RAPPORT SCIENTIFIQUE

présenté à

L'UNIVERSITE BORDEAUX 1

par

Gilles CARBOU

pour obtenir

L'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Couches limites en ferromagnétisme et en mécanique des fluides

Soutenue le 12 décembre 2003

Après avis des rapporteurs

M. E. GRENIER, Professeur, ENS Lyon
M. H. KAPER, Program Director, NSF
M. G. METIVIER, Professeur, Université Bordeaux 1

Devant la commission d'examen composée de

M. N. BEN ABDALLAH, Professeur, Université Toulouse 3
M. F. BETHUEL, Professeur, Université Paris 6
M. P. FABRIE, Professeur, Université Bordeaux 1
M. E. GRENIER, Professeur, ENS Lyon
M. B. HANOUZET, Professeur, Université Bordeaux 1
M. H. KAPER, Program Director, NSF
M. G. METIVIER, Professeur, Université Bordeaux 1

Remerciements

Cette habilitation est pour moi l'occasion d'exprimer toute mon amitié et toute ma reconnaissance à Pierre Fabrie. Dès mon arrivée à Bordeaux en 1996, nous avons travaillé ensemble et partagé bien des choses, souvent autour d'un magret arrosé d'une bonne bouteille. J'ai beaucoup appris de lui, et la place me manque pour exprimer tout ce que je lui dois.

Je tiens à remercier Bernard Hanouzet, qui a accepté de rapporter sur mes travaux pour le conseil scientifique de l'Université, et qui me fait l'honneur d'être président de mon jury.

Je remercie Guy Métivier pour l'intérêt qu'il a toujours témoigné pour mes travaux, et qui a accepté de rapporter sur mon habilitation. Je tiens à lui exprimer toute mon amitié et ma gratitude pour sa disponibilité et pour ses conseils.

Emmanuel Grenier et Hans Kaper ont accepté de rapporter sur mes travaux. J'en suis très honoré et je les remercie chaleureusement du temps qu'ils ont bien voulu me consacrer. Emmanuel et moi avons été co-examinateurs au concours d'entrée de l'ENS et après toutes ces heures à trimer ensemble, je suis très heureux qