hom_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet).$$

Plus généralement, on a le résultat suivant

Lemme 1.2 ([B2], p. 92) *On a* $H^n(Hom^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)) = Hom_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet[n])$.

Le bifoncteur Hom est compatible avec les homotopies et passe aux catégories homotopiques pour donner un bifoncteur

$$Hom^\bullet(-,-) : K(\mathcal{A})^\circ \times K(\mathcal{A}) \longrightarrow K(Ab),$$

$Hom^\bullet$ est un bi-δ-foncteur.
Si on a assez d'objets projectifs dans la catégorie $\mathcal{A}$ on peut construire le foncteur dérivé

$$RHom^\bullet : D^-(\mathcal{A})^\circ \times D(\mathcal{A}) \longrightarrow D(Ab)$$

et si on a assez d'objets injectifs on peut construire

$$RHom^\bullet : D(\mathcal{A})^\circ \times D^+(\mathcal{A}) \longrightarrow D(Ab).$$

Si la catégorie $\mathcal{A}$ admet en même temps assez d'objets injectifs et projectifs alors les deux foncteurs coïncident sur $D^-(\mathcal{A})^\circ \times D^+(\mathcal{A})$, voir [B2], p. 95.
Le foncteur obtenu ainsi est encore un bi-δ-foncteur.

Définition 1.16 *On définit le n-ième hyperext de* $(X^\bullet, Y^\bullet)$ *par*

$$Ext^n(X^\bullet, Y^\bullet) = H^n(RHom^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet))$$

Proposition 1.9 ([B2], p. 96) *On a* $Ext^n(X^\bullet, Y^\bullet) = Hom_{D(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet[n])$.

Chapitre 2

Catégories dérivées en topologie

Soit X un espace topologique, $Ab(X)$ la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X (c'est une catégorie abélienne), A un anneau commutatif ($A = \mathbb{C}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$).

A l'espace X on associe le faisceau localement constant d'anneaux A_X et la catégorie des faisceaux de A_X-modules $mod(A_X)$.

Pour $X = \{\text{point}\}$, on identifie $A_X = A$, $Ab(X) = Ab$ (la catégorie des groupes abéliens) et $mod(A_X) = mod(A)$, la catégorie des A-modules.

On va noter $D^*(A_X) = D^*(mod(A_X))$ et même $D^*(X) = D^*(mod(A_X))$ quand l'anneau A est fixé.

Définition 2.1 *Si $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in mod(A_X)$ on peut définir*

(i) *$Hom(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in Ab$, le groupe abélien des morphismes de faisceaux de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$,*

(ii) *$\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in mod(A_X)$, le faisceau $\mathcal{U} \mapsto Hom(\mathcal{F}_{|\mathcal{U}}, \mathcal{G}_{|\mathcal{U}})$ (on peut vérifier que c'est vraiment un faisceau),*

(iii) *$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \in mod(A_X)$ le faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{U} \mapsto \mathcal{F}(\mathcal{U}) \otimes_A \mathcal{G}(\mathcal{U})$,*

(iv) *Si $\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet \in C^*(mod(A_X))$, alors on peut définir aussi le complexe $\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) \in C^*(mod(A_X))$ qui admet un foncteur dérivé $R\mathcal{H}om^\bullet$.*

Définition 2.2 (Hypercohomologie d'un complexe de faisceaux)
Le foncteur des sections globales $K^+(mod(A_X)) \xrightarrow{\Gamma} K^+(mod(A))$ nous permet de poser

$$\mathbb{H}^k(X, \mathcal{F}^\bullet) = \mathbb{H}^k(\mathcal{F}^\bullet) = (H^k \circ R^+\Gamma \circ p)(\mathcal{F}^\bullet).$$

Ce qui peut s'écrire $\mathbb{H}^k(X, \mathcal{F}^\bullet) = \mathbb{H}^k(\mathcal{F}^\bullet) = (\mathbb{R}^k\Gamma \circ p)(\mathcal{F}^\bullet)$.
Pour un faisceau $\mathcal{F} \in mod(A_X)$, ses groupes de cohomologie sont définis d'une façon similaire, c'est-à-dire

$$H^k(X, \mathcal{F}) = (R^k\Gamma \circ p)(\mathcal{F}).$$

Pour un complexe $\mathcal{F}^\bullet \in C^*(mod(A_X))$, on note avec $\mathcal{H}^k(\mathcal{F}^\bullet)$ le k-ième faisceau de cohomologie. Pour tout complexe $\mathcal{F}^\bullet \in C^+(mod(A_X))$ on a une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}^q(\mathcal{F}^\bullet)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X, \mathcal{F}^\bullet)$$

qui est un cas particulier du Théorème 1.3 (ii) (on prend $F = \Gamma$ et $G =$ identité).
La filtration bête sur le complexe $\mathcal{F}^\bullet$ nous donne une autre suite spectrale

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \mathcal{F}^p) \Longrightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X, \mathcal{F}^\bullet).$$

Remarque 2.1 Attention, $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \neq Hom_A(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$ par contre $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})_x = \mathcal{F}_x \otimes_A \mathcal{G}_x$.

Le foncteur $Hom : mod(A_X)^\circ \times mod(A_X) \longrightarrow mod(A)$ induit un foncteur

$$Hom^\bullet : C^\circ \times C \longrightarrow C(mod(A))$$

où $C = C(mod(A_X))$ et aussi un foncteur dérivé

$$RHom^\bullet : D(X)^\circ \times D^+(X) \longrightarrow D(mod(A)).$$

Cela donne les foncteurs hyperext

$$Ext^n(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) = H^n(RHom^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet))$$

pour tout $\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet \in D^+(X)$. D'autre part, le foncteur

$$\mathcal{H}om : mod(A_X)^\circ \times mod(A_X) \longrightarrow mod(A_X)$$

induit un foncteur dérivé

$$R\mathcal{H}om^\bullet : D(X)^\circ \times D^+(X) \longrightarrow D(X).$$

Cela donne les A_X-modules hyperext

$$\mathcal{E}xt^n(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) = \mathcal{H}^n(R\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet)).$$

L'isomorphisme évident des foncteurs

$$Hom = \Gamma \circ \mathcal{H}om$$

implique un isomorphisme

$$RHom^\bullet = R\Gamma \circ R\mathcal{H}om^\bullet.$$

En particulier, on a

$$Ext^n(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) = \mathbb{H}^n(X, R\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet))$$

et donc une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{E}xt^q(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet)) \Rightarrow Ext^{p+q}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet)$$

En outre la proposition 1.9 implique l'isomorphisme suivant :

$$Hom_{D^+(X)}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) = Ext^0(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) = \mathbb{H}^0(X, R\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet)).$$

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue entre deux espaces topologiques.

Définition 2.3 (Image directe)
On définit $f_* : Ab(X) \longrightarrow Ab(Y)$ *et* $f_* : mod(A_X) \longrightarrow mod(A_Y)$*, avec* $(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$*.* $f_*\mathcal{F}$ *est un faisceau.*

Alors $R^if_*(\mathcal{F})$ est le faisceau associé au préfaisceau $V \mapsto H^i(f^{-1}(V), \mathcal{F})$, voir [I], p 105.

Exemple 2.1 (Suite spectrale de Leray)
Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue entre deux espaces topologiques. Soit A l'anneau de base.

Comme on a $\Gamma_X = \Gamma_Y \circ f_*$, on a $R(\Gamma_X) = R\Gamma_Y \circ Rf_*$ par la proposition 1.8, donc $\mathbb{H}^\bullet(X, \mathcal{F}^\bullet) = \mathbb{H}^\bullet(Y, Rf_*\mathcal{F}^\bullet)$ et il existe une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = R^p\Gamma_Y(\mathbb{R}^q f_*(\mathcal{F}^\bullet)) = H^p(Y, \mathbb{R}^q f_*(\mathcal{F}^\bullet)) \Longrightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X, \mathcal{F}^\bullet).$$

En effet, les deux foncteurs Γ et f_* sont exacts à gauche et en plus f_* transforme les objets injectifs en objets Γ-acycliques grâce au corollaire 2.1 en bas.

Exemple 2.2 On se place dans le cas où X est une variété algébrique complexe, $Y = \mathbb{C}$ et f une fonction régulière. Soit $y \in Y$, la fibre $R^if_*(\mathbb{C})_y$ est aussi la fibre en y du préfaisceau $V \mapsto H^i(f^{-1}(V), \mathbb{C})$. En utilisant la théorie des espaces stratifiés, on peut montrer que cette fibre est égale à $H^i(T(F_y), \mathbb{C})$, où $T(F_y) = f^{-1}(D_{y,\epsilon})$ est le tube de la fibre $F_y = f^{-1}(y)$, avec ϵ assez petit. Si F_y est la fibre générale alors $R^if_*(\mathbb{C})_y = H^i(T(F_y), \mathbb{C}) = H^i(F_y, \mathbb{C})$.

Définition 2.4 (Image réciproque)
On définit $f^{-1} : Ab(Y) \longrightarrow Ab(X)$ *et* $f^{-1} : mod(A_Y) \longrightarrow mod(A_X)$*,* $f^{-1}\mathcal{F}$ *étant le faisceau associé au préfaisceau*

$$\mathcal{U} \longmapsto \varinjlim_{\mathcal{V} \supset f(\mathcal{U})} \mathcal{F}(\mathcal{V}).$$

Exemple 2.3 Si $f : Y \subset X$ est l'inclusion d'un ouvert, alors f^{-1} est la restriction d'un faisceau à un ouvert, $f^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{F}_{|X}$.

Remarque 2.2 (i) $(f^{-1}\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{f(x)} \Rightarrow f^{-1}$ est un foncteur exact. Par contre f_* est seulement exact à gauche.

(ii) $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ et $R(f \circ g)_* = Rf_* \circ Rg_*$, $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Formules d'adjonction (voir [I] p. 98, [B1], p. 185 et p. 156).

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue entre deux espaces topologiques, $\mathcal{F}$ un faisceau sur X, $\mathcal{G}$ un faisceau sur Y. Alors on a des isomorphismes fonctoriels

(i) $Hom_{A_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) = Hom_{A_X}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F})$,

(ii) $\mathcal{H}om_{A_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) = f_*\mathcal{H}om_{A_X}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F})$,

Dans la catégorie $D^+(A_Y)$, on a aussi

(iii) $Rf_*R\mathcal{H}om^\bullet(f^{-1}\mathcal{A}^\bullet, \mathcal{B}^\bullet) = R\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{A}^\bullet, Rf_*\mathcal{B}^\bullet)$ où $\mathcal{A}^\bullet \in D^+(A_Y)$ et $\mathcal{B}^\bullet \in D^+(A_X)$.

(iv) $Hom_{D^+(A_X)}(f^{-1}\mathcal{A}^\bullet, \mathcal{B}^\bullet) = Hom_{D^+(A_Y)}(\mathcal{A}^\bullet, Rf_*\mathcal{B}^\bullet)$.

En effet (iv) provient de (iii) en utilisant la proposition 1.9

$$Hom_{D^+(A_Y)}(\mathcal{A}^\bullet, Rf_*\mathcal{B}^\bullet) = \mathbb{H}^0(Y, R\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{A}^\bullet, Rf_*\mathcal{B}^\bullet)) =$$
$$\mathbb{H}^0(Y, Rf_*R\mathcal{H}om^\bullet(f^{-1}\mathcal{A}^\bullet, \mathcal{B}^\bullet)) = \mathbb{H}^0(X, R\mathcal{H}om^\bullet(f^{-1}\mathcal{A}^\bullet, \mathcal{B}^\bullet)) = Hom_{D^+(X)}(f^{-1}\mathcal{A}^\bullet, \mathcal{B}^\bullet)$$

Corollaire 2.1 *f_* transforme les objets injectifs dans les objets injectifs.*

Exemple 2.4 Si Y est l'espace réduit à un point, le faisceau d'anneaux A_Y s'identifie à un anneau A et la catégorie $mod(A_Y)$ s'identifie à la catégorie des A-modules $mod(A)$. De plus le foncteur f_* s'identifie au foncteur sections globales $\Gamma(X, -)$ et le foncteur f^{-1} associe à chaque A-module M le faisceau constant M_X. Dans ce cas l'adjonction de (f^{-1}, f_*) s'exprime comme l'adjonction du foncteur $M \to M_X$ avec le foncteur $\Gamma(X, -)$.

Définition 2.5 *Soit $j : Z \longrightarrow X$ une inclusion entre deux espaces topologiques, $\mathcal{F} \in mod(A_X)$. On pose $\mathcal{F}_{|Z} := j^{-1}\mathcal{F}$, $\Gamma(Z, \mathcal{F}) := \Gamma(Z, \mathcal{F}_{|Z})$ et aussi $H^\bullet(Z, \mathcal{F}) = H^\bullet(Z, \mathcal{F}_{|Z})$.*
Il existe un morphisme naturel

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(Z, \mathcal{F}) \\ s & \longmapsto & s_{|Z}. \end{array}$$

Si Z est fermé, on pose $\mathcal{F}_Z := j_*j^{-1}\mathcal{F}$ donc $(\mathcal{F}_Z)_x = \begin{cases} 0 \; si \; x \notin Z \\ \mathcal{F}_x \; si \; x \in Z \end{cases}$.

Plus généralement, si Z est localement fermé ou si le faisceau $\mathcal{F}$ est remplacé par un complexe $\mathcal{F}^\bullet$ alors on peut définir $\mathcal{F}_Z$ (resp. $\mathcal{F}^\bullet_Z$) avec les mêmes propriétés.

Proposition 2.1 *$\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}_Z$, est un foncteur exact de la catégorie $mod(A_X)$ dans la catégorie $mod(A_X)$.*

Définition 2.6 *Pour un faisceau $\mathcal{F} \in mod(A_X)$, on définit le faisceau $\Gamma_Z(\mathcal{F})$ des sections de $\mathcal{F}$ à support dans Z, où Z est fermé. Plus précisément, on pose $\Gamma_Z(\mathcal{F})(\mathcal{U}) := \Gamma_{Z\cap\mathcal{U}}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, où $\Gamma_{Z\cap\mathcal{U}}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) :=$ Ker $(\mathcal{F}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U}\backslash Z))$.*
Si Z est localement fermé alors on peut définir $\Gamma_Z(\mathcal{F})$ avec les mêmes propriétés.

Remarque 2.3

(i) On a deux foncteurs

$$\begin{aligned} \Gamma_Z(X, -) &: mod(A_X) \longrightarrow mod(A), \\ \Gamma_Z(-) &: mod(A_X) \longrightarrow mod(A_X) \end{aligned}$$

exacts à gauche, tels que $\Gamma_Z(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \Gamma_Z(\mathcal{F}))$. Noter aussi que, en général, $\mathcal{F}_Z \neq \Gamma_Z(\mathcal{F})$

(ii) Soit X localement compact. Alors on a $\varinjlim_{\mathcal{U}\supset Z} \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \simeq \Gamma(Z, \mathcal{F})$ si X est séparé et Z compact ou X paracompact et Z fermé.

On va supposer dans la suite que tous les espaces topologiques considérés sont localement compacts. En particulier, les variétés algébriques complexes sont toujours considérées avec leur topologie forte.

Exemple 2.5 L'entrelacs d'une sous-variété.
Soit X une variété quasi-projective complexe. Soit $Z \subset X$ une sous-variété fermée. Alors Z admet un voisinage tubulaire fermé $\mathcal{U}$ tel que l'inclusion $i_{\mathcal{U}} : Z \longrightarrow \mathcal{U}$ soit une équivalence homotopique, voir Durfee [Du]. En plus, la sous-variété Z admet un système fondamental de voisinages de ce type $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ tel que les inclusions $\mathcal{U}_i \longrightarrow \mathcal{U}_j$ sont des équivalences d'homotopie. Le type d'équivalence d'homotopie de l'espace $\mathcal{U}_i^0 = \mathcal{U}_i\backslash Z$ ne dépend pas de i et sera noté par $L_X(Z)$ et appelé l'entrelacs de Z dans X.
On a le résultat suivant qui calcule la cohomologie de l'espace $L_X(Z)$.
Soit $V = X\backslash Z$ et soient $j_V : V \longrightarrow X$ et $i_V : Z \longrightarrow X$ les deux inclusions. Alors

$$H^k(L_X(Z); A) = \mathbb{H}^k(Z, Rj_{V*}A_V)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.
En effet, en utilisant la remarque 2.3 (ii) pour le fermé Z dans l'espace paracompact X, on obtient un isomorphisme de foncteurs dérivés

$$\varinjlim_{\mathcal{U}_i} R\Gamma(\mathcal{U}_i, \mathcal{F}^\bullet) \simeq R\Gamma(Z, \mathcal{F}^\bullet)$$

voir aussi [KS], (2.6.9).
On va utiliser cet isomorphisme pour $\mathcal{F}^\bullet = Rj_{V*}A_V$. On a d'abord pour tout $i \in I$

$$\mathcal{F}^\bullet_{|\mathcal{U}_i} = Rj^i_{0*}(A_{\mathcal{U}^0_i})$$

où $j^i_0 : \mathcal{U}^0_i \longrightarrow \mathcal{U}_i$ est l'inclusion. Donc $R^k\Gamma(\mathcal{U}_i, \mathcal{F}^\bullet_{|\mathcal{U}_i}) = \mathbb{H}^k(\mathcal{U}_i, \mathcal{F}^\bullet_{|\mathcal{U}_i}) = H^k(\mathcal{U}^0_i; A)$. Cela donne

$$H^k(\varinjlim R\Gamma(\mathcal{U}_i, \mathcal{F}^\bullet)) = H^k(L_X(Z); A)$$

car les isomorphismes qui apparaissent dans la limite inductive sont tous des isomorphismes.

Définition 2.7 (Image directe à support compact)
Soit $f : X \longrightarrow Y$ continue. Pour tout $\mathcal{F} \in mod(A_X)$ $f_!\mathcal{F}$ est le faisceau donné par

$$f_!\mathcal{F}(\mathcal{V}) = \{s \in \Gamma(f^{-1}(\mathcal{V}), \mathcal{F})\ ;\ f_{|\mathrm{supp}(s)} : \mathrm{supp}(s) \longrightarrow \mathcal{V} \textit{ soit propre}\}.$$

En particulier, si f est propre, on a $f_* = f_!$.

Proposition 2.2 ([B1], p. 158) $f_! \circ g_! = (f \circ g)_!$ *et* $Rf_! \circ Rg_! = R(f \circ g)_!$.

Exemple 2.6 $\Gamma_c(X, \mathcal{F}) := \{s \in \Gamma(X, \mathcal{F})\ ;\ \mathrm{supp}(s) \text{ est compact}\}$, $\Gamma_c(X, \mathcal{F}) = (a_X)_!(\mathcal{F})$.

La suite de Leray à supports compacts
Soit $f : X \longrightarrow Y$ continue. Alors $\mathbb{H}^\bullet_c(X, \mathcal{F}^\bullet) = \mathbb{H}^\bullet_c(Y, Rf_!\mathcal{F}^\bullet)$ et il existe une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = H^p_c(Y, \mathbb{R}^q f_!\mathcal{F}^\bullet) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}_c(X, \mathcal{F}^\bullet)$$

Proposition 2.3 ([B1], p. 159 et p. 189-190) *Soit $f : X \longrightarrow Y$, $F_y = f^{-1}(y)$, on a*

(i) $(f_!\mathcal{F})_y \simeq \Gamma_c(F_y, \mathcal{F}_{F_y})$, *et aussi* $(R^i f_!\mathcal{F})_y = H^i_c(F_y, \mathcal{F})$ *pour tout i,*
(ii) $i : Z \hookrightarrow X$, *Z localement fermé. Alors $i_!$ est exact et* $\mathcal{F}_Z = i_! i^{-1}\mathcal{F}$,
(iii) si on a

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g'"'] & Y \end{tikzcd}$$

où $X' = X \times_Y Y'$ est le produit fibré de X et Y' (on dit alors qu'on a un diagramme cartésien), alors $(g')^{-1} \circ f_! = f'_! \circ g^{-1}$.

Voilà comment on peut déduire une forme plus générale des isomorphismes (i) de (iii). Si on considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} F_y \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "a"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \{y\} \arrow[r, hook, "j_y"'] & Y \end{tikzcd}$$

alors on a par (iii) le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} mod(A_{F_y}) \arrow[d, "a_!=\Gamma_c"'] & mod(A_X) \arrow[l, "j^{-1}"'] \arrow[d, "f_!"] \\ mod(A) & mod(A_Y) \arrow[l, "j_y^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Par passage aux catégories dérivées, on obtient

$$\begin{tikzcd} D(A_{F_y}) \arrow[d, "R\Gamma_c"'] & D(A_X) \arrow[l, "j^{-1}"'] \arrow[d, "Rf_!"] \\ D(A) & D(A_Y) \arrow[l, "j_y^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Comme ce diagramme est commutatif par la proposition 1.8, on a $R\Gamma_c(\mathcal{F}^\bullet_{|F_y}) = Rf_!(\mathcal{F}^\bullet)_y$, c'est-à-dire en prenant la cohomologie $\mathbb{H}^m_c(F_y, \mathcal{F}^\bullet) = (\mathbb{R}^m f_!(\mathcal{F}^\bullet))_y$ pour tout complexe de faisceaux $\mathcal{F}^\bullet \in D(A_X)$.

L'application d'adjonction et le triangle d'adjonction.
Soit Z un fermé de l'espace topologique X et $j : Z \to X$ son inclusion.
Posons $\mathcal{U} = X \backslash Z$ et $i : \mathcal{U} \to X$ l'inclusion de l'ouvert $\mathcal{U}$ dans X.
Si $\mathcal{F}^\bullet \in D^+(A_X)$ alors le morphisme

$$\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow Ri_* i^{-1}\mathcal{F}^\bullet$$

qui correspond à l'identité dans $Hom_{D^+(A_\mathcal{U})}(i^{-1}\mathcal{F}^\bullet, i^{-1}\mathcal{F}^\bullet)$ via l'adjonction (iv) est appelé application d'attachement ou d'adjonction.
Remarquons que pour un faisceau $\mathcal{F} \in mod(A_Z)$, le faisceau $j_!\mathcal{F} = j_*\mathcal{F}$ n'est rien d'autre que l'extension par 0 sur $\mathcal{U}$ pour obtenir un faisceau sur X. Quand Z est un fermé de X, le faisceau

$\Gamma_Z(\mathcal{F})$ définit dans 2.6 a le support contenu dans Z, donc il peut être regardé comme un faisceau sur Z. Pour plus de précision, on note le foncteur obtenu $\gamma_Z : mod(A_X) \to mod(A_Z)$, c'est-à-dire $\gamma_Z = j^{-1} \circ \Gamma_Z$.
On a une formule d'adjonction immédiate

$$Hom(\mathcal{A}, \gamma_Z(\mathcal{B})) = Hom(j_!\mathcal{A}, \mathcal{B}),$$

pour tout $\mathcal{A} \in mod(A_Z)$, $\mathcal{B} \in mod(A_X)$.
Pour $\mathcal{F}^\bullet \in D^+(A_X)$, on pose

$$j^!\mathcal{F}^\bullet = R\gamma_Z\mathcal{F}^\bullet = j^{-1}R\Gamma_Z(\mathcal{F}^\bullet).$$

Définition 2.8 *On définit les groupes d'hypercohomologie de $\mathcal{F}^\bullet$ à support dans le fermé Z par*

$$\mathbb{H}^\bullet_Z(X, \mathcal{F}^\bullet) = \mathbb{H}^\bullet(X, j_!j^!\mathcal{F}^\bullet) = \mathbb{H}^\bullet(Z, j^!\mathcal{F}^\bullet).$$

Si $\Gamma_Z(X, -)$ est le foncteur décrit dans la remarque 2.3 alors on a

$$\mathbb{H}^m_Z(X, \mathcal{F}^\bullet) = H^m(R\Gamma_Z(X, \mathcal{F}^\bullet))$$

car on a un isomorphisme $R\Gamma_Z(X, -) = R\Gamma \circ R\gamma_Z$.

Soit $\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ une résolution injective du complexe $\mathcal{F}^\bullet$. Alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow j_!\gamma_Z I^\bullet \longrightarrow I^\bullet \longrightarrow i_*i^{-1}I^\bullet \longrightarrow 0$$

dans $C^*(mod(A_X))$, voir [B1], p. 50-51. En effet $j_!\gamma_Z I^\bullet = \Gamma_Z(I^\bullet) = R\Gamma_Z(\mathcal{F}^\bullet)$.
Toute suite exacte

$$0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0$$

dans $C^*(\mathcal{C})$ donne un triangle distingué dans $D^*(\mathcal{C})$

$$\begin{tikzcd} A^\bullet \arrow[rr] & & B^\bullet \arrow[dl] \\ & C^\bullet \arrow[ul, "{[+1]}"] & \end{tikzcd}$$

(cf. Proposition 1.2).

Dans cette situation on obtient le triangle distingué d'attachement

(TA)
$$\begin{tikzcd} j_!j^!\mathcal{F}^\bullet \arrow[rr] & & \mathcal{F}^\bullet \arrow[dl] \\ & Ri_*i^{-1}\mathcal{F}^\bullet \arrow[ul, "{[+1]}"] & \end{tikzcd}$$

Ce triangle est aussi appelé triangle de cohomologie locale à support, voir [MeNM], p. 85, car $j_! j^! \mathcal{F}^\bullet = R\Gamma_Z(\mathcal{F}^\bullet)$.

Corollaire 2.2 *On a $j^! Ri_* \mathcal{G}^\bullet = 0$ pour tout $\mathcal{G}^\bullet \in D^+(A_{\mathcal{U}})$.*

Preuve. On pose $\mathcal{F}^\bullet = Ri_*\mathcal{G}^\bullet \in D^+(A_X)$. Alors l'égalité évidente $i^{-1} \circ i_* = 1_{mod(A_X)}$ implique $i^{-1} \circ Ri_* = 1_{D^+(A_{\mathcal{U}})}$. Donc dans le triangle d'attachement associé le morphisme d'attachement $\mathcal{F}^\bullet \to Ri_* i^{-1}\mathcal{F}^\bullet$ devient l'identité du complexe $\mathcal{F}^\bullet$. Cela implique que le troisième sommet du triangle est trivial. $\square$

En passant aux groupes d'hypercohomologie, le triangle distingué (TA) nous donne la suite exacte longue suivante

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{H}^k_Z(X, \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^k(X, \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^{k+1}_Z(X, \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Remarque 2.4 Avec les notations utilisées avant, il y a une suite exacte sur X

$$0 \longrightarrow i_! i^{-1}\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet_Z \longrightarrow 0.$$

On définit les groupes d'hypercohomologie relative par

$$\mathbb{H}^k(X, Z; \mathcal{F}^\bullet) = \mathbb{H}^k(X, i_! i^{-1}\mathcal{F}^\bullet)$$

et on obtient la suite exacte longue pour l'hypercohomologie relative

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{H}^k(X, Z; \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^k(X, \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^k(Z, \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^{k+1}(X, Z; \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

En topologie algébrique la notion d'homotopie entre les applications joue un rôle très important. Dans la théorie des faisceaux on a la situation suivante.
Soit S un espace topologique fixé et considérons les espaces topologiques sur S, c'est-à-dire les couples (X, p_X) où X est un espace topologique et $p_X : X \longrightarrow S$ une application continue.
Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme sur S: cela veut dire que X et Y sont des espaces topologiques sur S et $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue telle que $p_Y \circ f = p_X$.
Pour tout complexe $\mathcal{F}^\bullet \in D^+(Ab)$ le morphisme d'adjonction $1 \longrightarrow Rf_* \circ f^{-1}$ induit un morphisme

$$f^\# : Rp_{Y*} \circ p_Y^{-1} \longrightarrow Rp_{X*} \circ p_X^{-1}.$$

Si $f, g : X \longrightarrow Y$ sont deux morphismes sur S on peut définir de manière évidente la notion d'homotopie sur S entre f et g et la notion d'équivalence homotopique sur S.
On a le résultat suivant

Proposition 2.4 ([KS], (2.7.5) et (2.7.7))
(i) Si les S-morphismes f et g sont homotopes alors $f^\# = g^\#$.

(ii) Si $f : X \longrightarrow Y$ est une équivalence homotopique sur S, alors $f^{\#}$ est un isomorphisme.

La situation discutée en topologie algébrique correspond au cas $S = \{pt\}$ de cette proposition. On va donner une application dans un cas $S \neq \{pt\}$ dans le chapitre 3, voir la proposition 3.10.

Chapitre 3

Dualité de Poincaré-Verdier et faisceaux constructibles

3.1 La dualité dans la catégorie dérivée $D^b(A_X)$

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue entre deux espaces topologiques, $\mathcal{F}^\bullet$ et $\mathcal{G}^\bullet$ des complexes de faisceaux sur X et Y respectivement. On va discuter les deux buts suivants.

But 1 : Dualité de Verdier :
Montrer l'existence d'un foncteur $f^! : D^+(A_Y) \longrightarrow D^+(A_X)$ tel que

$$R\mathcal{H}om^\bullet(Rf_!\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) = Rf_* R\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, f^!\mathcal{G}^\bullet).$$

et en particulier

$$Hom_{D^+(Y)}(Rf_!\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) = Hom_{D^+(X)}(\mathcal{F}^\bullet, f^!\mathcal{G}^\bullet)$$

But 2 : Définition du complexe dual de Verdier :

$$D\mathcal{F}^\bullet = R\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \omega_X) \in D^b(A_X) \text{ pour tout } \mathcal{F}^\bullet \in D^b(A_X)$$

à l'aide du complexe dualisant $\omega_X \in D^b(A_X)$.

Pour commencer, nous rappelons un résultat classique.

Théorème 3.1 (Dualité de Poincaré) *Soit X une variété C^0 orientable, de dimension n. Alors $H^j(X)^\vee = H_c^{n-j}(X)$ pour tout j.*

Dans notre contexte, variété C^0 signifie variété topologique, par exemple une variété algébrique lisse. Les groupes de cohomologie sont à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et $\vee$ dénote le dual d'un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

Remarque 3.1 La dualité de Poincaré est un cas particulier de la dualité de Verdier.

Soit X une variété C^0 orientable, de dimension n. Soit $Y = \{pt\}$, $\mathcal{F}^\bullet = \mathbb{Q}_X$, $\mathcal{G}^\bullet = \mathbb{Q}_{\{pt\}}$, $f : X \longrightarrow Y$. Nous allons voir qu'on a $f^!\mathcal{G}^\bullet = \mathbb{Q}_X[n]$.
On a alors

$$Hom_{D^+(Y)}(R\Gamma_c(X, \mathbb{Q}_X), \mathbb{Q}_{\{pt\}}) = Hom_{D^+(X)}(\mathbb{Q}_X, \mathbb{Q}_X[n]).$$

Ici, on a

$$D^+(Y) = D^+(\mathbb{Q}_{\{pt\}})$$

et

$$Rf_!\mathcal{F}^\bullet = Ra_{X!}\mathcal{F}^\bullet = R\Gamma_c(X, \mathcal{F}^\bullet),$$

$$Hom_{D^+(X)}(\mathbb{Q}_X, \mathbb{Q}_X[n]) = Hom_{D^+(X)}(\mathbb{Q}_X, \mathbb{Q}_X)[n] = [I_X^\bullet, I_X^\bullet][n] = [\mathbb{Q}_X, I_X^\bullet][n] =$$
$$= \Gamma(X, I_X^\bullet)[n] = R\Gamma(X, \mathbb{Q}_X)[n],$$

où $\mathbb{Q}_X \to I_X^\bullet$ est une résolution injective.
Posons $E^\bullet = R\Gamma_c(X, \mathbb{Q}_X)$.
On a aussi les isomorphismes suivants

$$DE^\bullet = R\mathcal{H}om^\bullet(R\Gamma_c(X, \mathbb{Q}_X), \mathbb{Q}_{\{pt\}}) = Hom^\bullet(R\Gamma_c(X, \mathbb{Q}_X), \mathbb{Q}_{\{pt\}}),$$

d'où

$$H^j(DE^\bullet) = H^{-j}(E)^\vee = H_c^{-j}(X)^\vee$$

et

$$H^j(R\Gamma(X, \mathbb{Q}_X)[n]) = H^{j+n}(X, \mathbb{Q}_X).$$

$\square$

Si X n'est pas une variété C^0, en particulier pour X une variété algébrique singulière, le même raisonnement montre qu'on a un isomorphisme :

$$\mathcal{H}^{-j}(X, \omega_X) = H_c^j(X)^\vee.$$

Le groupe

$$\mathcal{H}^{-j}(X, \omega_X)$$

est appelé le j-ième groupe d'homologie à supports fermés (ou d'homologie de Borel-Moore) de l'espace X, voir [B1], p. 120.

Dans la suite, on va supposer que les conditions suivantes sont remplies :

1. A anneau commutatif tel que $\exists n \in \mathbb{N}, \forall M$ A-module, il existe une résolution injective de la forme $0 \longrightarrow M \longrightarrow I^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^n \longrightarrow 0$ (donc de longueur n),
2. X espace localement compact, $X = \cup_n X_n$, X_n compact.

Définition 3.1 *Le foncteur $f_! : mod(\mathbb{Z}_X) \longrightarrow mod(\mathbb{Z}_Y)$ a une dimension cohomologique finie si il existe $r \geq 0$ tel que $R^j f_! \mathcal{M} = 0$ $\forall j > r$, $\forall \mathcal{M}$ un $\mathbb{Z}_X$-module.*

Notation. $dim(f_!) < +\infty$.

Remarque 3.2 Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application régulière entre deux variétés algébriques X, Y sur $\mathbb{C}$, $F_y = f^{-1}(y)$. On a $\dim F_y \leq \dim X$, $R^j f_!(\mathcal{M})_y = H^j_c(F_y, \mathcal{M}) = 0$ pour $j > 2m$, où $m = dim_{\mathbb{C}} X$, voir [B1], p. 55. Donc toute application régulière f a un foncteur $f_!$ de dimension cohomologique finie.

Théorème 3.2 ([B1], p. 130-131, [KS], p. 146) *Soit $f : X \to Y$. Si $f_!$ a une dimension cohomologique finie alors il existe un foncteur additif $f^! : D^+(Y) \to D^+(X)$ adjoint au foncteur $Rf_!$ c'est-à-dire tel qu'on ait un isomorphisme fonctoriel*

$$R\mathcal{H}om^\bullet(Rf_!\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) \simeq Rf_* R\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, f^!\mathcal{G}^\bullet)$$

où $R\mathcal{H}om^\bullet : D^b(Z)^\circ \times D^+(Z) \to D^+(Ab)$, pour $Z = X$ ou $Z = Y$.

Donc le but 1 est accompli.

On a en outre les propriétés suivantes

Proposition 3.1 ([KS], (3.1.8)-(3.1.10))

(i) Si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ alors $(g \circ f)^! = f^! \circ g^!$,

(ii) si on a le diagramme cartésien suivant

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & Y' \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

alors $dim(f_!) < +\infty$ implique $dim(f'_!) < +\infty$ et dans ce cas, on a $f^! \circ Rg_* = Rg'_* \circ f'^!$.

Proposition 3.2 ([KS] (3.1.12)) *Soit $j : Z \to X$ l'inclusion d'une partie localement fermée Z de X.*
Alors

$$j^!(\mathcal{F}^\bullet) = j^{-1}R\Gamma_Z(\mathcal{F}^\bullet).$$

Cela montre la compatibilité entre la définition de $j^!$ que nous avons donnée à la fin du chapitre 2 avec la définition générale de $f^!$.

Le complexe dualisant
Soit $f : X \to Y$ avec $\dim(f_!) < +\infty$, on pose $\omega_{X/Y} = f^! A_Y \in D^+(X)$. Si $Y = pt$, $\omega_{X/pt} = \omega_X$ est le complexe dualisant de l'espace X.

Définition 3.2 (Complexe dual) *On pose $D_X\mathcal{F}^\bullet = R\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \omega_X)$ = le dual de $\mathcal{F}^\bullet$ pour tout $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(A_X)$.*
En particulier on a $D_X(A_X) \simeq \omega_X$. On écrit aussi $D\mathcal{F}^\bullet$ pour $D_X(\mathcal{F}^\bullet)$.

Exemple 3.1 Si X est un point, alors un élément $K^\bullet$ de $D^b(X)$ est un complexe borné de A-modules

$$K^\bullet : 0 \longrightarrow K^{-n} \xrightarrow{d^{-n}} K^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow K^0 \xrightarrow{d^0} \cdots \xrightarrow{d^n} K^n \longrightarrow 0.$$

Le complexe dual $DK^\bullet$ n'est rien d'autre que le complexe

$$DK^\bullet : 0 \longrightarrow (K^n)^\vee \xrightarrow{(d^n)^\vee} (K^{n-1})^\vee \longrightarrow \cdots \longrightarrow (K^0)^\vee \xrightarrow{(d^0)^\vee} \cdots \xrightarrow{(d^{-n})^\vee} (K^{-n})^\vee \longrightarrow 0$$

où $(K^l)^\vee = Hom_A(K^l, A)$.
Si A est un corps, on a évidemment $H^l(DK) = H^{-l}(K)^\vee$ pour tout l.

Si on prend $Y = \{pt\}$ dans le théorème 3.2, on obtient

Proposition 3.3 (Théorème de dualité absolue de Poincaré Verdier) *Soit X un espace vérifiant la condition 2 tel que le foncteur $f : X \to pt$ soit de dimension cohomologique finie. Alors, il existe un isomorphisme naturel*

$$R\Gamma(X, D\mathcal{F}^\bullet) \simeq D(R\Gamma_c(X, \mathcal{F}^\bullet))$$

pour $\mathcal{F}^\bullet$ dans $D^b(A_X)$. En particulier $\mathbb{H}^m(X, D\mathcal{F}^\bullet)^\vee = \mathbb{H}_c^{-m}(X, \mathcal{F}^\bullet)$.

Proposition 3.4 ([KS], (3.3.2)) *Soit X une variété C^0 de dimension n.*
Alors $\mathcal{H}^k(\omega_X) = 0$ pour tout $k \neq -n$ et $\mathcal{H}^{-n}(\omega_X)$ est un A_X-module localement libre de rang 1.

Le faisceau $\mathcal{O}r_X \stackrel{\text{def}}{:=} \mathcal{H}^{-n}(\omega_X)$ coïncide avec le faisceau d'orientation de la variété X.

Proposition 3.5 ([KS], (3.3.6))

(i) $\mathcal{O}r_{X,x} \xrightarrow{\sim} H^n_{\{x\}}(X, A)$ $(\forall x \in X)$,

(ii) X *orientable* $\Leftrightarrow \mathcal{O}r_X \simeq A_X$.

La proposition 3.3 peut alors être reformulée comme suit via notre discussion en remarque 2.1.

Proposition 3.6 *Soit X une variété C^0 connexe vérifiant la condition 2, de dimension n. On suppose que A est un corps. Alors, il existe un isomorphisme naturel*

$$R\Gamma(X, R\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{O}r_X[n])) \simeq RHom^\bullet(R\Gamma_c(X, \mathcal{F}^\bullet), A)$$

qui nous donnent des isomorphismes naturels

$$Ext^{n-p}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{O}r_X) \simeq Hom(H^p_c(X, \mathcal{F}^\bullet), A), \quad p = 0 \cdots n$$

pour $\mathcal{F}^\bullet$ dans $D^b(A_X)$.

Si X est une variété C^0 de dimension n, alors $\omega_X = \mathcal{O}r_X[n]$; si X est orientable alors $\omega_X = A_X[n]$.
Pour voir cela, on utilise le fait évident qu'on peut remplacer dans la catégorie dérivée un complexe qui a un seul groupe de cohomologie non trivial par ce groupe de cohomologie.
Le fait que $R\mathcal{H}om^\bullet$ est un bi-δ-foncteur donne la propriété suivante

Exercice 3.1 Si

$$A^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow C^\bullet \xrightarrow{+1}$$

est un triangle distingué dans $D^b(X)$, alors le triangle

$$DC^\bullet \longrightarrow DB^\bullet \longrightarrow DA^\bullet \xrightarrow{+1}$$

obtenu par dualité est encore distingué.

3.2 Complexes de faisceaux cohomologiquement constructibles

Maintenant pour tout espace topologique X «assez bon» on veut définir la catégorie dérivée $D^b_c(X)$ des complexes bornés de A_X-modules qui sont cohomologiquement constructibles par rapport à une stratification.

Définition 3.3 *X est une pseudo-variété stratifiée de dimension n si X admet une filtration $\mathcal{X} : X = X_n \supset X_{n-1} = X_{n-2} \supset X_{n-3} \supset \cdots X_0 \supset X_{-1} = \phi$ avec X_i fermé tel que*

(a) $S_i = X_i \backslash X_{i-1}$ est une variété C^0 de dimension i ou $S_i = \phi$. S_i s'appelle la strate de dimension i de X

(b) S_n est dense dans X.

(c) L'espace X admet une structure locale de produit le long de chaque strate.

Toute variété algébrique (ou analytique) complexe admet une telle stratification, conformément à la théorie de Thom-Whitney-Mather-Verdier, voir par exemple [V1] ou [T]. Dans ce cas, on va toujours supposer que les strates sont des ensembles semi-algébriques (ou semi-analytiques).

Définition 3.4 *Soit $\mathcal{C}^\bullet \in D^b(X)$. $\mathcal{C}^\bullet$ est $\mathcal{X}$-cohomologiquement localement constant si et seulement si $\mathcal{H}^k(\mathcal{C}^\bullet)$ est localement constant sur S_i, $\forall i$ et $\forall k$.*
$\mathcal{C}^\bullet$ est $\mathcal{X}$-cohomologiquement constructible si et seulement si $\mathcal{C}^\bullet$ est cohomologiquement localement constant et $\mathcal{H}^k(\mathcal{C}^\bullet)_x$ est un A-module de type fini, $\forall x \in X$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

La filtration $\mathcal{X}$ et la stratification $\mathcal{S} = (S_i)_{i \in [0,n]}$ se déterminent réciproquement. Pour cela, on parle aussi des complexes qui sont $\mathcal{S}$-cohomologiquement constructibles.

Exemple 3.2 Soit $f : X^n \longrightarrow Y^m$ une application régulière entre deux variétés algébriques complexes. Alors, il existe une stratification $\mathcal{Y} : Y = Y_{2m} \supset Y_{2m-2} \supset Y_{2m-4} \supset \cdots \supset Y_4 \supset Y_2 \supset Y_0$, Y_i sous-variétés de Y telles que pour tout k, $R^k f_*(\mathbb{C}_X)_{|S^i}$ soit localement constant et de rang fini. Donc $Rf_*(\mathbb{C}_X)$ est $\mathcal{Y}$-cohomologiquement constructible.

Remarque 3.3 La notion de complexe de faisceaux cohomologiquement constructible donnée ici coïncide avec celle dans [B1]. Dans [KS] le lecteur intéressé trouvera une notion plus abstraite et plus générale.

On dit que $C^\bullet$ est cohomologiquement constructible si l'espace X admet une structure de pseudo-variété donnée par une filtration $\mathcal{X}$ telle que $C^\bullet$ soit $\mathcal{X}$-cohomologiquement constructible. On dit qu'un faisceau $\mathcal{F}$ est constructile si le complexe $0 \longrightarrow \underset{\bullet}{\mathcal{F}} \longrightarrow 0$ est constructible, voir aussi [MeNM]. On dénote par $D^b_c(A_X)$ ou $D^b_c(X)$ si l'anneau A est fixé, la sous catégorie pleine de $D^b(A_X)$ dont les objets sont les complexes cohomologiquement constructibles.

Proposition 3.7 ([B1], p. 134-142 et p. 162, [KS], p. 148-160)
Soit X une pseudo-variété. Alors

(i) *le faisceau dualisant ω_X est cohomologiquement constructible.*

(ii) *Si $\mathcal{A}^\bullet$, $\mathcal{B}^\bullet \in D^b_c(X)$ alors $R\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{A}^\bullet, \mathcal{B}^\bullet) \in D^b_c(X)$ (constructibilité de hyperhom).*

(iii) *Si $\mathcal{F}^\bullet \in D^b_c(X)$ alors $D\mathcal{F}^\bullet \in D^b_c(X)$ et le morphisme naturel $\mathcal{F}^\bullet \to DD\mathcal{F}^\bullet$ est un isomorphisme.*

(iv) *$(D\mathcal{F}^\bullet)_x = RHom(R\Gamma_{\{x\}}(X, \mathcal{F}^\bullet), A)$.*

(v) *Formules utiles: $f^!(D\mathcal{F}^\bullet) = D(f^{-1}\mathcal{F}^\bullet)$, $D(Rf_!\mathcal{F}^\bullet) = Rf_*(D\mathcal{F}^\bullet)$, $D(\omega_X) = A_X$, $D(A_X) = \omega_X$.*

Soit X une variété C^0 orientable, si $dimX = 2m$ alors $D(A_X[m]) = A_X[m]$.

Remarque 3.4 Pour tout $\mathcal{F}^\bullet \in C^b(mod(A_X))$, on peut représenter le dual $D\mathcal{F}^\bullet$ par un complexe explicite $K^\bullet$ dans $C^b(mod(A_X))$ tel qu'on ait un isomorphisme naturel dans $C^b(mod(A_X))$

$$K^\bullet \simeq \mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \omega_X)$$

voir [B1], p. 125.
Si $\omega_X = A_X[n]$ et $\mathcal{F}^\bullet$ se réduit à un faisceau en degré 0, alors le complexe $\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \omega_X)$ se réduit à un seul faisceau en degré $-n$.
Donc on peut écrire dans cette situation

$$D\mathcal{F} = \check{\mathcal{F}}[n]$$

où $\check{\mathcal{F}} = Hom(\mathcal{F}, A_X)$.
En utilisant la proposition 3.7(v), on obtient

$$H_c^{-k}(X, \mathcal{F})^\vee = H^k(X, \check{\mathcal{F}}[n]).$$

D'où

$$H_c^j(X, \mathcal{F})^\vee = H^{n-j}(X, \check{\mathcal{F}}).$$

Corollaire 3.1 *(i) Si X est une variété réelle orienté de dimension n, $\mathcal{G}$ un faisceau constructible sur X alors*

$$H^k(X, \mathcal{G}) = 0$$

pour tout $k > n$.

(ii) Si X est une variété analytique complexe de dimension n et $\mathcal{G}$ un faisceau constructible sur X alors $H^k(X, \mathcal{G}) = 0$ pour tout $k > 2n$.

Preuve.

(i) On utilise le résultat précédent pour $\mathcal{F} = \check{\mathcal{G}}$, car alors $\check{\mathcal{F}} = \check{\check{\mathcal{G}}} = \mathcal{G}$ par la proposition 3.7(iii).

(ii) Si X est lisse, il n'y a rien à démontrer en vue de (i).
Si X est singulière, soit $j : \mathcal{U} \subset X$ un ouvert lisse tel que $\dim(X \backslash \mathcal{U}) < n$ et $\mathcal{G}_{|\mathcal{U}}$ soit un système local V. Alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow j_! V \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

où α est le morphisme évident et $K = \text{Coker } \alpha$ donne le résultat par récurrence sur n.

□

Exemple 3.3 Cet exemple montre que pour une variété X contractile on peut avoir $H^k(X, \mathcal{G}) \neq 0$ pour $k > 0$. Si $\mathcal{G}$ est un système local, ce fait est bien sûr impossible, voir [MeNM], p. 62.
Soit $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, $S = \mathbb{C}$ et $f : X \to \mathbb{C}$ la projection $f(x, y) = x$.
Alors pour tout disque $D \subset S$ assez petit, l'image réciproque $f^{-1}(D)$ est une réunion de sous ensembles ouverts dans X qui sont contractiles, donc $R^i f_*(\mathbb{C}_X) = 0$ pour tout $i > 0$.
La suite spectrale de Leray donne alors

$$E_2^{p,q} = H^p(S, R^q f_*(\mathbb{C}_X)) \Rightarrow H^{p+q}(X)$$

en particulier $\mathbb{C} = H^1(X) = H^1(S, R^0 f_*(\mathbb{C}_X))$.

Discussion intuitive sur la définition du dual $D\mathcal{F}^\bullet$
On veut définir le dual $\mathcal{F}^\vee$ de $\mathcal{F} \in mod(A_X)$.
Pour $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ on dispose du morphisme de restriction

$$\rho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} : \Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \to \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

qui nous donne

$$(\rho_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}})^\vee : \Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{F})^\vee \leftarrow \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{F})^\vee$$

donc $\Gamma(\mathcal{U},\mathcal{F}^\vee) = \Gamma(\mathcal{U},\mathcal{F})^\vee$ est une mauvaise définition car on n'obtient pas un faisceau. Par contre, si on travaille avec des sections à support compact, on construit $\Gamma_c(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{e_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}} \Gamma_c(\mathcal{V},\mathcal{F})$, où $e_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ prolonge les sections par 0 sur $\mathcal{V}\backslash\mathcal{U}$.
Ce qui implique que l'on a l'application «de restriction»

$$\Gamma_c(\mathcal{U},\mathcal{F})^\vee \xleftarrow{(e_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}})^\vee} \Gamma_c(\mathcal{U},\mathcal{F})^\vee.$$

Donc on peut poser

«**Définition 3.4**» $\Gamma(\mathcal{U},\mathcal{F}^\vee) = \Gamma_c(\mathcal{U},\mathcal{F})^\vee$.

Plus correctement, on a le résultat suivant

Proposition 3.8 ([KS], 3.4.1) *Pour tout $\mathcal{U} \subset X$ connexe, on a*

$$R\Gamma(\mathcal{U}, D_X\mathcal{F}^\bullet) = RHom(R\Gamma_c(\mathcal{U},\mathcal{F}^\bullet), A).$$

Soit X une variété C^0. Le fait que l'on a

$$H_c^k(B,\mathbb{Q}) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq n \\ \mathbb{Q} \text{ si } k = n \end{cases}$$

où B est la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$ ainsi que $\mathcal{H}^k(\omega_X)$ est le faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{U} \longrightarrow H_c^{-k}(\mathcal{U},\mathbb{Q})$ (qui découle de la proposition précédente en utilisant que $D_X(A_X) = \omega_X$) permettent de montrer que

$$\mathcal{H}^k(\omega_X) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq -n \\ \mathcal{O}r_X \text{ si } k = -n, \text{ c'est un } A_X\text{-module libre de rang 1.} \end{cases}$$

comme déjà vu dans la Proposition 3.4.

3.3 Les cycles proches et les cycles évanescents

Soit X une variété algébrique (ou analytique) complexe, $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction régulière (ou holomorphe) non constante.
Pour tout $t \in \mathbb{C}$ on veut construire deux foncteurs

$$\mathcal{F}^\bullet \in D_c^b(X) \longmapsto \psi_{f-t}, \varphi_{f-t}(\mathcal{F}^\bullet) \in D_c^b(F_t),$$

où $F_t = f^{-1}(t)$ est supposé non vide. On peut supposer que $t = 0$ ce que l'on va faire dans la suite.
On a alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} F_0 \arrow[r, hook, "j"] & X & T(F_0)\backslash F_0 \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[l, "\hat{\pi}"'] \arrow[d] \\ & & D_\epsilon^* & \tilde{D}_\epsilon^* \arrow[l, "\text{rev. univ.}"'] \end{tikzcd}$$

où ϵ a été choisi assez petit pour que $f : T(F_0)\backslash F_0 \longrightarrow D_\epsilon^*$ soit une fibration topologique localement triviale (dans le cas analytique cela est possible par exemple si f est propre). Ici, $T(F_0) = f^{-1}(D_\epsilon)$ est le tube de la fibre F_0 et on regarde E comme la fibre générale «universelle» de la fibration $f : T(F_0)\backslash F_0 \longrightarrow D_\epsilon^*$ (le carré à droite étant cartésien). On peut aussi toujours remplacer X par $T(F_0)$.

On note $\psi_f \mathcal{F}^\bullet$ (les cycles proches du complexe $\mathcal{F}^\bullet$ relatif à la fonction f) le complexe définit par $\psi_f \mathcal{F}^\bullet = j^{-1}(R(i \circ \hat{\pi})_*(i \circ \hat{\pi})^{-1})(\mathcal{F}^\bullet))$.
En effet, l'application $i \circ \hat{\pi}$ est un modèle canonique (c'est-à-dire indépendant d'un choix de point base) pour l'inclusion d'une fibre F_t dans $T(F_0)\backslash F_0$ pour $0 < t < \delta$. En outre, nous avons un homéomorphisme de monodromie $h : E \longrightarrow E$ qui provient de l'action de $\mathbb{Z}$ sur le demi-plan complexe $\tilde{D}_\epsilon^*$ et qui satisfait $\hat{\pi} \circ h = \hat{\pi}$.
Cet homéomorphisme induit un morphisme de complexes

$$\mu : \psi_f \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \psi_f \mathcal{F}^\bullet.$$

Le résultat suivant justifie le nom du foncteur ψ_f : la fibre de $\mathcal{H}^k(\psi_f \mathcal{F}^\bullet)$ en un point $x \in F_0$ est donnée par l'hypercohomologie d'une fibre de Milnor locale en x à coefficients dans le complexe $\mathcal{F}^\bullet$. En outre, le morphisme induit $\mu_x : \mathcal{H}^k(\psi_f \mathcal{F}^\bullet)_x \longrightarrow \mathcal{H}^k(\psi_f \mathcal{F}^\bullet)_x$ correspond à l'opérateur de monodromie au point x. Soit $B_\delta^\circ(x)$ une boule ouverte de rayon δ dans X, définie par exemple en utilisant un plongement d'un voisinage de x dans un espace affine.

Un calcul direct utilisant la définition du complexe $\psi_f \mathcal{F}^\bullet$ donne le résultat suivant.

Proposition 3.9 $\forall x \in F_0$,

$$\mathcal{H}^k(\psi_f \mathcal{F}^\bullet)_x = \mathbb{H}^k(B_\delta^\circ(x) \cap F_t, \mathcal{F}^\bullet),\ 0 < t \ll \delta.$$

Exemple 3.4 (i) Soit $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ un polynôme complexe. Alors, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ on a

$$\mathcal{H}^k(\psi_f A_{\mathbb{C}^n})_x = H^k(F_x, A)$$

où F_x est la fibre locale de Milnor au point x, c'est-à-dire $F_x = B_\delta^\circ(x) \cap f^{-1}(t)$ pour $|f(x) - t| < \epsilon$, $t \neq f(x)$.
Dans cet exemple les fibres locales sont lisses.

(ii) Soit $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ un polynôme complexe. On considère une compactification de f obtenue de la façon suivante :
Soit $X \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}$ la clôture du graphe Γ_f dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ et soit $\hat{f} : X \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application induite par la projection sur le facteur $\mathbb{C}$.
Alors les fibres de $\hat{f}$ sont les clôtures projectives $\overline{F_t}$ des fibres de f. On suppose que toutes ces fibres $\overline{F_t}$ ont au plus des singularités isolées.
On fixe un point $a \in \overline{F_t} \cap H_\infty$, où $H_\infty = \mathbb{P}^n \backslash \mathbb{C}^n$ est l'hyperplan à l'infini. On définit deux nombres de Milnor à partir de a

$$\mu(a)_{gen} = \min_{t \in \mathbb{C}} \mu(\overline{F_t}, a)$$

et

$$\mu(a)_t = \mu(\overline{F_t}, a).$$

Alors en utilisant la topologie des fibres singulières dans la déformation d'une singularité isolée d'hypersurface, voir [L], p. 121 on obtient l'égalité

$$\dim \mathcal{H}^{n-1}(\psi_{\hat{f}-t}\mathbb{C}_X)_a = \mu(a)_t - \mu(a)_{gen},$$
$$\mathcal{H}^0(\psi_{\hat{f}-t}\mathbb{C}_X)_a = \mathbb{C},$$

et

$$\mathcal{H}^k(\psi_{\hat{f}-t}\mathbb{C}_X)_a = 0 \text{ si } k \neq 0, n-1.$$

Dans cet exemple, la fibre de Milnor locale au point a est en général singulière.

Il existe une application d'adjonction

$$\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow R(i \circ \hat{\pi})_*(i \circ \hat{\pi})^{-1}(\mathcal{F}^\bullet),$$

qui donne en appliquant le foncteur j^{-1} un morphisme de comparaison $c : \mathcal{F}^\bullet_{|F_0} = j^{-1}\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \psi_f\mathcal{F}^\bullet$.

On remarque que $\mathcal{H}^k(\mathcal{F}^\bullet_{|F_0})_x = \mathbb{H}^k(B_\delta(x) \cap F_0, \mathcal{F}^\bullet)$, F_0 étant la fibre spéciale.

Dans $D_c^b(F_0)$ on définit $\varphi_f(\mathcal{F}^\bullet)$, les cycles évanescents du complexe $\mathcal{F}^\bullet$, et le morphisme canonique can : $\psi_f(\mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \varphi_f(\mathcal{F}^\bullet)$ par le triangle distingué

$$j^{-1}\mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{c} \psi_f(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\text{can}} \varphi_f(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{[+1]} j^{-1}\mathcal{F}^\bullet[+1]$$

cela nous donne en appliquant le δ-foncteur $\mathcal{H}^0(\ )_x$ la suite exacte

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{H}^k(B^\circ_\delta(x) \cap F_0, \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^k(B^\circ_\delta(x) \cap F_t, \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow$$
$$\mathcal{H}^k(\varphi_f(\mathcal{F}^\bullet))_x \longrightarrow \mathbb{H}^{k+1}(B^\circ_\delta(x) \cap F_0, \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

On sait que

$$\mathbb{H}^k(B^\circ_\delta(x) \cap F_0, \mathcal{F}^\bullet) = \mathcal{H}^k(\mathcal{F}^\bullet_{|F_0})_x = \mathcal{H}^k(\mathcal{F}^\bullet)_x = \mathbb{H}^k(B^\circ_\delta(x), \mathcal{F}^\bullet)$$

(voir par exemple le lemme 4.2).
En utilisant la suite exacte longue de cohomologie relative (remarque 2.4) pour $X = B^\circ_\delta(x)$ et $Z = F_t \cap B^\circ_\delta(x)$ on obtient un isomorphisme

$$\mathcal{H}^k(\varphi_f(\mathcal{F}^\bullet))_x = \mathbb{H}^{k+1}(B^\circ_\delta(x), B^\circ_\delta(x) \cap F_t; \mathcal{F}^\bullet)).$$

Les cycles proches $\psi_f\mathcal{F}^\bullet$ et les cycles évanescents $\varphi_f\mathcal{F}^\bullet$ ont été introduits par Deligne [De]. Noter que ses définitions sont différentes mais équivalentes à celles présentées ici. Certains auteurs, par exemple [KS] ou [Ha2] utilisent une autre convention de décalage pour $\varphi_f\mathcal{F}^\bullet$: leur $\varphi_f\mathcal{F}^\bullet$ correspond à notre $\varphi_f\mathcal{F}^\bullet[-1]$.

On donne maintenant une autre description du faisceau $\varphi_f(\mathcal{F}^\bullet)$ des cycles évanescents, (voir [KS], p. 357, exercice VIII.13). On reprend les notations du début de 3.3. On peut supposer que $X = T(F_0)$.
Soit Z le fermé dans le tube $T(F_0)$ donné par $Z = \{x \in T(F_0) \ : \ \mathrm{Re}\, f(x) \geq 0\}$. Soit $i_1 : T(F_0)\backslash Z \longrightarrow T(F_0)$ l'inclusion. Alors le triangle (TA) d'adjonction nous donne

$$R\Gamma_Z(\mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow Ri_{1*}i_1^{-1}(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{+1}$$

L'espace $\hat{D} = D_\epsilon\backslash[0,\epsilon]$ est contractile, donc la restriction de f au dessus de $\hat{D}$ est une fibration triviale. Cela implique l'existence d'un plongement ouvert $g : T(F_0)\backslash Z \longrightarrow E$ (déterminé par un choix d'une section $\hat{D} \longrightarrow \tilde{D}^*_\epsilon$ du revêtement universel).
On a la situation suivante

$$\begin{tikzcd} T(F_0)\backslash Z \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "i_1"'] & & E \arrow[dl, "i\circ\hat{\pi}"] \\ & T(F_0) & \end{tikzcd}$$

et on voit facilement que g est une équivalence d'homotopie sur $T(F_0)$. Cela donne par la proposition 2.4 un isomorphisme

$$g^\# : R(i \circ \hat{\pi})_*(i \circ \hat{\pi})^{-1}(\mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow Ri_{1*}i_1^{-1}(\mathcal{F}^\bullet)$$

compatible avec les flèches d'adjonctions

$$\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow Ri_{1*}i_1^{-1}(\mathcal{F}^\bullet)$$

et

$$\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow R(i\circ\hat{\pi})_*(i\circ\hat{\pi})^{-1}(\mathcal{F}^\bullet).$$

Via l'isomorphisme $g^\#$, le triangle d'adjonction devient

$$R\Gamma_Z(\mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow R(i\circ\hat{\pi})_*(i\circ\hat{\pi})^{-1}(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{+1}$$

En prenant la restriction sur la fibre F_0 et en comparant avec le triangle de définition de $\varphi_f(\mathcal{F}^\bullet)$ on obtient le résultat suivant

Proposition 3.10 *Il existe un isomorphisme naturel*

$$\varphi_f(\mathcal{F}^\bullet) = j^{-1}R\Gamma_Z(\mathcal{F}^\bullet)[1]$$

où $Z = \{x \in T(F_0)\ ;\ \mathrm{Re}\ f(x) \geq 0\}$.

Exemple 3.5 Si $\mathcal{F}^\bullet = \mathbb{C}_X$, alors comme $B_\delta^\circ(x)\cap F_0$ est contractile, voir [M] et [BV], on obtient

$$\mathcal{H}^k(\varphi_f\mathbb{C}_X)_x = \tilde{H}^k(F_x)$$

la cohomologie réduite de la fibre de Milnor locale en x : $F_x = B_\delta^\circ(x)\cap F_t$.
Donc $\mathrm{supp}\mathcal{H}^k(\varphi_f\mathbb{C}_X) \subset F_{0,\mathrm{Sing}}$, la partie singulière de la fibre F_0.
Cette inclusion admet une généralisation.

Soit X une variété algébrique munie d'une stratification de Whitney $\mathcal{S} = (S_i)_{i\in I}$. Pour une fonction régulière $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, on définit l'ensemble des points singuliers de f comme étant

$$\mathrm{Sing}_{\mathcal{S}}(f) = \cup_{i\in I}\mathrm{Sing}(f_{|S_i}).$$

On a le résultat suivant

Proposition 3.11 ([GoM3], [KS], 8.4.1 et 8.6.12) *Pour un complexe $\mathcal{F}^\bullet \in D_c^b(A_X)$ qui est $\mathcal{S}$-cohomologiquement constructible, on a pour tout k*

$$\mathrm{supp}\mathcal{H}^k(\varphi_f\mathcal{F}^\bullet) \subset F_0 \cap \mathrm{Sing}_{\mathcal{S}}(f)$$

Proposition 3.12 ([Ma1]) *Les deux foncteurs*

$$\psi_f, \varphi_f : D^b_c(X) \longrightarrow D^b_c(F_0)$$

sont des δ-foncteurs tels qu'on a des isomorphismes non fonctoriels dans $D^b_c(F_0)$

$$D(\psi_f A^\bullet[-1]) \simeq \psi_f(DA^\bullet)[-1],$$

$$D(\varphi_f A^\bullet[-1]) \simeq \varphi_f(DA^\bullet)[-1],$$

pour tout complexe $A^\bullet \in D^b_c(X)$.

Pour un énoncé plus simple, on introduit les foncteurs ${}^p\psi_f = \psi_f[-1]$ (cycles proches pervers) et ${}^p\varphi_f = \varphi_f[-1]$ (cycles évanescents pervers). Avec cette notation, on a

$$D\,{}^p\psi_f = {}^p\psi_f D$$

et

$$D\,{}^p\varphi_f = {}^p\varphi_f D.$$

On a aussi une propriété de changement de base pour les morphismes propres :

Proposition 3.13 ([KS], p. 358, [Ma1], p. 21) *Soit $Y \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ tel que π est propre. Posons $g = f \circ \pi$.*
Alors pour tout complexe $A^\bullet \in D^b_c(Y)$, on a les isomorphismes fonctoriels suivants

$$R\hat{\pi}_*(\psi_g A^\bullet) = \psi_f(R\pi_* A^\bullet),$$

$$R\hat{\pi}_*(\varphi_g A^\bullet) = \varphi_f(R\pi_* A^\bullet)$$

où $\hat{\pi} : g^{-1}(0) \longrightarrow f^{-1}(0)$ est induit par π.

Il existe une transformation naturelle var : $\varphi_f\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \psi_f\mathcal{F}^\bullet$ qui est obtenue en complétant le diagramme

$$\begin{tikzcd} j^{-1}\mathcal{F}^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \psi_f\mathcal{F}^\bullet \arrow[d, "\mu - Id"] \\ 0 \arrow[r] & \psi_f\mathcal{F}^\bullet \end{tikzcd}$$

en un morphisme de triangles distingués

$$\begin{tikzcd}
j^{-1}\mathcal{F}^\bullet \arrow[r, "c"] \arrow[d] & \psi_f\mathcal{F}^\bullet \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[d, "\mu - Id"] & \varphi_f\mathcal{F}^\bullet \arrow[r, "{[+1]}"] \arrow[d, "\mathrm{var}"] & {} \\
0 \arrow[r] & \psi_f\mathcal{F}^\bullet \arrow[r, "Id"] & \psi_f\mathcal{F}^\bullet \arrow[r, "{[+1]}"] & {}
\end{tikzcd}$$

On a aussi can $\circ$ var $= \mu - Id$, où μ est ici la monodromie du complexe $\varphi_f\mathcal{F}^\bullet$.

Exercice 3.2 (i) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau constructible sur la courbe algébrique lisse S. Alors, $\mathcal{F}$ est un faisceau localement constant si et seulement si $\varphi_{t_s}(\mathcal{F}) = 0$ pour tout point $s \in S$, t_s étant une coordonnée locale en s telle que $t_s(s) = 0$.

(ii) Soit $\mathcal{F}^\bullet \in D_c^b(S)$, S une courbe algébrique lisse. Si $\varphi_{t_s}(\mathcal{F}^\bullet) = 0$ pour tout point $s \in S$, alors tous les faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^k(\mathcal{F}^\bullet)$ sont des systèmes locaux sur S.

Indication.

(i) Le morphisme de comparaison est dans ce cas un morphisme $c : \mathcal{F}_s \longrightarrow \mathcal{F}_{s'}$, avec s' proche de s et générique donné par la construction suivante.
Un élément $a_s \in \mathcal{F}_s$ est représenté par une section $a \in \mathcal{F}(D)$, D étant un petit disque autour de s. On peut supposer que $s' \in D^*$ et alors $c(a_s) = a_{s'}$, le germe de a au point s', qui est un élément invariant par l'opérateur de monodromie $T_s : \mathcal{F}_{s'} \longrightarrow \mathcal{F}_{s'}$.
On a donc un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(D) \arrow[rr, "\rho_s"] \arrow[dr, "\rho_{s'}"'] & & \mathcal{F}_s \arrow[dl, "c"] \\
& \mathcal{F}_{s'} &
\end{tikzcd}$$

qui montre que ρ_s est injectif, et donc un isomorphisme.
On voit donc que

$$c \text{ isomorphisme } \Leftrightarrow \rho_{s'} \text{ isomorphisme } \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est un système local.}$$

(ii) Dans la suite exacte longue associée au triangle

$$\mathcal{F}_s^\bullet \longrightarrow \psi_{t_s}(\mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \varphi_{t_s}(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{+1}$$

on a $H^k(\mathcal{F}_s^\bullet) = \mathcal{H}^k(\mathcal{F}^\bullet)_s$ et $H^k(\psi_{t_s}(\mathcal{F}^\bullet)) = \mathcal{H}^k(\mathcal{F}^\bullet)_{s'}$.

Exercice 3.3 Soit X une variété algébrique munie d'une stratification de Whitney S et $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction régulière et propre, telle que $\mathrm{Sing}_{\mathcal{S}}(f) = \phi$ par rapport à la stratification $\mathcal{S}$. Montrer que $R^k f_*(\mathbb{C}_X)$ est un système local sur $\mathbb{C}$ pour tout k.

Indication. Utiliser l'exercice précédent et les propositions 3.11 et 3.13.

Exercice 3.4 Pour un complexe $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(X)$, on pose

$$\chi(X, \mathcal{F}^\bullet) = \sum (-1)^k \dim \mathbb{H}^k(X, \mathcal{F}^\bullet)$$

(tous les complexes considérés ici, sont supposés tels que $\mathbb{H}^k(X, \mathcal{F}^\bullet) = 0$ sauf pour un ensemble fini de k).
Montrer que

(i) un triangle distingué

$$A^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow C^\bullet \xrightarrow{+1}$$

dans $D^b(X)$ donne

$$\chi(X, B^\bullet) = \chi(X, A^\bullet) + \chi(X, C^\bullet).$$

(ii) Soit $\mathcal{F}^\bullet \in D^b_c(S)$, avec S une courbe algébrique lisse.
Alors

$$\chi(S, \mathcal{F}^\bullet) = \chi(S).\chi(\mathcal{F}^\bullet_t) - \sum_{s \in S} \chi(\varphi_{t_s}(\mathcal{F}^\bullet))$$

où $\chi(S) = b_0(S) - b_1(S) + b_2(S)$ est la caractéristique d'Euler topologique de la courbe S et $t \in S$ est un point générique.

Indication. Utiliser le triangle de cohomologie locale à support (TA) en prenant $Z \subset S$ l'ensemble fini des points tels que sur $\mathcal{U} = S \backslash Z$ tous les groupes $\mathcal{H}^k(\mathcal{F}^\bullet)$ sont des systèmes locaux. Remarquez aussi que, le triangle distingué

$$j^{-1}\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \psi_f(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\text{can}} \varphi_f(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{+1}$$

peut s'écrire par simple translation

$$^p\psi_f(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\text{can}} {}^p\varphi_f(\mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow j^{-1}\mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{+1}$$

Par dualité on obtient un triangle distingué

$$j^!\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow {}^p\varphi_f(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\text{var}} {}^p\psi_f(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{+1}$$

On doit utiliser ce triangle pour tout point $s \in Z$ en posant j l'inclusion $\{s\} \hookrightarrow S$.

Chapitre 4

Définition et propriétés des faisceaux pervers

4.1 t-Structures et définition des faisceaux pervers

Définition 4.1 *Une t-catégorie est une catégorie triangulée D munie de deux sous-catégories pleines (i.e. elles ont les mêmes morphismes que D) $D^{\leq 0}$ et $D^{\geq 0}$ telles que en posant $D^{\leq n} = D^{\leq 0}[-n]$ et $D^{\geq n} = D^{\geq 0}[-n]$ on ait*

(i) *$Hom(X, Y) = 0$ si $X \in D^{\leq 0}$ et $Y \in D^{\geq 1}$,*

(ii) *$D^{\leq 0} \subset D^{\leq 1}$, $D^{\geq 1} \subset D^{\geq 0}$,*

(iii) *pour tout $X \in D$, il existe un triangle distingué*

$$A \longrightarrow X \longrightarrow B \xrightarrow{+1} A[+1]$$

avec $A \in D^{\leq 0}$ et $B \in D^{\geq 1}$.
On dit que $(D^{\leq 0}, D^{\geq 0})$ est une t-structure sur D et que $\mathcal{C} = D^{\leq 0} \cap D^{\geq 0}$ est le coeur de la t-structure. $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne.

Exemple 4.1 Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On a une t-structure naturelle sur $D^*(\mathcal{A}) = D$ donnée par

$$Ob(D^{\leq n}) = \{K \in Ob(D)\,;\, H^i(K^\bullet) = 0, \forall i > n\},$$
$$Ob(D^{\geq n}) = \{K \in Ob(D)\,;\, H^i(K^\bullet) = 0, \forall i < n\},$$

Remarque 4.1 Si $K^\bullet \in Ob(D^{\leq n})$, alors $K^\bullet \simeq \hat{K}^\bullet$ tel que $\hat{K}^i = 0\ \forall i > n$. Par exemple si

$$K^\bullet = \cdots \longrightarrow K^0 \longrightarrow K^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow K^n \xrightarrow{d^n} K^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

alors, on peut prendre

$$\hat{K}^\bullet = \cdots \longrightarrow K^0 \longrightarrow K^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{Ker}\ d^n \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

En effet le morphisme d'inclusion $\hat{K}^\bullet \longrightarrow K^\bullet$ est évidemment un quasi-isomorphisme.

Pour tout complexe $K^\bullet \in D^*(\mathcal{A})$, le tronqué $\tau_{\leq 0}K^\bullet \in D^{\leq 0}$ est le sous complexe

$$\longrightarrow K^{-2} \longrightarrow K^{-1} \longrightarrow \mathrm{Ker}\ d^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

dans $K^\bullet$, on pose $\tau_{\geq 0}K^\bullet = K^\bullet/\tau_{\leq 0}K^\bullet \in D^{\geq 1}$ et donc on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \tau_{\leq 0}K^\bullet \longrightarrow K^\bullet \longrightarrow \tau_{\geq 0}K^\bullet \longrightarrow 0.$$

Cela donne le triangle distingué

$$\tau_{\leq 0}K^\bullet \longrightarrow K^\bullet \xrightarrow{\beta} \tau_{\geq 1}K^\bullet \xrightarrow{d} \tau_{\leq 0}K^\bullet[+1]$$

qui est un cas particulier de la condition 4.1(iii).
Pour une t-catégorie générale, on a des foncteurs de troncation abstraits.

Proposition 4.1 ([BBD], 1.3.3)

(i) L'inclusion de $D^{\leq n}$ dans D admet un adjoint à droite $\tau_{\leq n}$ et celle de $D^{\geq n}$ dans D admet un adjoint à gauche $\tau_{\geq n}$.

(ii) Pour tout $X \in D$, il existe un unique $d \in Hom^1(\tau_{\geq 1}X, \tau_{\leq 0}X)$ tel que le triangle

$$\tau_{\leq 0}X \longrightarrow X \xrightarrow{\beta} \tau_{\geq 1}X \xrightarrow{d} \tau_{\leq 0}X[+1]$$

soit distingué.

Proposition 4.2 ([BBD], 1.3.5) *Soit $a \leq b$, $\forall X \in D$, il existe un unique isomorphisme*

$$\tau_{\geq a}\tau_{\leq b}X \xrightarrow{\gamma} \tau_{\leq b}\tau_{\geq a}X$$

tel que

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq b}X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] & \tau_{\geq a}X \\
\tau_{\geq a}\tau_{\leq b}X \arrow[rr, "\gamma"] & & \tau_{\leq b}\tau_{\geq a}X \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Proposition 4.3 ([BBD], 1.3.6) *Le foncteur* ${}^tH^0 = \tau_{\geq 0}\tau_{\leq 0} : D \longrightarrow \mathcal{C}$ *est un foncteur cohomologique.*

Définition 4.2 *Une t-structure est non dégénérée si*

$$\cap D^{\leq n} = \cap D^{\geq n} = \{0\},$$

où 0 *désigne tous les complexes quasi-isomorphes au complexe nul. On pose*

$${}^tH^i(X) := {}^tH^0(X[i]).$$

Proposition 4.4 ([BBD], 1.3.7) *Si la t-structure est non dégénérée alors le système de foncteurs* ${}^tH^i$ *est conservatif et* $X \in D^{\leq 0}$ *(resp.* $X \in D^{\geq 0}$*)si et seulement si* ${}^tH^i(X) = 0$ *pour* $i > 0$ *(resp.* ${}^tH^i(X) = 0$ *pour* $i < 0$ *).*

Remarque 4.2 Pour l'exemple classique $D = D^*(\mathcal{A})$ avec la t-structure de l'exemple 4.1, dans ce cas on a ${}^tH^i = H^i$, ce sont les groupes usuels de cohomologie à valeurs dans $\mathcal{C} = \mathcal{A}$, la catégorie abélienne de départ.

L'anneau de base A sera dans la suite un corps, disons $A = \mathbb{Q}$ ou $A = \mathbb{C}$.

Définition 4.3 *Soit* X *une variété analytique complexe. La t-structure «perverse» sur* $D^b_c(X)$ *est donnée par*

$${}^pD^{\leq 0}(X) = \{\mathcal{F}^\bullet \in D^b_c(X); \dim \operatorname{supp}^{-j}\mathcal{F}^\bullet \leq j \ \forall j \in \mathbb{Z}\},$$

$${}^pD^{\geq 0}(X) = \{\mathcal{F}^\bullet \in D^b_c(X); \dim \operatorname{cosupp}^{j}\mathcal{F}^\bullet \leq j \ \forall j \in \mathbb{Z}\}.$$

La catégorie des faisceaux pervers sur X *est la catégorie abélienne définie par le cœur de la t-structure perverse sur* $D^b_c(X)$*, donc*

$$Perv(X, A) = {}^pD^{\leq 0}(X) \cap {}^pD^{\geq 0}(X).$$

Pour $x \in X$, $j_x : \{x\} \to X$ dénote l'inclusion, alors par définition

$$\operatorname{supp}^i(\mathcal{F}^\bullet) = \overline{\{x \in X \ ; \ H^i(j_x^{-1}(\mathcal{F}^\bullet)) = \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet)_x \neq 0\}},$$

$$\operatorname{cosupp}^i(\mathcal{F}^\bullet) = \overline{\{x \in X \ ; \ H^i(j_x^{!}(\mathcal{F}^\bullet)) \neq 0\}} = \operatorname{supp}^{-i}(D\mathcal{F}^\bullet).$$

En effet on a le résultat suivant

Lemme 4.1

$$\operatorname{cosupp}^i(\mathcal{F}^\bullet) = \operatorname{supp}^{-i}(D\mathcal{F}^\bullet)$$

Preuve. On pose $\mathcal{F}^\bullet = D\mathcal{G}^\bullet$ où $\mathcal{G}^\bullet = D\mathcal{F}^\bullet$ et on a
$H^i(j_x^! D\mathcal{G}^\bullet) = H^i(D(j_x^{-1}\mathcal{G}^\bullet)) = H^{-i}(j_x^{-1}\mathcal{G}^\bullet)^\vee$, par la proposition 3.7 (v). Donc
$H^i(j_x^! \mathcal{F}^\bullet) = H^{-i}(j_x^{-1} D\mathcal{F}^\bullet)^\vee$. □

On a une autre caractérisation des faisceaux pervers

Proposition 4.5 ([KS] (10.2.4)) *Soit $\mathcal{F}^\bullet \in D_c^b(X)$ un complexe constructible par rapport à une stratification $X = \cup X_\alpha$ de X, les strates X_α étant semi-algébriques et équidimensionnelles. Alors $\mathcal{F}^\bullet \in Perv(X, A)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :*

(i) $\mathcal{H}^j(i_{X_\alpha}^{-1}\mathcal{F}^\bullet) = 0$ *pour tout α et tout $j > -\dim X_\alpha$, où $i_{X_\alpha} : X_\alpha \longrightarrow X$ est l'inclusion,*

(ii) $\mathcal{H}^j(i_{X_\alpha}^! \mathcal{F}^\bullet) = 0$ *pour tout α et tout $j < -\dim X_\alpha$.*

4.2 Exemples et propriétés des faisceaux pervers

Un exemple fondamental de faisceau pervers est donné par le résultat suivant

Théorème 4.1 ([Lê]) *Soit X une variété analytique complexe de dimension pure n qui est localement une intersection complète. Alors le faisceau constant $A_X[n]$ est un faisceau pervers.*

Preuve. (Dans le cas spécial des singularités isolées) Soit X une variété analytique complexe, de dimension complexe pure n, à singularités isolées telle que pour tout $a \in X$, l'entrelac (le link) $K(a) = X \cap S_\epsilon(a)$ est $(n-2)$-connexe (il suffit $\tilde{H}^i(K(a), A) = 0$ pour $0 \leq i \leq n-2$) (par exemple si localement la variété est une intersection complète cette condition est remplie voir [Ha]).

Si on pose $\mathcal{F}^\bullet = A_X[n]$, on a $\mathcal{F}_a^\bullet = A[n]$ donc

$$H^i(\mathcal{F}_a^\bullet) = \begin{cases} 0 & i \neq -n \\ A & i = -n \end{cases}$$

$$\operatorname{supp}^{-j}(\mathcal{F}^\bullet) = \begin{cases} \phi & j \neq n \\ X & j = n \end{cases}$$

Si X est lisse, on a $\omega_X = A_X[2n]$ et donc $DA_X[n] = A_X[n]$ ce qui montre directement que dans ce cas, $A_X[n]$ est pervers.
Pour traiter le cas singulier, on a besoin de plusieurs lemmes.

Lemme 4.2 *Si $\mathcal{F}^\bullet$ est cohomologiquement constructible alors on a*

$$\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet)_x = \mathbb{H}^i(B_\epsilon^\circ(x), \mathcal{F}^\bullet)$$

où $B_\epsilon^\circ(x)$ est égal à X intersecté avec la boule ouverte de centre x et de rayon ϵ, pour ϵ assez petit (pour un certain plongement local de X dans un espace affine).

La preuve du lemme 4.2 découle immédiatement de la proposition suivante. On pourrait aussi utiliser le théorème (I.4.16) de [MeNM] avec une strate S ponctuelle.

Proposition 4.6 (Propriété d'invariance homotopique)
Soit X un espace muni d'une stratification $\mathcal{S}$, $r : X \to [0,1[$ propre et $\mathbb{R}$-analytique tels que pour toute strate S, $r_{|S}$ n'a pas de valeurs critiques dans $]0,1[$.
Alors l'inclusion $r^{-1}(0) \to X$ induit l'isomorphisme

$$\mathbb{H}^i(X, \mathcal{F}^\bullet) \simeq \mathbb{H}^i(r^{-1}(0), \mathcal{F}^\bullet)$$

pour tout complexe $\mathcal{F}^\bullet$ cohomologiquement constructible relativement à $\mathcal{S}$.

Pour déduire le lemme 4.2 de la proposition 4.6, on prend $X = B_\epsilon^\circ(x)$ et $r(y) = d^2(y,x)$, le carré de la fonction distance.

Lemme 4.3

$$\mathcal{H}^i(D\mathcal{F}^\bullet)_x = \mathbb{H}_c^{-i}(B_\epsilon^\circ(x), \mathcal{F}^\bullet)^\vee$$

Preuve. Dans la preuve, on pose $X = B_\epsilon^\circ(x)$, $a_X : X \to pt$. On a

(1) $\mathbb{H}^i(X, \mathcal{F}^\bullet) = H^i(R(a_X)_* \mathcal{F}^\bullet)$,
(2) $\mathbb{H}_c^i(X, \mathcal{F}^\bullet) = H^i(R(a_X)_! \mathcal{F}^\bullet)$,
(3) $D(R(a_X)_! \mathcal{F}^\bullet) = R(a_X)_*(D\mathcal{F}^\bullet)$.

(1) et (2) sont donnés par définition (ils sont aussi des cas particuliers du Théorème de Leray).

On a avec ce qui précède

$$\mathcal{H}^i(D\mathcal{F}^\bullet)_x = \mathbb{H}^i(X, D\mathcal{F}^\bullet) = H^i(R(a_X)_* D\mathcal{F}^\bullet) = H^i(DR(a_X)_! \mathcal{F}^\bullet)$$

d'où

$$\mathcal{H}^i(D\mathcal{F}^\bullet)_x = H^{-i}(R(a_X)_! \mathcal{F}^\bullet)^\vee = \mathbb{H}_c^{-i}(X, \mathcal{F}^\bullet)^\vee.$$

□

Lemme 4.4 $\mathbb{H}_c^{-i}(B_\epsilon^\circ(x), \mathcal{F}^\bullet) = \mathbb{H}^{-i}(B_\epsilon^\circ(x), B_\epsilon^\circ(x) \backslash \{x\}; \mathcal{F}^\bullet)$

Preuve. On a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\delta"] & \mathbb{H}^i(B_\epsilon^\circ(x), B_\epsilon^\circ(x)\backslash\{x\}, \mathcal{F}^\bullet) \arrow[r] & \mathbb{H}^i(B_\epsilon^\circ(x), \mathcal{F}^\bullet) \arrow[r] & \mathbb{H}^i(B_\epsilon^\circ(x)\backslash\{x\}, \mathcal{F}^\bullet) \arrow[r, "\delta"] & \cdots \\
 & & & \mathbb{H}^i(B_\epsilon(x)\backslash\{x\}, \mathcal{F}^\bullet) \arrow[u, "\sim k^*"'] \arrow[d, "\sim j^*"] & \\
\cdots \arrow[r, "\delta"] & H_c^i(B_\epsilon^\circ(x), \mathcal{F}^\bullet) \arrow[r] & \mathbb{H}^i(B_\epsilon(x), \mathcal{F}^\bullet) \arrow[r] \arrow[uu, "\sim i^*"'] & \mathbb{H}^i(\partial B_\epsilon(x), \mathcal{F}^\bullet) \arrow[r, "\delta"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

où les isomorphismes verticaux sont induits par des inclusions évidentes.

□

Pour montrer

$$\mathbb{H}^i(B_\epsilon^\circ(x)\backslash\{x\}, \mathcal{F}^\bullet) \simeq \mathbb{H}^i(\partial B_\epsilon^\circ(x), \mathcal{F}^\bullet)$$

on utilise la propriété d'invariance homotopique avec $r(x) = \epsilon - d(0, x)$.

Maintenant, on finit de prouver que

$$\mathcal{F}^\bullet = A_X[n] \in Perv(X, A_X).$$

On a $\mathcal{H}^i(D\mathcal{F}^\bullet)_a = \mathbb{H}^{n-i}(B_\epsilon^\circ(a), B_\epsilon^\circ(a)\backslash\{a\}, A)^\vee = \tilde{H}^{n-i-1}(K(a), A)^\vee$.

On vérifie la deuxième condition pour être un faisceau pervers

$$\dim \operatorname{cosupp}^j(\mathcal{F}^\bullet) = \dim \operatorname{supp}^{-j}(D\mathcal{F}^\bullet) = \dim \overline{\{a \in X\ ;\ H^{-j}(D\mathcal{F}^\bullet)_a \neq 0\}} \leq j,\ \forall j.$$

Si $j < 0$ alors on a $\dim \phi = -\infty$ par l'hypothèse sur la connectivité des links.
Si $j = 0$ alors $\tilde{H}^{n-1}(K(a)) = 0$ si $a \in X_{\text{lisse}}$ $(K(a) \simeq S^{2n-1})$.
Pour $1 \leq j \leq n-1$, on fait le même raisonnement.
Il n'y a que pour $j = n$ que le support est tout l'espace X mais dans ce cas, il n'y a aucune condition à vérifier sur la dimension. □

Exemple 4.2 (Faisceaux pervers et D-modules)
Soit X une variété algébrique complexe lisse et $A = \mathbb{C}$.
Pour les notions concernant les D-modules, on renvoit à [B2].
On a une équivalence de catégorie

$$D_{rh}^b(\mathcal{D}_X) \xrightarrow{DR} D_c^b(X)$$

$$DR(M^\bullet) = M^\bullet \otimes \Omega^\bullet_X\text{an}$$

où $D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)$ est la catégorie dérivée de la catégorie abélienne des $\mathcal{D}_X$-modules réguliers holonomes sur X. Si $M^\bullet = \mathcal{O}_X$ alors $DR(M^\bullet) \simeq \mathbb{C}_X[n]$.

On munit $D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)$ de la t-structure naturelle décrite dans l'exemple 4.1.
On munit $D^b_c(X)$ de la t-structure perverse de la définition 4.3. Alors, on a le résultat suivant

Théorème 4.2 (La correspondance de Riemann-Hilbert) ([B2], p. 325) *DR est un foncteur t-exact (i.e. respecte les t-structures).*
En particulier

(i) pour tout M un $\mathcal{D}_X$-module régulier holonome, $DR(M)$ est un faisceau pervers,

(ii) pour un complexe $M^\bullet \in D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)$, on a

$$DR(\mathcal{H}^m(M^\bullet)) = {}^p\mathcal{H}^m(DR(M^\bullet)).$$

Pour l'analogue de ces résultats dans le cas où X est une variété analytique, voir [Me1].

Les D-modules sont très utiles dans l'étude des propriétés des faisceaux pervers, comme illustré dans l'exemple suivant.

Proposition 4.7 *Soit $\mathcal{F}^\bullet \in D^b_c(X)$ où X est une courbe complexe. Alors on a des suites exactes courtes*

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^0({}^p\mathcal{H}^k(\mathcal{F}^\bullet)) \longrightarrow \mathcal{H}^k(\mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^{-1}({}^p\mathcal{H}^{k+1}(\mathcal{F}^\bullet)) \longrightarrow 0$$

pour tout entier k.

Preuve. Grâce à l'équivalence de catégorie induite par DR, on peut supposer que $\mathcal{F}^\bullet = DR(M^\bullet)$ avec $M^\bullet \in D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)$.
Par définition, le complexe $DR(M^\bullet)$ est le complexe total associé au complexe double ayant le complexe $DR(M^k)$ sur la k-ième ligne.
Cela donne une suite spectrale

$$E_2^{s,t} = \mathcal{H}^s(DR(\mathcal{H}^t(M^\bullet))) \Rightarrow \mathcal{H}^{t+s}(DR(M^\bullet)).$$

En utilisant le théorème 4.2 cette suite devient

$$E_2^{s,t} = \mathcal{H}^s(\,{}^p\mathcal{H}^t(\mathcal{F}^\bullet)) \Rightarrow \mathcal{H}^{t+s}(\mathcal{F}^\bullet).$$

Lorsque $\dim X = 1$, nous avons $E_2^{s,t} = E_\infty^{s,t}$ et on obtient la suite exacte de l'énoncé. $\square$

Propriétés des faisceaux pervers
On a en utilisant la proposition 4.4: si $\mathcal{F}^\bullet \in D^b_c(X)$ alors $\mathcal{F}^\bullet \in D^{\leq 0}$ si et seulement si ${}^p\mathcal{H}^k(\mathcal{F}^\bullet) = 0$ pour $k > 0$, $\mathcal{F}^\bullet \in Perv(X)$ si et seulement si ${}^p\mathcal{H}^k(\mathcal{F}^\bullet) = 0$ pour $k \neq 0$, ${}^p\mathcal{H}^0(\mathcal{F}^\bullet) = \mathcal{F}^\bullet$ si $\mathcal{F}^\bullet \in Perv(X)$.
On a aussi les propriétés suivantes:
Théorème 4.3 ([KS], (10.3.13))

(i) $D{}^p\mathcal{H}^k(\mathcal{F}^\bullet) = {}^p\mathcal{H}^k(D\mathcal{F}^\bullet)$, $\forall \mathcal{F}^\bullet \in D^b_c(X)$ *(où D est la dualité de Verdier).*

(ii) Si $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \xrightarrow{+1}$ *est un triangle distingué alors* X, Z *pervers implique* Y *pervers.*

(iii) Si on pose ${}^p\psi_f = \psi_f[-1]$, ${}^p\varphi_f = \varphi_f[-1]$, *alors* ${}^p\psi_f, {}^p\varphi_f : Perv(X) \longrightarrow Perv(F_0)$. *Plus précisément* ${}^p\psi_f, {}^p\varphi_f$ *sont t-exacts (i.e.* $D^{\geq 0}$ *et* $D^{\leq 0}$ *sont stables), voir [KS], (10.3.13).*
(iv) $D_{F_0}{}^p\psi_f = {}^p\psi_f \circ D_X$ *et aussi pour* ${}^p\varphi_f$.
(v) Soit $\mathcal{F}^\bullet \in D^b_c(X)$, $Y \subset X$ *une sous variété telle que* $\mathrm{supp}\mathcal{H}^k(\mathcal{F}^\bullet) \subset Y$ *pour tout* k *alors* $\mathcal{F}^\bullet_{|Y} \in Perv(Y)$ *si et seulement si* $\mathcal{F}^\bullet \in Perv(X)$.
(vi) Si $\mathcal{F}^\bullet \in Perv(X)$ *alors* $\mathcal{H}^k(\mathcal{F}^\bullet) = 0$ *si* $k < -\dim(X)$ *ou* $k > 0$.
En outre $\mathbb{H}^k(X, \mathcal{F}^\bullet) = 0$ *si* $k < -\dim(X)$ *et aussi pour* $k > \dim X$. *Si* X *est affine ou Stein alors* $\mathbb{H}^k(X, \mathcal{F}^\bullet) = 0$ *pour* $k > 0$.*(Théorème d'annulation d'Artin).*

Remarque 4.3 Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application régulière entre deux variétés algébriques complexes X et Y. Alors, on sait

(i) ([BBD] (2.2.5)) Si f est quasi-fini alors les foncteurs $Rf_!$, $f^{-1} : D^b_c(X) \longrightarrow D^b_c(Y)$ sont t-exacts à droite, i.e. par exemple

$$Rf_!({}^pD^{\leq 0}_c(X)) \subset {}^pD^{\leq 0}_c(Y)$$

et les foncteurs $f^!$, Rf_* sont t-exacts à gauche (définition duale, changer $\leq$ en $\geq$).

(ii) ([BBD], (4.1.1)) Si f est un morphisme affine, alors Rf_* est t-exact à droite et $Rf_!$ est t-exact à gauche.
En particulier, si f est quasi-fini et affine, alors $Rf_!$ et Rf_* sont t-exacts.
On dit qu'un faisceau $\mathcal{F}^\bullet \in D^b_c(X)$ est semi pervers si $\mathcal{F}^\bullet \in {}^pD^{\leq 0}_c(X)$.
Notez que l'affirmation (ii) implique qu'on a un théorème d'Artin pour tout faisceau semi pervers: si X est une variété affine et $\mathcal{F}^\bullet$ un faisceau semi pervers sur X alors $\mathbb{H}^k(X, \mathcal{F}^\bullet) = 0$ pour tout $k > 0$.

Exemple 4.3 (D'autres exemples de faisceaux pervers)

(i) Faisceaux pervers en dimension 0.
Si X est un point, alors $D^b_c(X) = C^b(X)$, la catégorie des complexes bornés de A-espaces vectoriels de dimension finie.

En utilisant la description de la dualité de Verdier dans ce cas, on voit que $\mathcal{F}^\bullet \in Perv(X)$ si et seulement si $H^l(F^\bullet) = 0$ pour $l \neq 0$. Mais un tel complexe est quasi-isomorphe au complexe concentré en degré 0 donné par $H^0(F^\bullet)$.
Donc la catégorie $Perv(X, A)$ est équivalente à la catégorie des A-espaces vectoriels de dimension finie.

(ii) Faisceaux pervers en dimension 1.
Soit X une courbe algébrique ou analytique complexe et $\mathcal{F}^\bullet \in Perv(X, A)$ un faisceau pervers. Alors le théorème d'annulation d'Artin 4.3 (vi) nous donne

$$\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet) = 0 \text{ pour } i \notin \{-1, 0\}.$$

Un raisonnement similaire à la remarque 4.1 nous montre qu'il existe un complexe de deux termes

$$\mathcal{F}'^\bullet : 0 \longrightarrow \mathcal{F}'^{-1} \longrightarrow \mathcal{F}'^0 \longrightarrow 0$$

quasi-isomorphe au complexe $\mathcal{F}^\bullet$. Donc dans la catégorie $Perv(X, A)$ on peut déjà supposer que $\mathcal{F}^\bullet = \mathcal{F}'^\bullet$, donc $\mathcal{F}^i = 0$ pour $i \notin \{-1, 0\}$.
En utilisant la proposition 4.5, on peut voir facilement qu'un complexe $\mathcal{F}^\bullet : 0 \longrightarrow \mathcal{F}^{-1} \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow 0$ est un faisceau pervers si et seulement si $\mathcal{H}^0(\mathcal{F}^\bullet)$ a un support fini et $\Gamma_{\{s\}}(\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{F}^\bullet)) = 0$ pour tout $s \in S$. On peut se demander quand $\mathcal{F}^\bullet$ est en effet représenté par un simple faisceau en degré (-1).

Proposition 4.8 *On a un isomorphisme* $\mathcal{F}^\bullet = \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{F}^\bullet)[1]$ *si et seulement si une des deux conditions équivalentes suivantes est remplie.*

(i) $\mathcal{H}^0(\mathcal{F}^\bullet) = 0$,

(ii) pour tout point $a \in X$ *le morphisme canonique* can : $\psi_{t-a}(\mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \varphi_{t-a}(\mathcal{F}^\bullet)$ *est surjectif,* t *étant une coordonnée locale en* a.

Preuve. En vue de notre précédente discussion, il est clair que l'isomorphisme $\mathcal{F}^\bullet = \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{F}^\bullet)[1]$ est équivalent à la condition (i).
Pour montrer l'équivalence $(i) \Leftrightarrow (ii)$ il suffit de remarquer que $\psi_{t-a}(\mathcal{F}^\bullet)$ et $\varphi_{t-a}(\mathcal{F}^\bullet)$ sont concentrés en degré (-1) et d'utiliser le triangle de définition du morphisme canonique can. $\square$

(iii) Le complexe de cohomologie d'intersection
Soit X une variété algébrique de dimension n, $X^\circ \subset X$ un ouvert dense, $\mathcal{L}$ un système local sur X° alors, il existe un unique faisceau pervers $IC^\bullet_X(\mathcal{L}) \in Perv(X)$ tel que

(i) $IC^\bullet_X(\mathcal{L})_{|X^\circ} = \mathcal{L}[n]$,

(ii) $\dim \operatorname{supp}^{-i}(IC^\bullet_X(\mathcal{L})) < i$, $\forall i < n$,

(iii) $\dim \operatorname{cosupp}^i(IC_X^\bullet(\mathcal{L})) < i, \forall i < n.$

Remarque 4.4 Si on considère seulement les stratifications à un nombre fini de strates, alors la catégorie $Perv(X, A)$ est une catégorie artinienne : chaque faisceau $\mathcal{F}^\bullet \in Perv(X, A)$ admet une série de composition

$$0 \subset \mathcal{F}_0^\bullet \subset \cdots \subset \mathcal{F}_m^\bullet = \mathcal{F}^\bullet$$

telle que $\mathcal{F}_i^\bullet \in Perv(X, A)$ pour $i = 0, \cdots m$ et les quotients $\mathcal{F}_i^\bullet / \mathcal{F}_{i-1}^\bullet$ sont des objets simples (donc sans sous-objets non triviaux dans $Perv(X, A)$) uniquement déterminés à ordre près par le faisceau $\mathcal{F}^\bullet$. En plus, les objets simple de la catégorie $Perv(X, A)$ admettent une description explicite en fonction des complexes de cohomologie d'intersection associées aux sous-variétés irréductibles de X, voir [BBD], p. 112-113.

4.3 Germes de faisceaux pervers et germes de D-modules en dimension 1

Le but de cette section est de donner une description explicite de la correspondance de Riemann-Hilbert qui existe entre la catégorie $Perv(\mathbb{C}, 0)$ des germes de faisceaux pervers à l'origine de $\mathbb{C}$ et la catégorie des germes de $\mathcal{D}_0$-modules réguliers holonomes à l'origine de $\mathbb{C}$. Si $\mathcal{F}^\bullet \in Perv(\mathbb{C}, 0)$, alors par définition il existe un petit disque ouvert D dans $\mathbb{C}$, $0 \in D$ et un faisceau pervers $\mathcal{F}^\bullet \in Perv(D, \mathbb{C})$ qui représente le germe $\mathcal{F}^\bullet$.
En utilisant l'exemple 4.3 (ii), on voit qu'on peut supposer $\mathcal{F}^i = 0$ pour $i \neq -1, 0$ et en outre que $\mathcal{H}^0(\mathcal{F}^\bullet)$ est un faisceau à support $\{0\}$, donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. D'autre part $\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{F}^\bullet)$ donne par restriction un système local sur $D^* = D \backslash \{0\}$ et on a $\Gamma_{\{0\}}(\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{F}^\bullet)) = 0$.
Le triangle distingué

$${}^p\psi_t \mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{\text{can}} {}^p\varphi_t \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}_0^\bullet \xrightarrow{+1}$$

nous donne comme dans l'exercice 3.2, la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{F}^\bullet)_0 \longrightarrow \mathcal{H}^0({}^p\psi_t \mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\text{can}} \mathcal{H}^0({}^p\varphi_t \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^0(\mathcal{F}^\bullet)_0 \longrightarrow 0.$$

Ici, on note par t une coordonnée sur D qui s'annule à l'origine.
Alors, les faisceaux ${}^p\psi_t \mathcal{F}^\bullet$ et ${}^p\varphi_t \mathcal{F}^\bullet$ étant pervers, à support l'origine, on peut les identifier aux espaces vectoriels de dimension finie

$$E = \mathcal{H}^0({}^p\psi_t \mathcal{F}^\bullet)$$

et respectivement

$$F = \mathcal{H}^0({}^p\varphi_t\mathcal{F}^\bullet).$$

Chacun de ces deux espaces vectoriels est muni d'un opérateur de monodromie notée avec μ_E et respectivement μ_F. On a en effet le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[d, "\mu_E - 1"'] & F \arrow[dl, "\mathrm{var}"'] \arrow[d, "\mu_F - 1"] \\ E \arrow[r, "\mathrm{can}"] & F \end{tikzcd}$$

Proposition 4.9 *Il existe une équivalence de catégories entre la catégorie $Perv(\mathbb{C}, 0)$ et la catégorie Diag dont les objets sont les classes d'isomorphismes de diagrammes*

$$E \underset{v}{\overset{c}{\rightleftarrows}} F$$

où E, F sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie, c, v des applications $\mathbb{C}$-linéaires telles que $c \circ v + 1_F$ et $v \circ c + 1_E$ soient inversibles.

Preuve. Les morphismes (e, f) dans la catégorie *Diag* sont donnés par les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, shift left, "c"] \arrow[d, "e"'] & F \arrow[l, shift left, "v"] \arrow[d, "f"] \\ E' \arrow[r, shift left, "c'"] & F' \arrow[l, shift left, "v'"] \end{tikzcd}$$

En outre (e, f) est un isomorphisme si et seulement si e et f sont des isomorphismes, voir Sabbah [S1], p. 41.
Nous avons déjà indiqué le foncteur $Perv(\mathbb{C}, 0) \longrightarrow Diag$:

$$\mathcal{F}^\bullet \longmapsto (\ {}^p\psi(\mathcal{F}^\bullet) \underset{\mathrm{var}}{\overset{\mathrm{can}}{\rightleftarrows}} {}^p\varphi(\mathcal{F}^\bullet)\ ).$$

Réciproquement, à chaque diagramme $E \underset{v}{\overset{c}{\rightleftarrows}} F$ on peut associer un faisceau $\mathcal{F}^\bullet \in Perv(D, \mathbb{C})$ comme suit, où D est le disque unité. Soit V le système local sur D^* donné par E et l'automorphisme $\mu_E = 1 + v \circ c$. Soit $\mathcal{H}^{-1}$ le faisceau constructible sur D donné par

(i) $\mathcal{H}^{-1}_{|D^*} = V$,

(ii) $\mathcal{H}^{-1}_0 = \mathrm{Ker}\ (c)$.

Cela définit bien un faisceau constructible sur D car on a Ker $(c) \subset$ Ker $(\mu_E - 1)$. En outre, on a aussi $\Gamma_{\{0\}}\mathcal{H}^{-1} = 0$.
Soit $\mathcal{H}^0$ le faisceau constructible sur D à support $\{0\}$ donné par Coker c.
Alors $0 \to \mathcal{H}^{-1} \xrightarrow{0} \mathcal{H}^0 \to 0$ est un faisceau pervers sur D, voir l'exemple 4.3 (ii).
On laisse au lecteur le soin de vérifier que ces deux foncteurs établissent l'équivalence de catégories affirmée par la proposition. $\square$

Exemple 4.4 (Le morphisme canonique et le morphisme variation pour une singularité isolée d'hypersurface)
Soit $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $n \geq 2$ un germe analytique à singularité isolée à l'origine.
Alors le faisceau $\mathcal{F}^\bullet = R^{n-1}f_*(\mathbb{C}_X)[1]$ est un faisceau pervers sur un petit disque S où $f : X \longrightarrow S$ est un bon représentant du germe f. On a

(i) $\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{F}^\bullet)_0 = R^{n-1}f_*(\mathbb{C}_X)_0 = 0$ car X est contractile,
(ii) $\mathcal{H}^0({}^p\psi_t\mathcal{F}^\bullet) = \mathcal{H}^0(\psi_t(R^{n-1}f_*\mathbb{C}_X)) = H^{n-1}(F_\epsilon, \mathbb{C})$ où F_ϵ est la fibre de Milnor de f à l'origine,
(iii) $\mathcal{H}^0({}^p\varphi_t\mathcal{F}^\bullet) = H^n(X, F_\epsilon; \mathbb{C})$ et $\mathcal{H}^0(\mathcal{F}^\bullet) = 0$.

Donc dans ce cas $E = H^{n-1}(F_\epsilon, \mathbb{C})$, $F = H^n(X, F_\epsilon; \mathbb{C})$ et le morphisme canonique correspond à l'isomorphisme $\delta : H^{n-1}(F_\epsilon, \mathbb{C}) \longrightarrow H^n(X, F_\epsilon; \mathbb{C})$.
Pour le morphisme de variation var : $H^n(X, F_\epsilon; \mathbb{C}) \longrightarrow H^{n-1}(F_\epsilon, \mathbb{C})$, il est plus simple de regarder le morphisme dual au niveau des groupes d'homologie

$$\mathrm{var}_* : H_{n-1}(F_\epsilon, \mathbb{C}) \longrightarrow H_n(X, F_\epsilon; \mathbb{C})$$

Celui-ci est donné par l'extension d'un cycle c le long du lacet élémentaire $w(t) = \epsilon \exp(2\pi i t)$, $0 \leq t \leq 1$. Pour une description formelle et détaillée de var_* voir Lamotke [La] (6.4).
Avec les notations de cet article, on a

$$\mathrm{var}_* = (-1)^{n-1}\tau_w.$$

On a les formules

$$\mu_*^r - 1 = \mathrm{var}_*(\partial x) \quad \text{et} \quad \partial \mathrm{var}_* = \mu_* - 1$$

où $H_n(X, F_\epsilon; \mathbb{C}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(F_\epsilon, \mathbb{C})$ est le morphisme de bord et μ_*, μ_*^r sont les opérateurs de monodromie absolue et relatifs associés au chemin w, voir loc. cit.
Donc on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H_{n-1}(F_\epsilon, \mathbb{C}) & H_n(X, F_\epsilon; \mathbb{C}) \arrow[l, "\partial"'] \\
H_{n-1}(F_\epsilon, \mathbb{C}) \arrow[u, "\mu_* - 1"] \arrow[ur, "\mathrm{var}_*"'] & H_n(X, F_\epsilon; \mathbb{C}) \arrow[l, "\partial"] \arrow[u, "\mu_*^r - 1"']
\end{tikzcd}$$

qui montre par dualité que
$$\mathrm{var} = (\mathrm{var}_*)^\vee.$$
On peut aussi voir le morphisme var_* comme la composition
$$H_{n-1}(F_\epsilon, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H_n(f^{-1}(\partial S), F_\epsilon; \mathbb{C}) \xrightarrow{i_*} H_n(X, F_\epsilon; \mathbb{C})$$
où le premier isomorphisme correspond à l'isomorphisme
$$H_{n-1}(F_\epsilon, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H_{n-1}(F_\epsilon, \mathbb{C}) \otimes H_1(\partial S, \mathrm{pt}) \xrightarrow{\sim} H_n(f^{-1}(\partial S), F_\epsilon; \mathbb{C})$$
voir Milnor [M] et le deuxième est induit par l'inclusion évidente.

Remarque 4.5 Dans la théorie des singularités isolées d'hypersurfaces, on considère d'habitude un autre morphisme de variation
$$V : H_{n-1}(\overline{F}_\epsilon, \partial\overline{F}_\epsilon) \longrightarrow H_{n-1}(\overline{F}_\epsilon)$$
(voir [AGV], p. ?) qui est relié au morphisme précédent var_* par le diagramme commutatif suivant
$$\begin{tikzcd}
H_{n-1}(\overline{F}_\epsilon, \partial\overline{F}_\epsilon) \arrow[r, "V"] & H_{n-1}(\overline{F}_\epsilon) \arrow[d, equal] \\
H_{n-1}(\overline{F}_\epsilon) \arrow[u, "j_*"] \arrow[d, equal] & H_{n-1}(F_\epsilon) \\
H_{n-1}(F_\epsilon) \arrow[r, "\mathrm{var}_*"] \arrow[ur, "\mu_* - 1"] & H_n(X, F_\epsilon) \arrow[u, "\partial", "\sim"']
\end{tikzcd}$$
Le morphisme j_* est induit par l'inclusion naturelle et on a $\mathrm{Ker}\ j_* = H_{n-1}(\partial\overline{F}_\epsilon)$ qui en général est non nul. Donc les deux morphismes sont en général distincts.
Deligne montre dans [De] comment obtenir le morphisme V en utilisant les cycles évanescents, usuels mais en remplaçant le foncteur des cycles proches ψ par le foncteur $R\Gamma_{\{0\}} \circ \psi$.

Maintenant, on va décrire la catégorie $Mod_{hr}(\mathcal{D}_0)$ des germes de $\mathcal{D}_0$-modules holonomes et réguliers à l'origine de $\mathbb{C}$.
Une excellente introduction à la théorie locale des $\mathcal{D}$-modules en dimension 1 se trouve dans Sabbah [S1], voir aussi Malgrange [Mal].
On a des équivalences naturelles entre les catégories suivantes de $\mathcal{D}$-modules, voir [Mal], p. 19-22 :

(i) $Mod_{hr}(\mathcal{D}_0)$ est la catégorie des modules holonomes réguliers (analytiques) sur $\mathcal{D}_0$, l'anneau des germes d'opérateurs différentiels linéaires analytiques à l'origine de $\mathbb{C}$,

(ii) La catégorie des $\mathcal{D}_0$ modules holonomes analytiques M sur le disque D de rayon 1 centré en 0 dans $\mathbb{C}$ tels que $M|D^*$ soit une connexion et M soit régulier en 0,

(iii) La catégorie des modules holonomes M (analytiques ou algébriques) sur $\mathbb{P}^1$, réguliers à l'infini et à l'origine tels que $M|\mathbb{P}^1\backslash\{0,\infty\}$ soit une connexion,

(iv) La catégorie des A_1-modules holonomes M, réguliers à l'infini et à l'origine tels que $M|\mathbb{C}\backslash\{0\}$ soit une connexion.
Ici, $A_1 = \mathbb{C}[t] < \partial_t >$ est l'algèbre de Weyl d'opérateurs à coefficients polynomiaux.

Grâce à ces équivalences, on peut représenter un germe $M \in Mod_{hr}(\mathcal{D}_0)$ par un $\mathcal{D}$-module M appartenant à une des catégories (ii)-(iv).
Soit $S = \mathbb{C}$. Tout $\mathcal{D}_S$-modules algébrique cohérent M admet un $\mathcal{D}_S^{\mathrm{an}}$-module analytique associé

$$M^{\mathrm{an}} = \mathcal{O}_{S^{\mathrm{an}}} \otimes_{\mathcal{O}_S} M$$

tel qu'on a

$$DR(M) = \mathrm{Cone}(\partial_t : M^{\mathrm{an}} \longrightarrow M^{\mathrm{an}}).$$

Un tel $\mathcal{D}_S$-module M sera identifié avec le A_1-module $M(S) = \Gamma(S, M)$. Nous allons toujours supposer que le faisceau pervers associé $DR(M)$ est à monodromie quasi-unipotente à l'origine. C'est toujours le cas pour les situations géométriques considérées en vue du théorème de la monodromie, voir [De1].
Pour $\alpha \in \mathbb{Q}$, nous posons

$$M(S)^\alpha = \mathrm{Ker}\ (t\partial_t - \alpha)^k \quad \text{pour} \quad k \gg 0.$$

On a les résultats suivants, assez bien connus, voir par exemple [DS1], [Mal], p. 27.

Lemme 4.5 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$,*

(i) $M(S)^\alpha$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie,

(ii) $M(S)^\alpha \cap M(S)^\beta = 0$, pour $\alpha \neq \beta$,

(iii) $t.M(S)^\alpha \subset M(S)^{\alpha+1}$, $\partial_t.M(S)^\alpha \subset M(S)^{\alpha-1}$.

(iv) pour $\alpha \neq 0$, les applications $t : M(S)^{\alpha-1} \longrightarrow M(S)^\alpha$, $\partial_t : M(S)^\alpha \longrightarrow M(S)^{\alpha-1}$ et $t\partial_t : M(S)^\alpha \longrightarrow M(S)^\alpha$ sont des isomorphismes.

Donc pour connaître tous les espaces $M(S)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, il suffit de déterminer les espaces $M(S)^\beta$ pour $\beta \in [-1, 0]$.

Définition 4.4 *Le $\mathcal{D}_S$-module cohérent M est monodromique si M est engendré par $M(S)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{Q}$) sur l'anneau $\mathcal{D}_S$.*

La proposition suivante donne les propriétés essentielles des modules monodromiques, voir [DS1].

Proposition 4.10 *Soit M un $\mathcal{D}_S$-module cohérent.*

(i) Si M est monodromique, alors M est régulier et holonome et on a

(a) $M(S) = \oplus_{\alpha\in\mathbb{Q}} M(S)^\alpha$,

(b) $\dim(\oplus_{\alpha\in[-1,0]} M(S)^\alpha) < +\infty$ et les foncteurs $M \longmapsto M(S)^\alpha$ sont exacts pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$.

(ii) M est monodromique si et seulement si M est régulier, holonome et $M|S^*$ est une connexion.

En particulier, tout germe de $Mod_{hr}(\mathcal{D}_0)$ admet un représentant M qui soit monodromique.

Lemme 4.6 (Lemme clé, [DS1]) *Soit $\Lambda =]-1,0]$ et $\Lambda' = [-1,0]$. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont des familles de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $(V^\alpha)_{\alpha\in\Lambda'}$ avec des applications linéaires $u : V^0 \longrightarrow V^{-1}$, $v : V^{-1} \longrightarrow V^0$ et $N^\alpha : V^\alpha \longrightarrow V^\alpha$ pour $\alpha \in \Lambda\backslash\{0\}$ telles que $\oplus_{\alpha\in\Lambda'} V^\alpha$ est de dimension finie et uv, vu et N^α sont nilpotents.*
Alors il existe une équivalence entre la catégorie $Mod_{hr}(\mathcal{D}_0)$ des germes de $\mathcal{D}$-modules holonomes et réguliers et la catégorie $\mathcal{C}$ induite par le foncteur

$$M \longmapsto ((M(S)^\alpha)_{\alpha\in\Lambda'},\ u = \partial_t,\ v = t,\ N^\alpha = t\partial_t - \alpha).$$

Définition 4.5 *Pour un $\mathcal{D}_S$-module M monodromique, on définit*

(i) <u>les cycles proches de M</u> à l'origine

$$\psi_0(M) = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M(S)^\alpha, \quad \textit{avec} \quad \Lambda =]-1,0],$$

(ii) <u>les cycles évanescents de M</u> à l'origine

$$\varphi_0(M) = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M(S)^{\alpha-1},$$

(iii) <u>le morphisme canonique</u>

$$\mathrm{can} = u = \partial_t : \psi_0(M) \longrightarrow \varphi_0(M)$$

et <u>le morphisme de variation</u>

$$\mathrm{var} = \varphi(t\partial_t)t = t\varphi(t\partial_t) : \varphi_0(M) \longrightarrow \psi_0(M)$$

où $\varphi(s) = \frac{\exp(-2\pi i s)-1}{s}$.

Remarquer qu'on a besoin d'une série convergente car $t\partial_t$ et $\partial_t t$ ne sont pas des applications nilpotentes.
Soit $T_\psi = 1 + \mathrm{var} \circ \mathrm{can}$ et $T_\varphi = 1 + \mathrm{can} \circ \mathrm{var}$.
Alors un calcul immédiat donne

$$T_\psi = \exp(-2\pi i t\partial_t), T_\varphi = \exp(-2\pi i\partial_t t)$$

donc en particulier les opérateurs T_ψ et T_φ sont inversibles. On a le résultat suivant, voir [Mal], p. 31 qui peut se démontrer aussi à partir de notre lemme clé :

Théorème 4.4 *Le foncteur* $M \longmapsto (\ \psi_0(M) \underset{\mathrm{var}}{\overset{\mathrm{can}}{\rightleftarrows}} \varphi_0(M))$ *est une équivalence de catégories entre la catégorie* $Mod_{rh}(\mathcal{D}_0)$ *et la catégorie des diagrammes Diag.*

Les deux équivalences de catégories qui font apparaître la catégorie *Diag* sont en effet compatibles dans le sens suivant

$$\begin{tikzcd} Mod_{rh}(\mathcal{D}_S) \arrow[rr] \arrow[dr, "DR"'] & & Diag \\ & Perv(\mathbb{C},0) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

i.e. il y a des identifications naturelles

$$^p\psi_t(DR_S(M)) = \psi_0(M)$$

et

$$^p\varphi_t(DR_S(M)) = \varphi_0(M)$$

telles que les morphismes can, var et les automorphismes de monodrommie se correspondent.

Remarque 4.6

(i) Pour une construction plus générale des cycles proches et des cycles évanescents pour un $\mathcal{D}$-module nous renvoyons le lecteur au travail de Mebkhout-Sabbah [MS].

(ii) Certains auteurs définissent les cycles évanescents par la formule

$$\varphi_0(M) = \bigoplus_{-1\leq\alpha<0} M(S)^\alpha.$$

En effet, les termes $M(S)^{-1}$ apparaissent dans les deux définitions et pour $\alpha \neq 0$ on a un isomorphisme $\partial_t^{-1} : M(S)^{\alpha-1} \longrightarrow M(S)^\alpha$ qu'on peut utiliser pour montrer que les deux définitions donnent le même $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

(iii) Certain auteurs (voir [DS2]) préfèrent travailler avec les sous-espaces vectoriels

$$\overline{M(S)}^{\alpha} = \mathrm{Ker}\ (\partial_t t - \alpha)^k, \quad \text{où} \quad k \gg 0.$$

La formule $\partial_t t - \alpha = t\partial_t - (\alpha - 1)$ montre qu'on a

$$\overline{M(S)}^{\alpha} = M(S)^{\alpha-1}.$$

Cela décale la V-filtration qu'on va définir en bas.

(iv) Encore d'autres auteurs, voir Mebkhout et Sabbah [MS] préfèrent travailler avec les sous-espaces

$$\hat{M}(S)^{\alpha} = \mathrm{Ker}\ (t\partial_t + \alpha)^k, \quad k \gg 0,$$

qui vont donner une V-filtration croissante V_α telle que $V_\alpha M_0 = V^{-\alpha} M_0$.

Si on préfère travailler avec le germe d'un $\mathcal{D}_0$-module cohérent M_0 alors on peut introduire les sous-espaces vectoriels

$$M_0^{\alpha} = \mathrm{Ker}\ (t\partial_t - \alpha)^k, \quad \text{pour} \quad k \gg 0$$

comme en haut et au lieu de la décomposition en somme directe

$$M(S) = \oplus M(S)^{\alpha}.$$

On obtient une somme directe «complétée»

$$M_0 = \widehat{\oplus} M_0^{\alpha}.$$

Cela veut dire que M_0 est engendré en tant que $\mathcal{O}_{S,0}$-module par la somme $\oplus M_0^{\alpha}$.

Définition 4.6 *La V-filtration de Kashiwara et Malgrange est la $\mathbb{Q}$-filtration décroissante sur M_0 définie par*

$$V^{\alpha} M_0 = \sum_{\beta \geq \alpha} \mathcal{O}_{S,0} M_0^{\beta} \quad \textit{et} \quad V^{>\alpha} M_0 = \sum_{\beta > \alpha} \mathcal{O}_{S,0} M_0^{\beta}.$$

La graduation induite

$$Gr_V^{\alpha} M_0 = V^{\alpha} M_0 / V^{>\alpha} M_0 = M_0^{\alpha}$$

nous donne un foncteur exact $M_0 \longrightarrow Gr_V^{\alpha} M_0$ pour tout α et des bijections pour $\alpha \neq 0$

$$t : Gr_V^{\alpha-1} M_0 \longrightarrow Gr_V^{\alpha} M_0$$

et

$$\partial_t : Gr_V^\alpha M_0 \longrightarrow Gr_V^{\alpha-1} M_0.$$

Exemple 4.5 Soit M un $\mathcal{D}_0$-module cohérent, où D est un disque ouvert centré à l'origine de $\mathbb{C}$. Supposons en plus que $M|D^*$ est une connexion.
Si en outre M est une connexion méromophe (c'est-à-dire $t : M_0 \longrightarrow M_0$ est une bijection), alors $V^\alpha M_0$ (resp. $V^{>\alpha} M_0$) est la fibre en 0 de l'extension de Deligne de $M|D^*$ telle que les valeurs propres du résidu de la connexion soient contenues dans $[\alpha, \alpha+1[$ (resp. $]\alpha, \alpha+1]$). En effet, tous les espaces $V^\alpha M_0$ et $V^{>\alpha} M_0$ sont des $\mathbb{C}\{t\}$-modules libres de rang maximal dans M_0 (i.e. des réseaux) qui sont aussi stables par $t\partial_t$.

Exemple 4.6 (i) Soit $M = \mathcal{O}_S$, donc $M(S) = \mathbb{C}[t] = A_1/A_1\partial_t$. On a $M(S)^k = \text{Ker } (t\partial_t - k) = \mathbb{C}.t^k$ pour $k \geq 0$ et $M(S)^k = 0$ pour $k < 0$. Cela implique $\psi_0(M) = \mathbb{C}.1$ et $\varphi_0(M) = 0$. Le faisceau pervers dans $Perv(\mathbb{C}, 0)$ associé est le faisceau $\mathbb{C}_S[1]$. Si on passe au $\mathcal{D}$-module analytique associé $M^{\text{an}} = \mathcal{O}_S^{\text{an}}$ et on regarde la fibre en 0 qu'on dénote par M_0 on a :

$$M_0 = \mathbb{C}\{t\},\ V^{>k} M_0 = \mathbb{C}\{t\}.t^{k+1} \quad \text{si} \quad k \geq -1$$

et

$$V^{>k} M_0 = M_0, \quad \text{pour} \quad k \leq -1.$$

M_0 est une connexion méromorphe.
Si on utilise la V-filtration décalée $\overline{V}$ qui correspond aux espaces $\overline{M(S)}^\alpha$ alors on a $\overline{V}^{>k} M_0 = \mathbb{C}\{t\}.t^k$ pour $k \geq 0$.

(ii) Soit $M = \mathcal{D}_S/\mathcal{D}_S(t\partial_t)$, donc $M(S) = A_1/A_1(t\partial_t)$. On a alors $M(S)^k = \mathbb{C}.t^k$ pour $k \geq 0$ et $M(S)^{-k} = \mathbb{C}.\partial_t^k$ pour $k \geq 1$. Cela implique $\phi_0(M) = \mathbb{C}.1$ et $\varphi_0(M) = \mathbb{C}.\partial_t$. Le faisceau pervers associé dans $Perv(\mathbb{C}, 0)$ est $\mathcal{F}[1]$, où $\mathcal{F}$ est le faisceau constructible sur $S = \mathbb{C}$ donné par $\mathcal{F}_{|C^*} = \mathbb{C}_{\mathbb{C}^*}$ et $\mathcal{F}_0 = 0$ (utiliser le fait que le morphisme can $= \partial_t$ est un isomorphisme dans ce cas). Remarquons que le faisceau $\mathcal{F}$ est isomorphe au faisceau $\mathcal{F}^1 = R^1 f_* \mathbb{C}_X$, où $f : X \longrightarrow S$, $X = \mathbb{C}^2$, $S = \mathbb{C}$ et $f(x, y) = xy$ ou $f(x, y) = x^2 y + x$.

(iii) Soit $S = \mathbb{C}^*$ avec deux coordonnées t et $s = \frac{1}{t}$. Alors on a

$$\Gamma(S, \mathcal{D}_S) = \mathbb{C}[t, t^{-1}] < \partial_t >= \mathbb{C}[s, s^{-1}] < \partial_s >,$$

avec la relation $s\partial_s = -t\partial_t$.
Si M est un module holonome sur $\mathbb{P}^1$, tel que $M|\mathbb{P}^1 \backslash \{0, 1\}$ est une connexion et tel que les singularités $\{0\}$ et $\{\infty\}$ soient régulières, alors on a

$$M_s^\alpha = \text{Ker } (s\partial_s - \alpha)^k = \text{Ker } (t\partial_t + \alpha)^k = \hat{M}_t^\alpha.$$

Donc les V-filtrations de M aux points $\{0\}$ et $\{\infty\}$ sont opposées dans le sens suivant : pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, on a

$$Gr_V^{\alpha} M_{\infty} = M_s^{\alpha} = M_t^{-\alpha} = Gr_V^{-\alpha} M_0 = Gr_{\alpha}^V M_0$$

où le dernier gradué est par rapport à la filtration V_{α}.

Chapitre 5

Applications à la théorie des singularités et à l'étude des fonctions polynômiales $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$

On commence par quelques applications faciles des faisceaux pervers à la théorie des singularités, voir aussi [Ma1].

Proposition 5.1 (La cohomologie des variétés affines)
Soit X une variété affine complexe localement intersection complète. Soit $n = \dim X$. Alors

(i) $H^k(X, \mathbb{Q}) = 0$ pour $k > n$,

(ii) $H^k_c(X, \mathbb{Q}) = 0$ pour $k < n$.

Preuve. On sait par le théorème 4.1 que le faisceau $\mathcal{F}^\bullet = \mathbb{Q}_X[n]$ est pervers. En utilisant la remarque 4.3 (ii) pour le morphisme $a_X : X \longrightarrow \{pt\}$, on déduit que

$$Ra_{X*}(\mathcal{F}) \in {}^pD_c^{\leq 0}(pt) \text{ et } Ra_{X!}(\mathcal{F}) \in {}^pD_c^{\geq 0}(pt).$$

Utilisant le fait que pour un espace ponctuel la t-structure perverse coïncide avec la t-structure classique, on obtient

$$H^i(Ra_{X*}(\mathbb{Q}_X[n])) = H^{i+n}(X, \mathbb{Q}) = 0 \text{ pour } i > 0$$

et

$$H^i(Ra_{X!}(\mathbb{Q}_X[n])) = H^{i+n}(X, \mathbb{Q}) = 0 \text{ pour } i < 0$$

$\square$

Proposition 5.2 (La connexité des fibres de Milnor) *Soit* $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ *un germe analytique, soit* $\Sigma(f) = \{x \in \mathbb{C}^n : df(x) = 0\}$ *son lieu singulier et soit* F *la fibre de Milnor du germe* f*. Alors* $\tilde{H}^k(F; \mathbb{C}) = 0$ *pour* $0 \leq k \leq n - 2 - s$ *où* $s = \dim \Sigma(f)$*.*

Preuve. Soit $f : X \longrightarrow D_\delta$ un bon représentant du germe f comme dans [L].
Soit $F_0 = f^{-1}(0) \cap X$, $F = f^{-1}(t) \cap X$ pour $0 < t < \delta$. Comme $\mathbb{C}_X[n] \in Perv(X)$ par le théorème 4.1 on a ${}^p\varphi_f(\mathbb{C}_X[n]) \in Perv(F_0)$ par le théorème 4.3 (iii).
D'autre part, en utilisant la proposition 3.11 et le théorème 4.3 (v), on a

$$ {}^p\varphi_f(\mathbb{C}_X[n])_{|\Sigma(f)} \in Perv(\Sigma(f)). $$

Le théorème d'annulation d'Artin 4.3 (vi) nous donne alors

$$ \mathcal{H}^k({}^p\varphi_f(\mathbb{C}_X[n]))_0 = \mathcal{H}^k({}^p\varphi_f(\mathbb{C}_X[n])_{|\Sigma(f)})_0 = 0 $$

pour $k < -s$.
Le résultat est démontré car $\mathcal{H}^k({}^p\varphi_f(\mathbb{C}_X[n]))_0 = \mathcal{H}^{k+n-1}(\varphi_f(\mathbb{C}_X))_0 = \tilde{H}^{k+n-1}(F)$ en vue de l'exemple 3.4. □

Remarque 5.1 (i) Avec une démonstration purement topologique mais beaucoup plus compliquée on peut montrer que la fibre F est en effet $(n - 2 - s)$-connexe, voir Kato-Matsumoto [KM].

(ii) Une autre variante pour la proposition 5.2 est la suivante (même preuve) :
Soit X une variété algébrique ou analytique complexe de dimension n. Soit $\mathcal{S}$ une stratification de Whitney de X. Soit $s = \dim \mathrm{Sing}_{\mathcal{S}}(f)$, où $\mathrm{Sing}_{\mathcal{S}}(f) = \cup_{S \in \mathcal{S}} \mathrm{Sing}(f_{|S})$ pour une fonction régulière ou analytique $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$.
Alors toutes les fibres de Milnor locales F_x de f satisfont $\tilde{H}^k(F_x, \mathbb{C}) = 0$ pour $0 \leq k \leq n - 2 - s$.

En utilisant cette variante, on peut établir le résultat suivant

Proposition 5.3 *Soit* $x \in X$ *un point d'une variété algébrique ou analytique complexe* X*,* $X \subset \mathbb{C}^N$ *et soit* $n = \dim_x X$*. Soit* l *une forme linéaire générique sur* $\mathbb{C}^N$ *avec la propriété* $l(x) = 0$*.*
Alors le «link complexe» $L(x) = B_\epsilon(x) \cap l^{-1}(t)$*,* $0 < |t| \ll \epsilon$ *au point* x *satisfait* $\tilde{H}^k(L(x), \mathbb{C}) = 0$ *pour* $0 \leq k \leq n - 2$*.*

Preuve. On prend une stratification $\mathcal{S}$ de X tel que $\{x\}$ soit une strate. On peut choisir la forme linéaire l telle que $\mathrm{Sing}_{\mathcal{S}}(l) = \{x\}$.

Pour finir, on remarque que le «link complexe» $L(x)$ est la fibre de Milnor locale de la fonction l au point x. $\square$

Remarque 5.2 On sait en effet que le link complexe est $(n-2)$-connexe ayant le type d'homotopie d'un bouquet de $(n-1)$-sphères ; voir Tibăr [Ti].

Soit $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ un polynôme. Pour simplifier la notation, on pose $X = \mathbb{C}^n$, $S = \mathbb{C}$. On sait d'après la théorie des stratifications, qu'il existe un ensemble fini $B \subset S$, appelé ensemble de bifurcation de f tel que la restriction de f induit une fibration localement triviale $X \backslash f^{-1}(B) \longrightarrow S \backslash B$. On note $F_b = f^{-1}(b)$ et F la fibre générique de f, c'est-à-dire $F = f^{-1}(s)$ pour $s \in S \backslash B$.

Proposition 5.4 *On a équivalence entre les affirmations suivantes*

(i) $\tilde{b}_i(F) = 0$ *pour* $0 \leq i \leq m$,

(ii) $R^0 f_*(\mathbb{C}_X) = \mathbb{C}_S$, $R^i f_*(\mathbb{C}_X) = 0$, $1 \leq i \leq m$.

Preuve.
(ii) $\Rightarrow$ (i)
Soit D un disque assez petit de centre une valeur régulière de référence, $T = f^{-1}(D)$ est le tube autour de la fibre générique. On a

$$H^i(F) = H^i(T) = R^i f_*(\mathbb{C}_X)(D) = \begin{cases} \mathbb{C} \text{ si } i = 0, \\ 0 \text{ si } 1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii)
Pour une fibre en une valeur régulière $s \in S \backslash B$, le raisonnement précédent nous dit que $R^0 f_*(\mathbb{C}_X)$ est le faisceau constant au voisinage de s, $R^i f_*(\mathbb{C}_X)_s = 0$ pour $0 < i \leq m$. Pour une valeur irrégulière $b \in B$, on pose comme dans la figure suivante $A_1 = A \cup D \cup C$. A étant un disque plongé dans le plan complexe contenant toutes les autres valeurs irrégulières, C un chemin simple reliant les deux disques D et A.

Les croix représentent les valeurs irrégulières.

On a une rétraction de $\mathbb{C}$ sur A_1 et comme on a une fibration en dehors de A_1, on a aussi une rétraction de $\mathbb{C}^n$ sur $f^{-1}(A_1)$. La suite de Mayer-Vietoris nous donne

$$\cdots \to H^k(f^{-1}(A_1)) \to H^k(f^{-1}(A)) \oplus H^k(f^{-1}(D \cup C)) \to H^k(F) \to H^{k+1}(f^{-1}(A_1)) \to \cdots$$

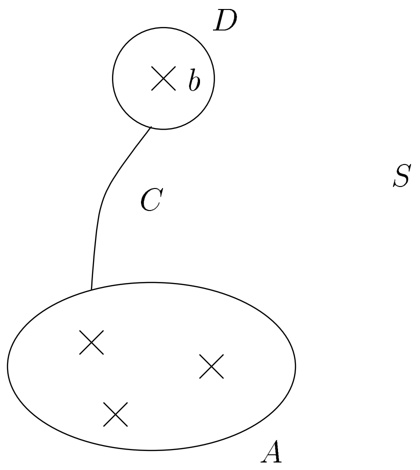

FIG. 5.1 – *Figure*

et $H^k(f^{-1}(D \cup C)) = H^k(f^{-1}(D)) = H^k(T_b) = \begin{cases} \mathbb{C} \text{ si } i = 0 \\ 0 \text{ si } 1 \leq k \leq m \end{cases}$ $\square$

Remarque 5.3 Dans le cas où l'on pose $\mathcal{F} = R^i f_*(\mathbb{C}_X)$, c'est un faisceau constructible sur $\mathbb{C}$. On a le triangle suivant (voir la définition des cycles évanescents)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_b \arrow[rr, "c=j^*"] & & \psi_{t-b}(\mathcal{F}) \arrow[dl] \\ & \varphi_{t-b}(\mathcal{F}) \arrow[ul, "{[+1]}"] & \end{tikzcd}$$

Comme $\mathcal{F}_b = H^i(T_b)$, $\psi_{t-b}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_c = H^i(F_c) = H^i(F)$ et le morphisme de comparaison est induit par l'inclusion $F_c \longrightarrow T_b$, on a

$$\varphi^0_{t-b}(\mathcal{F}) = \mathcal{H}^0(\varphi_{t-b}(\mathcal{F})) = \text{Coker }(j^* : H^i(T_b) \longrightarrow H^i(F)) = V^i(b).$$

Donc on retrouve bien la notion de cycles évanescents de l'article Neumann-Norbury [NN]. Remarquons aussi que la suite exacte longue précédente nous donne l'injectivité du morphisme j^* et donc «le complexe» $\varphi_{t-b}(\mathcal{F})$ est concentré en degré 0. Donc on peut identifier $\varphi_{t-b}(\mathcal{F}) = \varphi^0_{t-b}(\mathcal{F})$. On a aussi $H^i(T_b) = 0$ pour $i \geq n$.

Soit $f : X \to S$ une fonction polynomiale non constante avec une fibre générique F connexe. Comme avant on regarde $\mathcal{O}_X$ comme un $\mathcal{D}_X$-module algébrique. Soit $\mathcal{K}^\bullet_f = f_+(\mathcal{O}_X)$

le complexe de $\mathcal{D}_S$-modules (le système de Gauss-Manin de f) défini par le foncteur image directe f_+, voir [B2]. On regarde ses sections globales $K_f^\bullet = \Gamma(S, \mathcal{K}_f^\bullet)$, un complexe de A_1-modules, où $A_1 = \mathbb{C}[t] < \partial >$ est l'algèbre de Weyl. Alors on a

$$K_f^\bullet : 0 \longrightarrow \Omega^0[\partial] \xrightarrow{d_f} \Omega^1[\partial] \xrightarrow{d_f} \cdots \xrightarrow{d_f} \underset{\bullet}{\Omega^n[\partial]} \longrightarrow 0$$

où $d_f(\omega\partial^k) = d\omega\partial^k - df \wedge \omega\partial^{k+1}$, pour plus de détails, voir [DS2] et [S2]. En particulier, la structure de A_1-module sur $\Omega^k[\partial]$ est définie par

$$\begin{cases} t.\omega\partial^i = f\omega\partial^i - i\omega\partial^{i-1}, \\ \partial.\omega\partial^i = \omega\partial^{i+1}. \end{cases}$$

On pose $\mathcal{G}_f^i = \mathcal{H}^i(\mathcal{K}_f^\bullet)$, $G_f^i = H^i(K_f^\bullet)$.

Exemple 5.1 Si $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ est sans singularités alors

$$G_f^0 = H^0(K_f^\bullet) = \frac{\Omega^2}{df \wedge d\Omega^0} = \frac{\mathbb{C}[x,y]}{D_f(\mathbb{C}[x,y])},$$

où $D_f(g) = Jac(f,g) = f_x g_y - f_y g_x$ est une dérivation de l'anneau $\mathbb{C}[x,y]$.

La relation entre le point de vue topologique et le point de vue D-modules est donnée par le résultat suivant, voir [B2].

Théorème 5.1 *Les images directes commutent avec DR,*

$$DR(f_+(\mathcal{O}_X)) = Rf_*(DR(\mathcal{O}_X)) = Rf_*(\mathbb{C}_X[n]).$$

DR est aussi compatible avec les t-structures (théorème 4.2) ce qui implique que

$$DR(\mathcal{H}^i(f_+(\mathcal{O}_X))) = {}^p\mathcal{H}^i(Rf_*(\mathbb{C}_X[n])) \in Perv(S).$$

Notation. ${}^pR^if_*(\mathbb{C}_X[n]) = {}^p\mathcal{H}^i(Rf_*(\mathbb{C}_X[n]))$.

Proposition 5.5 ([S2], [DS2]) ${}^pR^if_*(\mathbb{C}_X) = (R^{i-1}f_*\mathbb{C}_X)[+1]$.
En particulier $DR(\mathcal{G}_f^m) = R^{n+m-1}(f_*\mathbb{C}_X)[+1]$ *pour tout entier* m.

Preuve.
La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^0({}^pR^if_*\mathbb{C}_X) \longrightarrow R^if_*\mathbb{C}_X \longrightarrow \mathcal{H}^{-1}({}^pR^{i+1}f_*\mathbb{C}_X) \longrightarrow 0$$

et le fait que $\Gamma_{\{s\}}(\mathcal{H}^{-1}({}^pR^{i+1}f_*\mathbb{C}_X)) = 0$ pour tout $s \in S$ impliquent que le faisceau $\mathcal{H}^0({}^pR^if_*\mathbb{C}_X)$ (qui a un support fini) coïncide avec $\Gamma_B R^if_*\mathbb{C}_X$. D'autre part, la suite exacte de Leray

$$E_2^{p,q} = H^p(S, R^qf_*\mathbb{C}_X) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{C})$$

vérifie $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ car le faisceau $R^if_*\mathbb{C}_X$ est semi pervers (par la définition de ${}^pD_c^{\leq 0}(S)$!) et donc $E_2^{p,q} = 0$ pour $p \neq 0, 1$. Cela donne l'annulation $H^0(S, R^if_*\mathbb{C}_X) = 0$ pour $i > 0$. On a aussi $R^0f_*\mathbb{C}_X = \mathbb{C}_S$, la fibre F étant connexe.
Cela donne $\Gamma_B R^if_*\mathbb{C}_X = 0$ pour tout i. En effet, on a toujours $\Gamma_B R^if_*\mathbb{C}_X \subset H^0(S, R^if_*\mathbb{C}_X)$, ce qui donne le résultat pour $i > 0$. Le cas $i = 0$ est évident.
On a donc obtenu que $H^0({}^pR^if_*\mathbb{C}_X) = 0$ et que le faisceau pervers ${}^pR^if_*\mathbb{C}_X$ coïncide avec le faisceau $\mathcal{H}^{-1}({}^pR^if_*\mathbb{C}_X)[1] = (R^{i-1}f_*\mathbb{C}_X)[1]$. □

Corollaire 5.1 *Pour tout point $b \in S$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on a un isomorphisme*

$$\varphi_{t-b}(R^kf_*\mathbb{C}_X) = \varphi_{t-b}^k(Rf_*\mathbb{C}_X)$$

où $\varphi_{t-b}^k = H^k \circ \varphi_{t-b}$.

Preuve. En utilisant la proposition 5.5 et le théorème 4.3 (iii), on a

$$\begin{aligned} \varphi_{t-b}(R^kf_*\mathbb{C}_X) &= \varphi_{t-b}({}^pR^{k+1}f_*\mathbb{C}_X[-1]) = {}^p\varphi_{t-b}({}^pR^{k+1}f_*\mathbb{C}_X) \\ &= {}^p\varphi_{t-b}({}^p\mathcal{H}^{k+1}Rf_*\mathbb{C}_X) = {}^p\mathcal{H}^{k+1}({}^p\varphi_{t-b}Rf_*\mathbb{C}_X) \\ &= H^k(\varphi_{t-b}Rf_*\mathbb{C}_X) \end{aligned}$$

□

Corollaire 5.2 *Les affirmations suivantes sont équivalentes*
(i) $\tilde{b}_i(F) = 0$ *pour* $0 \leq i \leq m$,
(ii) $\mathcal{G}_f^{1-n} = \mathcal{O}_S$ *et* $\mathcal{G}_f^j = 0$ *pour* $1 - n < j \leq m - n + 1$.

On rappelle la définition de l'image inverse $f^!$ pour les D-modules dans un cas trés spécial.

Définition 5.1 *Soit $s \in S$, $i_s : \{s\} \longrightarrow \mathbb{C}$. Si $M^\bullet \in D^b_{rh}(\mathcal{D}_S)$, on définit*

$$i_s^!M^\bullet = Cône(t - s : M_s^\bullet \longrightarrow M_s^\bullet)$$

donc on a le triangle

$$\begin{tikzcd} M_s^\bullet \arrow[rr, "t-s"] & & M_s^\bullet \arrow[dl] \\ & i_s^! M^\bullet \arrow[ul, "{[+1]}"] & \end{tikzcd}$$

En particulier si M est un $\mathcal{D}_S$-module, le complexe $i_s^! M$ a au plus deux groupes de cohomologie non nuls

$$H^1(i_s^!(M)) = \text{Coker } (t-s),\ H^0(i_s^!(M)) = \text{Ker } (t-s)$$

où $t-s$ agit sur M_s (le localisé de M en s) ou même sur M (un exercice facile).

Proposition 5.6 ([DS2])

$$0 \longrightarrow H^1(i_s^! \mathcal{G}_f^{i-1}) \longrightarrow H_c^{n-i}(F_s)^\vee \longrightarrow H^0(i_s^! \mathcal{G}_f^i) \longrightarrow 0$$

Preuve. Il existe une suite spectrale (qui provient de la suite spectrale après la définition 2.2)

$$E_2^{p,q} = H^p(i_s^! \mathcal{G}_f^q) \Rightarrow H^{p+q}(i_s^! f_+(\mathcal{O}_X))$$

où $E_2^{p,q} = 0$ pour $p \notin \{0, 1\}$.

Il suffit de montrer $H_c^{n-i}(F_s)^\vee = H^{p+q}(i_s^! f_+(\mathcal{O}_X))$. Pour cela, on commence avec l'égalité

$$i_s^! f_+(\mathcal{O}_X) = DR_s(i_s^! f_+(\mathcal{O}_X))$$

(on a un complexe sur un point donc DR_s est l'identité). DR commute avec $i_s^! f_+$ donc $i_s^! f_+(\mathcal{O}_X) = i_s^! Rf_*(DR(\mathcal{O}_X)) = i_s^! Rf_*(\mathbb{C}_X[n])$.
On a $D(\mathbb{C}_X[n]) = \mathbb{C}_X[n]$ donc $D(i_s^! Rf_*(\mathbb{C}[n])) = i_s^* Rf_!(D\mathbb{C}_X[n]) = i_s^* Rf_!(\mathbb{C}_X[n]) =$ $(Rf_! \mathbb{C}_X[n])_s = R\Gamma_c(F_s, \mathbb{C})[n]$. Ici, on a utilisé les propriétés 3.7 de la dualité de Verdier. Conclusion $H^i(i_s^! f_+(\mathcal{O}_X)) = H^{-i}(R\Gamma_c(F_s, \mathbb{C})[n])^\vee = H_c^{n-i}(F_s)^\vee$. □

Proposition 5.7 *Si $\tilde{b}_j(F) = 0$ pour $0 \leq j \leq m$ alors $H_c^k(F_b) = 0$ pour $2n - m - 1 \leq k \leq 2n - 3$ et tout $b \in \mathbb{C}$.*
En particulier si F_b est lisse et connexe $H_c^k(F_b) \simeq H^{2n-2-k}(F_b)$ d'où

$$H^0(F_b) = \mathbb{C},\ H^1(F_b) = 0, \cdots, H^{m-1}(F_b) = 0.$$

Preuve. On a deux solutions

1) (preuve via les D-modules)
On utilise les trois faits suivants
$R^0 f_*(\mathbb{C}_X) = \mathbb{C}_S$, $R^i f_*(\mathbb{C}_X) = 0$, $1 \le i \le m$ (proposition 5.4),
$DR(\mathcal{G}_f^i) = {}^p R^{i+n} f_*(\mathbb{C}_X) = R^{i+n-1} f_*(\mathbb{C}_X)[+1]$ (proposition 5.5) et
$DR(M) = 0$ si et seulement si $M = 0$ (car on a une équivalence de catégorie).
Ce qui implique que $\mathcal{G}_f^i = 0$ pour $2 - n \le i - 1 \le i \le m + 1 - n$. Pour finir, on utilise la proposition 5.6.

2) (preuve topologique via [NN])
On dispose de la suite exacte pour la cohomologie à support compact

$$\cdots \longrightarrow H_c^j(T \backslash F_b) \longrightarrow H_c^j(T) \longrightarrow H_c^j(F_b) \longrightarrow H_c^{j+1}(T \backslash F_b) \longrightarrow \cdots$$

où T est le tube $f^{-1}(D_\epsilon(b))$ autour de la fibre pour ϵ assez petit.
Par dualité, on a $\tilde{H}_c^j(T) = \tilde{H}^{2n-j}(T)^\vee$ or ce dernier groupe est nul pour $0 \le 2n - j \le m$ puisque l'on a une injection de $H^j(T)$ dans $H^j(F)$.
Maintenant, la suite exacte de Wang

$$\cdots \longrightarrow H^{2n-j-1}(F) \longrightarrow H_c^j(T \backslash F_b) = H^{2n-j}(T \backslash F_b) \longrightarrow H^{2n-j}(F) \longrightarrow H^{2n-j}(F) \longrightarrow \cdots$$

nous donne le résultat pour $2n - m \le j \le 2n - 3$. Pour l'indice $2n - m - 1$ on remarque que la flèche $H_c^j(T \backslash F_b) \longrightarrow H_c^j(T)$ est surjective d'après l'article de Neumann-Norbury [NN].
□

Définition 5.2 *On dit que $f : X \longrightarrow S$ a au plus des singularités cohomologiquement isolées sur X et à l'infini si il existe une compactification relative $\overline{f} : \overline{X} \longrightarrow S$ de f telle que $\overline{X}$ est une variété quasi-projective, $\overline{f}$ est propre et $\Sigma_s = \mathrm{supp}\varphi_{\overline{f}-s} Rj_* \mathbb{C}_X$ est fini pour tout $s \in S$, $j : X \longrightarrow \overline{X}$ étant l'inclusion.*
Si en plus $\Sigma_s \subset X$ pour tout s on dit que f est un polynôme cohomologiquement modéré.

Le faisceau $\mathbb{C}_X[n]$ étant pervers par le théorème 4.1 et l'inclusion $j : X \longrightarrow \overline{X}$ étant quasi-finie et affine, on déduit que $Rj_* \mathbb{C}_X[n] \in Perv(\overline{X})$, voir remarque 4.3.
Le faisceau $\mathcal{E}_s = {}^p\varphi_{\overline{f}-s} Rj_* \mathbb{C}_X[n]$ est alors un faisceau pervers à support dans Σ_s donc pour chaque point $x \in \Sigma_s$, on a un espace vectoriel $E_x = \mathcal{H}^0(\mathcal{E}_{s,x})$.

Proposition 5.8 *Soit $f : X \longrightarrow S$ un polynôme à singularités cohomologiquement isolées sur X et à l'infini.*

Alors f a au plus des singularités isolées sur X et on a

$$\dim(E_x) = \mu(f, x) = \mu(x)$$

le nombre de Milnor de f au point $x \in X$.

Preuve. Il suffit de montrer que

$$\Sigma_s \cap X = \mathrm{Sing}(F_s).$$

L'inclusion $\Sigma_s \cap X \subset \mathrm{Sing}(F_s)$ se déduit de l'exemple 3.5. L'autre inclusion $\mathrm{Sing}(F_s) \subset \Sigma_s \cap X$ provient du fait que la fibre de Milnor locale F_x vérifie $\tilde{H}^*(F_x, \mathbb{C}) = 0$ si et seulement si x n'est pas une singularité pour f, c'est-à-dire $df(x) \neq 0$, voir [AC]. $\square$

Si $x \in \Sigma_s \cap (\overline{X} \backslash X)$, on appelle x une singularité à l'infini pour f et on pose

$$\nu(x) = \dim E_x,\ \mu = \sum_{x \in X} \mu(x),\ \nu = \sum_{x \in \overline{X} \backslash X} \nu(x).$$

Avec ces notations, on a le résultat suivant

Théorème 5.2 *Soit $f : X \longrightarrow S$ un polynôme à singularités cohomologiquement isolées sur X et à l'infini. Alors*

(i) $\tilde{H}^k(F, \mathbb{C}) = 0$ *pour* $k < n - 1$ *et* $\dim H^{n-1}(F, \mathbb{C}) = \mu + \nu$,

(ii) $\tilde{H}^k(F_b, \mathbb{C}) = 0$ *pour* $b \in B$ *et* $k < n - 2$. *Si* $\Sigma_b \subset X$, *alors on a aussi* $\tilde{H}^{n-2}(F_b, \mathbb{C}) = 0$, *car le morphisme* $H^\bullet(T_b) \longrightarrow H^\bullet(F_b)$ *induit par l'inclusion est un isomorphisme dans ce cas.*

(iii) $\chi(F_b) = \chi(F) + (-1)^n(\mu_b + \nu_b)$ *où* $\mu_b = \sum_x \mu(x)$, $\nu_b = \sum_x \nu(x)$, *les deux sommes étant pour* $x \in \overline{f}^{-1}(b)$.

Preuve. (i) On a $Rf_*\mathbb{C}_X = R\overline{f}_* Rj_*\mathbb{C}_X$ donc en utilisant le corollaire 5.1 et la proposition 3.13 on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi_{t-b}(R^k f_* \mathbb{C}_X) &= \varphi^k_{t-b}(Rf_*\mathbb{C}_X) = \varphi^k_{t-b}(R\overline{f}_* Rj_*\mathbb{C}_X) \\
&= \mathbb{H}^k(\overline{F}_b, \varphi_{\overline{f}-b} Rj_*\mathbb{C}_X) = \mathbb{H}^{k-n+1}(\Sigma_b, {}^p\varphi_{\overline{f}-b} Rj_*\mathbb{C}_X[n]) \\
&= 0 \text{ pour } k \neq n-1
\end{aligned}$$

car le faisceau ${}^p\varphi_{\overline{f}-s} Rj_*\mathbb{C}_X[n]$ est pervers sur Σ_b voir le théorème 4.3 (iii), le théorème 4.1 et la remarque 4.3 (ii). Donc d'après l'exercice 3.2, les faisceaux constructibles $R^k f_* \mathbb{C}_X$ sont

localement constants pour $k < n-1$, et en effet constants, car la base $S = \mathbb{C}$ est contractile. La suite spectrale de Leray pour $f : X \longrightarrow S$ et le fait que $\tilde{H}^*(X, \mathbb{C}) = \tilde{H}^*(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}) = 0$ impliquent alors $R^0 f_* \mathbb{C}_X = \mathbb{C}_S$ et $R^k f_* \mathbb{C}_X = 0$ pour $0 < k < n-1$.
La proposition 5.4 nous donne alors $\tilde{b}_k(F) = 0$ pour $k < n-1$.

La fibre générique F étant une variété affine de dimension $n-1$, on a aussi $b_k(F) = 0$ pour $k > n-1$, voir la proposition 5.1.
Pour obtenir la valeur de $b_{n-1}(F)$, il suffit maintenant d'utiliser l'exercice 3.4 (ii) avec $S = \mathbb{C}$, $\mathcal{F}^\bullet = Rf_*(\mathbb{C}_X)$.
L'affirmation (iii) du théorème est une conséquence immédiate du même exercice 3.4 (ii) en prenant cette fois $S = D_b$, un petit disque centré au point $b \in \mathbb{C}$, $\mathcal{F}^\bullet = Rf_*(\mathbb{C}_X)_{|D_b}$ et en utilisant l'égalité suivante

$$\chi(T_b) = \chi(F_b).$$

En effet, la caractéristique d'Euler des variétés analytiques complexes est additive par rapport aux partitions constructibles, voir Fulton [F], p. 141-142 donc

$$\chi(T_b) = \chi(F_b) + \chi(T_b \backslash F_b).$$

Mais l'espace $T_b \backslash F_b$ est l'espace total d'une fibration localement triviale de base D_b^* et de fibre F. On a alors

$$\chi(T_b \backslash F_b) = \chi(D_b^*)\chi(F) = 0$$

voir Bott-Tu [BT], p.182.

Pour la preuve de l'affirmation (ii) nous allons supposer que $b = 0$ et nous introduirons les notations suivantes : $f_0 = f_{|F_0}$, $\overline{f}_0 = \overline{f}_{|\overline{F}_0}$ et les inclusions suivantes

$$\begin{tikzcd} F_0 \arrow[r, "j_0"] \arrow[d, "k"] & \overline{F}_0 \arrow[d, "\overline{k}"] & \overline{F}_0 \cap X_\infty \arrow[l, "i_0"'] \arrow[d, "k_\infty"] \\ X \arrow[r, "j"] & \overline{X} & X_\infty \arrow[l, "i"'] \end{tikzcd}$$

où $X_\infty = \overline{X} \backslash X$. Notre preuve suit dans les grandes lignes une preuve du papier de Hamm [Ha2].

On veut utiliser le morphisme naturel

$$(*) \qquad H^m(T_0, \mathbb{C}) \longrightarrow H^m(F_0, \mathbb{C})$$

induit par l'inclusion de la fibre F_0 dans son tube T_0.

On a les isomorphismes évidents suivants

$$\begin{aligned} H^m(T_0,\mathbb{C}) &= R^m f_*(\mathbb{C}_X)_0 = \mathbb{R}^m \overline{f}_*(Rj_*\mathbb{C}_X)_0 \\ &= \mathbb{H}^m(\overline{F_0}, \overline{k}^{-1} Rj_*\mathbb{C}_X) = \mathbb{R}^m \overline{f}_{0*}(\overline{k}^{-1} Rj_*\mathbb{C}_X) \end{aligned}$$

(le deuxième provient de $Rf_* = R\overline{f}_* \circ Rj_*$ et le troisième du fait que $\overline{f}$ est propre).
D'autre part on les isomorphismes suivants

$$\begin{aligned} H^m(F_0,\mathbb{C}) &= H^m(F_0, k^{-1}\mathbb{C}_X) = \mathbb{H}^m(\overline{F}_0, Rj_{0*}k^{-1}\mathbb{C}_X) \\ &= \mathbb{R}^m \overline{f}_{0*}(Rj_{0*}k^{-1}\mathbb{C}_X) = \mathbb{R}^m \overline{f}_{0*}(Rj_{0*}j_0^{-1}\overline{k}^{-1} Rj_*\mathbb{C}_X) \end{aligned}$$

(le dernier isomorphisme vient des isomorphismes $j_0^{-1}\overline{k}^{-1} Rj_*\mathbb{C}_X = k^{-1}j^{-1}Rj_*\mathbb{C}_X = k^{-1}\mathbb{C}_X$).
Donc le morphisme (*) induit par l'inclusion $F_0 \longrightarrow T_0$ peut être remplacé par un morphisme

$$(**) \qquad \mathbb{R}^m \overline{f}_{0*}(\mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{R}^m \overline{f}_{0*}(Rj_{0*}j_0^{-1}\mathcal{F}^\bullet)$$

avec $\mathcal{F}^\bullet = \overline{k}^{-1} Rj_*\mathbb{C}_X$ qui provient en effet du morphisme d'adjonction $\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow Rj_{0*}j_0^{-1}\mathcal{F}^\bullet$ par l'application du foncteur $\mathbb{R}^m\overline{f}_{0*}$.
Nous considérons maintenant le triangle distingué d'adjonction suivant

$$(\Delta) \qquad i_{0!}i_0^!\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow Rj_{0*}j_0^{-1}\mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{+1}$$

Soit $\mathcal{G}^\bullet = i_{0!}i_0^!\mathcal{F}^\bullet$. Alors on a une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{R}^m\overline{f}_{0*}\mathcal{G}^\bullet \longrightarrow \mathbb{R}^m\overline{f}_{0*}\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathbb{R}^m\overline{f}_{0*}Rj_{0*}j_0^{-1}\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}\overline{f}_{0*}\mathcal{G}^\bullet \longrightarrow \cdots$$

et il suffit de montrer que $\mathbb{R}^m\overline{f}_{0*}\mathcal{G}^\bullet = 0$ pour $m \leq n-2$ et aussi pour tout m si $\Sigma_0 \subset X$.
On a deux triangles distingués dans $D_c^b(\overline{F}_0)$, voir l'indication pour l'exercice 3.4

$$(\mathrm{T1}) \qquad {}^p\psi_{\overline{f}} Rj_*\mathbb{C}_X[n] \xrightarrow{\mathrm{can}} {}^p\varphi_{\overline{f}} Rj_*\mathbb{C}_X[n] \longrightarrow \overline{k}^{-1} Rj_*\mathbb{C}_X[n] \xrightarrow{+1}$$

$$(\mathrm{T2}) \qquad \overline{k}^! Rj_*\mathbb{C}_X[n] \longrightarrow {}^p\varphi_{\overline{f}} Rj_*\mathbb{C}_X[n] \xrightarrow{\mathrm{var}} {}^p\psi_{\overline{f}} Rj_*\mathbb{C}_X[n] \xrightarrow{+1}$$

On applique le δ-foncteur $i_0^!$ au triangle (T2) en remarquant que $i_0^! \overline{k}^! Rj_* = k_\infty^! Rj_* = 0$ par le corollaire 2.2.
Donc le triangle (T2) nous donne un quasi-isomorphisme

$$i_0^!{}^p\varphi_{\overline{f}} Rj_* \mathbb{C}_X[n] \longrightarrow i_0^!{}^p\psi_{\overline{f}} Rj_* \mathbb{C}_X[n].$$

Le faisceau ${}^p\varphi_{\overline{f}} Rj_* \mathbb{C}_X[n]$ est pervers de support Σ_0, donc il peut être remplacé par une collection finie d'espaces vectoriels $(E_x)_{x \in \Sigma_0}$.
La description du foncteur $i_0^!$ donnée dans la proposition 3.2 nous montre que le faisceau $\mathcal{A} = i_0^!{}^p\varphi_{\overline{f}} Rj_* \mathbb{C}_X[n]$ peut être identifié à la sous collection $(E_x)_{x \in \Sigma_0^\infty}$ avec $\Sigma_0^\infty = \Sigma_0 \cap X_\infty$.
Maintenant, on applique le δ-foncteur $R\overline{f}_{0*} i_{0!} i_0^!$ au triangle (T1) et on obtient

$$(***) \qquad \cdots \longrightarrow \mathbb{H}^m(\Sigma_0^\infty, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{H}^m(\Sigma_0^\infty, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}\overline{f}_0 \mathcal{G}^\bullet \longrightarrow \mathbb{H}^{m+1}(\Sigma_0^\infty, \mathcal{A}) \longrightarrow \cdots$$

L'affirmation (ii) s'ensuit du fait que en général $\mathbb{H}^m(\Sigma_0^\infty, \mathcal{A}) = 0$ pour $m \neq 0$ et dans le cas $\Sigma_0^\infty = \emptyset$, on a même $\mathcal{A} = 0$. $\square$

Remarque 5.4 C. Sabbah dans [S2] considère le cas plus général d'une fonction régulière $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathcal{U}$ étant affine lisse et f étant cohomologiquement modéré. Dans [DS2] le cas d'une fonction régulière $f : X \longrightarrow S$ est traité où X et S sont des variété algébriques avec $\dim X = n$, $\dim S = 1$, et f est supposée à singularité cohomologiquement isolées sur X et à l'infini. Et H. Hamm considère dans [Ha2] le cas $f : X \longrightarrow S$ où X, S sont des espaces complexes, $\dim X = n$, $\dim S = 1$ et il remplace $\mathbb{C}_X[n]$ par un faisceau $\mathcal{F}^\bullet$ qui est $\mathbb{Z}$-pervers sur X.
Dans ces situations plus générales, tous les énoncés précédents restent vrais avec certaines modifications.

Soit $\theta : \mathbb{H}^0(\Sigma_0^\infty, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{H}^0(\Sigma_0^\infty, \mathcal{A})$ le morphisme induit par can qui apparait dans la suite exacte (***). On sait d'aprés la description du faisceau $\mathcal{A}$ que $\dim H^0(\Sigma_0^\infty, \mathcal{A}) = \nu_0$.
L'exemple suivant montre que on peut avoir Ker $\theta = 0$ même pour le cas $\nu_0 > 0$.

Exemple 5.2 La preuve du théorème 5.2 nous donne une suite exacte

$$0 \to H^{n-2}(T_0) \to H^{n-2}(F_0) \to \mathrm{Ker}\,\theta \to H^{n-1}(T_0) \to H^{n-1}(F_0) \to \mathrm{Coker}\,\theta \to 0$$

Pour $n = 2$, soit $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(x, y) = x^2 y + x$. Alors on sait que $\nu_0 = 1$, $b_0(T_0) = 1$, $b_0(F_0) = 2$, $b_1(T_0) = 0$ donc dim(Ker θ) $= 1$, c'est-à-dire $\theta = 0$.
Par contre, pour le polynôme de Briançon $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, voit [ACD], on a deux fibres spéciales F_0 et $F_{\neq 0}$, toutes les deux connexes, la fibre $F_{\neq 0}$ correspondant à la valeur $b = -16/9$. On

sait que $b_0(T_{\neq 0}) = b_0(F_{\neq 0}) = 1$, Ker $\theta = 0$ et $\nu_{\neq 0} = 3$, voir [ACD], fin de l'exemple 4. Donc dans ce cas θ est un isomorphisme.
Pour l'autre fibre spéciale F_0 on a $b_0(T_0) = b_0(F_0) = 1$, $b_1(T_0) = b_1(F_0) = 3$, et $\dim(\mathrm{Ker}\ \theta) = 1 = \nu_0$. Donc dans ce cas $\theta = 0$ et le morphisme $H^1(T) \longrightarrow H^1(F_0)$ n'est pas injectif.
Plus généralement si $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ et si la fibre F_0 est connexe, alors le diagramme dans [ACD], p. 339 montre que

$$\dim(\mathrm{Ker}\ \theta) = \sum_{P \in Dic_0} (n(P) - 1)$$

où Dic_0 et les entiers $n(P) \geq 1$ sont définis comme dans [ACD] à partir d'une compactification de l'application f.

Pour une fibre F_b d'un polynôme f, on peut définir son entrelacs à l'infini

$$L_\infty(\mathcal{F}_b) = F_b \cap S_R^{2n-1}$$

où S_R^{2n-1} est la sphère centrée à l'origine et de rayon $R \gg 0$, voir [D1], p. 28.
Si $j : X \longrightarrow \overline{X}$ est une compactification du polynôme f, alors l'unicité du voisinage tubulaire, voir [Du], montre qu'on a une équivalence d'homotopie

$$L_\infty(F_b) = L_{\overline{F}_b}(Z_b)$$

où $Z_b = \overline{F}_b \cap X_\infty$, voir l'exemple 2.5.
La remarque 2.4 nous donne un triangle distingué dans $D_c^b(\overline{X})$

$$Rj_!\mathbb{Q}_X \longrightarrow Rj_*\mathbb{Q}_X \longrightarrow i_*i^{-1}Rj_*\mathbb{Q}_X \xrightarrow{+1}$$

En appliquant le foncteur $R\overline{f}_* = R\overline{f}_!$ on obtient

$$(\dagger) \qquad R\overline{f}_!\mathbb{Q}_X \longrightarrow R\overline{f}_*\mathbb{Q}_X \xrightarrow{\alpha} R\overline{f}_*(\mathcal{F}_\infty^\bullet) \xrightarrow{+1}$$

où $\mathcal{F}_\infty^\bullet = i_*i^{-1}Rj_*\mathbb{Q}_X$.
Soit $f_\infty = \overline{f}_{|X_\infty} = \overline{f} \circ i$. Alors on a aussi $R\overline{f}_*(\mathcal{F}_\infty^\bullet) = Rf_\infty(i^{-1}Rj_*\mathbb{Q}_X)$. Avec ces notations, on a le résultat suivant qui compare la cohomologie du faisceau $\mathcal{F}_\infty^\bullet$ et la cohomologie des entrelacs à l'infini d'un polynôme.

Théorème 5.3 *Supposons que le polynôme $f : X \longrightarrow S$ est à singularités isolées sur X et à l'infini.*
Alors on a

(i) $\mathbb{R}^0\overline{f}_*(\mathcal{F}_\infty^\bullet) = \mathbb{R}^{2n-3}\overline{f}_*(\mathcal{F}_\infty^\bullet) = \mathbb{C}_S$ *pour* $n \geq 3$ *et* $\mathbb{R}^m\overline{f}_*(\mathcal{F}_\infty^\bullet) = 0$ *pour* $0 < m < n-2$ *et pour* $n \leq m < 2n-3$,

(ii) $\mathbb{R}^m \overline{f}_*(\mathcal{F}^\bullet_\infty)_0 = H^m(L_\infty(F_0))$ *pour* $m \neq n-2,\ n-1$,

(iii) une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^{n-2}\overline{f}_*(\mathcal{F}^\bullet_\infty)_0 \longrightarrow H^{n-2}(L_\infty(F_0)) \longrightarrow \mathrm{Ker}\ \theta \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}\overline{f}_*(\mathcal{F}^\bullet_\infty)_0 \longrightarrow H^{n-1}(L_\infty(F_0)) \longrightarrow \mathrm{Coker}\ \theta \longrightarrow 0$$

(iv) si le polynôme f *est cohomologiquement modéré, alors les faisceaux* $\mathbb{R}^m \overline{f}_*(\mathcal{F}^\bullet_\infty)$ *sont constants pour tout* m.
En particulier, la cohomologie $H^m(L_\infty(F_0))$ *de l'entrelacs à l'infini de la fibre* F_b *est indépendante de* b.

Preuve. L'affirmation (i) s'ensuit de la suite exacte longue de cohomologie associée au triangle distingué (T), en vue des résultats d'annulation du théorème 5.2 et des propositions 5.4 et 5.7.
Pour les affirmations (ii) et (iii) on remarque que, avec les notations du théorème 5.2 on a $\mathbb{R}^m \overline{f}_*(\mathcal{F}^\bullet_\infty)_0 = \mathbb{H}^m(\overline{F}_0, \mathcal{F}^\bullet_\infty) = \mathbb{H}^m(Z_0, k_\infty^{-1} Rj_*\mathbb{Q}_X) = \mathbb{H}^m(Z_0, i_0^{-1}\mathcal{F}^\bullet)$ où $\mathcal{F}^\bullet = \overline{k}^{-1} Rj_*\mathbb{Q}_X$.
Dans le triangle d'adjonction (Δ) de la preuve du théorème 5.2 on applique le foncteur i_0^{-1} et on obtient le triangle

$$i_0^! \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow i_0^{-1}\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow i_0^{-1} Rj_{0*}\mathbb{C}_{F_0} \xrightarrow{+1}$$

La suite exacte longue de cohomologie associée à ce dernier triangle s'identifie à la suite

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{R}^m \overline{f}_{0*}\mathcal{G}^\bullet \longrightarrow \mathbb{R}^m \overline{f}_*(\mathcal{F}^\bullet_\infty)_0 \longrightarrow H^m(L_\infty(F_0)) \longrightarrow R^{m+1}\overline{f}_{0*}\mathcal{G}^\bullet \longrightarrow \cdots$$

On utilise maintenant le fait que $\mathbb{R}^m \overline{f}_{0*}\mathcal{G}^\bullet = 0$ pour $m \neq n-1,\ n$, $\mathbb{R}^{n-1}\overline{f}_{0*}\mathcal{G}^\bullet = \mathrm{Ker}\ \theta$ et $\mathbb{R}^n \overline{f}_{0*}\mathcal{G}^\bullet = \mathrm{Coker}\ \theta$, voir la suite (***).
L'affirmation (iv) se montre en appliquant le foncteur φ_t au triangle distingué (†).
On obtient une suite exacte longue

$$\cdots \to \mathbb{H}^m(\overline{F_0}, \varphi_{\overline{f}}(j_!\mathbb{C}_X)) \to \mathbb{H}^m(\overline{F_0}, \varphi_{\overline{f}}(Rj_*\mathbb{C}_X)) \to \varphi_t^m(R\overline{f}_*(\mathcal{F}^\bullet_\infty)) \to \mathbb{H}^{m+1}(\overline{F_0}, \varphi_{\overline{f}}(j_!\mathbb{C}_X) \to \cdots$$

Il suffit de montrer que le morphisme naturel

$$\varphi_{\overline{f}}(j_!\mathbb{C}_X) \longrightarrow \varphi_{\overline{f}}(Rj_*\mathbb{C}_X)$$

est un isomorphisme pour un polynôme f cohomologiquement modéré. Il est clair que les deux complexes coïncident sur F_0.
D'autre part, le support du faisceau $\varphi_{\overline{f}}(Rj_*\mathbb{C}_X)$ est contenu dans F_0 par notre hypothèse sur f. La dualité de Verdier nous donne, voir la proposition 3.7

$$D({}^p\varphi_{\overline{f}} Rj_*\mathbb{C}_X[n]) = {}^p\varphi_{\overline{f}}(DRj_*\mathbb{C}_X[n]) = {}^p\varphi_{\overline{f}}(Rj_! D\mathbb{C}_X[n]) = {}^p\varphi_{\overline{f}}(j_!\mathbb{C}_X[n]).$$

Mais deux complexes duaux ont même support (cela est clair au moins quand le support est discret !), voir la proposition 3.7 (iv). Il s'ensuit que le faisceau $\varphi_{\overline{f}}(j_!\mathbb{C}_X)$ a aussi le support contenu dans F_0 et donc le morphisme $\varphi_{\overline{f}}(j_!\mathbb{C}_X) \longrightarrow \varphi_{\overline{f}}(Rj_*\mathbb{C}_X)$ est un isomorphisme. $\square$

Exemple 5.3 Pour le polynôme de Briançon discuté dans l'exemple 5.2 on a vu que $\mathrm{Ker}\ \theta = \mathrm{Coker}\ \theta = 0$ pour la fibre spéciale $F_{\neq 0}$. De plus on sait que $F_{\neq 0} = \mathbb{P}^1 \backslash \{2 \text{ points}\}$ et $F = E\backslash\{3 \text{ points}\}$ où E est une courbe algébrique lisse de genre $g = 1$. On a alors

$$\dim \mathbb{R}^0\overline{f}_*(\mathcal{F}^\bullet_\infty)_{\neq 0} = \dim H^0(L_\infty(F_{\neq 0})) = \dim \mathbb{R}^1\overline{f}_*(\mathcal{F}^\bullet_\infty)_{\neq 0} = \dim H^1(L_\infty(F_{\neq 0})) = 2$$

tandis que pour les fibres génériques $F = F_t$, on a $\dim \mathbb{R}^0\overline{f}_*(\mathcal{F}^\bullet_\infty)_t = \dim H^0(L_\infty(F)) = \dim \mathbb{R}^1\overline{f}_*(\mathcal{F}^\bullet_\infty)_t = \dim H^1(L_\infty(F)) = 3$.
En particulier, les faisceaux $\mathbb{R}^m\overline{f}_*(\mathcal{F}^\bullet_\infty)$ ne sont pas constants dans ce cas. En plus, le fait que pour la fibre F_0 on a $\mathrm{Ker}\ \theta \neq 0$, voir l'exemple 5.2, montre que les morphismes naturels

$$\mathbb{R}^m\overline{f}_*(\mathcal{F}^\bullet_\infty)_0 \longrightarrow H^m(L_\infty(F_0))$$

ne peuvent pas être des isomorphismes pour $m = n-2$ et pour $m = n-1$.

Remarque 5.5 Les deux suites exactes de l'exemple 5.2 et du théorème 5.3 forment en effet le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{n-2}(T_0) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n-2}(F_0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\ \theta \arrow[r] \arrow[d, equal] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R}^{n-2}\overline{f}_*(\mathcal{F}^\bullet_\infty)_0 \arrow[r] & H^{n-2}(L_\infty(F_0)) \arrow[r] & \mathrm{Ker}\ \theta \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^{n-1}(T_0) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n-1}(F_0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}\ \theta \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
{} \arrow[r] & \mathbb{R}^{n-1}\overline{f}_*(\mathcal{F}^\bullet_\infty)_0 \arrow[r] & H^{n-1}(L_\infty(F_0)) \arrow[r] & \mathrm{Coker}\ \theta \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont induites par le morphisme α du triangle (†) et par l'inclusion $L_\infty(F_0) \longrightarrow F_0$.
Pour cela, il suffit de se rappeler que la première suite exacte provient du triangle (Δ) et la deuxième suite exacte provient du triangle $(i_0^!\Delta)$ obtenu par restriction.
Pour le polynôme $f = x^2y + x : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ ce diagramme devient

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}^2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{C}^2 \arrow[r] & \mathbb{C}^3 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r] & \mathbb{C}^2 \arrow[r] & \mathbb{C}^3 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Bibliographie

[AC] A'Campo, N. : *Le nombre de Lefschetz d'une monodromie*, Indag. Math. 35 (1973), 113-118.

[AGV] Arnold, V.I., Gusein-Zade, S.M., Varchenko, A.N. : *Singularities of differentiable maps*, vols 1/2, Monographs in Math. 82/83, Birkhäuser, 1985/1988.

[ACD] E. Artal-Bartolo, P. Cassou-Noguès, A. Dimca : *Sur la topologie des polynômes complexes*, Progress in Math. 162, Birhäuser 1998, pp. 317-343.

[BBD] A. Beilinson, J. Bernstein & P. Deligne : *Faisceaux Pervers*, Astérisque 100, Soc. Math. France 1983.

[BD] Ph. Bonnet, A. Dimca : *Relative differential forms and complex polynomials*, à paraître dans Bull.Sci. Math.

[B1] A. Borel et al. : *Intersection Cohomology*, Progress in Math. 50, Soc. Birkhäuser 1984.

[B2] A. Borel et al. : *Algebraic D-modules*, Perspectives in Math. 2, Academic Press 1987.

[BT] R. Bott, L.W. Tu : *Differential Forms in Algebraic Topology*, Grad. Texts in Maths. 82, Springer 1982.

[BMM] J. Briançon, Ph. Maisonobe, M. Merle : *Localisation de systèmes différentiels, stratifications de whitney et condition de Thom*, Invent. Math. 117 (1994), 531-550.

[Br] J.L. Brylinski : *(Co)-homologie d'intersection et faisceaux pervers*, Sém. Bourbaki 585 (1981-82).

[BV] D. Burghelea & A. Verona : *Local homological properties of analytic sets*, Manuscripta Math. 7 (1972), 55-66.

[De] P. Deligne : *Le formalisme des cycles évanescents*, dans SGA 7 : *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, Part II, Lecture Notes in Math. 340, Springer (1973).

[De1] P. Deligne : *Equations différentielles à point singuliers réguliers*, Lecture Notes in Math. **163**, Springer 1970.

[D1] A. Dimca : *Singularities and Topology of Hypersurfaces*, Universitext, Springer, New York, 1992.

[D2] A. Dimca : *Monodromy at infinity for polynomials of two variables*, J. Alg. Geometry 7 (1998), 771-779.

[DP] A. Dimca, L. Paunescu : *On the connectivity of complex affine hypersurfaces II*, à paraître dans Topology.

[DS1] A. Dimca, M. Saito : *On the cohomology of the general fiber of a polynomial map*, Compositio Math., **85** (1993), 299-309.

[DS2] A. Dimca, M. Saito : *Algebraic Gauss-Manin systems and Brieskorn modules*, preprint.

[Du] A.H. Durfee : *Neighborhoods of algebraic sets*, Trans. AMS, 276 (1983), 517-530.

[F] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Annals of Math, Studies 131, Princeton University Press, 1993.

[GM] S.I. Gelfand & Y.I. Manin : *Methods of Homological Algebra*, Springer Verlag 1996.

[G] R. Godement : *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux*, Hermann, Paris 1986.

[GoM1] M.Goresky, R. MacPherson : *Intersection homology II*, Invent. math. 71 (1983), 77-129.

[GoM2] M.Goresky, R. MacPherson : *Morse theory and intersection homology theory*, dans : *Analyse et topologie sur les espaces singuliers*, Astérisque 101/102 (1983).

[GoM3] M.Goresky, R. MacPherson : *Stratified Morse Theory*, Erg. der Math. 14, Springer-Verlag 1988.

[H] R. Hartshorne : *Algrebraic Geometry*, GTM 52, Springer 1977.

[Ha] H. Hamm : *Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume*, Math. Ann. 191 (1971), 235-252.

[Ha2] H. Hamm : *On the cohomology of fibres*, Preprint 1999.

[HLê] H.A. Hamm, D.T. Lê : *Vanishing theorems for constructibles sheaves I*, J. Reine Angew. Math 471 (1996), 115-138 and II, Kodai Math. J. 21 (1998), 208-247.

[I] B. Iversen : *Cohomology of sheaves*, Universitext, Springer Verlag 1986.

[Ki] F. Kirwan : *An introduction to homology theory*, Pitman Research Notes in Math., Longman 1988.

[KM] M. Kato, Y. Matsumoto : *On the connectivity of The Milnor Fiber of a holomorphic fonction at a critical point*, in Manifolds, Tokyo 1973, p. 131-136.

[KS] M. Kashiwara & P. Schapira : *Sheaves on Manifolds*, Grund der math. Wiss. 292, Springer Verlag 1990.

[La] K. Lamotke : *The topology of complex projective varieties after S. Lefschetz*, Topology **20** (1981), no. 1, 15-51.

[Lê] Lê, D.T. : *Sur les cycles évanouissants des espaces analytiques*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A, 288 (1979), 283-285.

[L] Looijenga, E.J.N. : *Isolated singular points on complete intersections*, London Math. Soc. Lecture Note Series, 77. Cambridge Univ. Press 1984.

[Mal] B. Malgrange : *Equations différentielles à coefficients polynomiaux*, Progress in Math. **96**, Birkhäuser 1991.

[MS] Z. Mebkhout, C. Sabbah : *D_X-modules et cycles évanescents*, dans : Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les D_X-modules cohérents, Travaux en cours **35**, Hermann 1989.

[M] J. Milnor : *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies 61, Princeton Univ. Press, 1968.

[Ma1] D.B. Massey : *Notes on perverse sheaves and vanishing cycles*, preprint.

[Ma2] D.B. Massey : *Critical points of fonctions on singular spaces*, preprint.

[Ma3] D.B. Massey : *Numerical invariants of perverse sheaves*, Duke Math. J. 73 (1994), 307-369.

[Ma4] D.B. Massey : *Hypercohomology of Milnor fibers*, Topology 35 (1996), 969-1003.

[Me1] Z. Mebkhout : *Le formalisme des six opérations de grothendieck pour les D_X-modules cohérents*, Travaux en cours 35, Hermann, Paris, 1989.

[MeNM] Z. Mebkhout, L. Narváez-Macarro : *Le théorème de constructibilité de Kashiwara*, dans : *Images directes et constructibilité*, Travaux en cours 46, Hermann, Paris, 1993.

[NN] W. Neumann, P. Norbury : *Vanishing cycles and monodromy of complex polynomials*, à paraître dans Duke Math. J.

[Pa] A. Parusiński : *A note on singularities at infinity of complex polynomials*, Banach center Publ. 39 (1997), 131-141.

[S1] C. Sabbah : *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*, dans : D-modules cohérents et holonomes, Travaux en cours **45**, Hermann 1993.

[S2] C. Sabbah : *Hypergeometric periods for a tame polynomial*, C.R. Acad. Paris 328 Serie I (1999), 603-608.

[T] B. Tessier : *Cycles évanescents, sections planes et condition de Whitney*, Astérisque 7/8, Soc. Math. France 1973, p. 285-362.

[Ti] M. Tibăr : *Bouquet decomposition of the Milnor Fiber*, Topology 35 (1996), 227-242.

[V1] J.-L. Verdier : *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard*, Invent. math. 36 (1976), 295-312.

[V2] J.-L. Verdier : *Catégories dérivées*, Etat 0, dans SGA4$\frac{1}{2}$, Lecture Notes in Math. 569, Springer 1977.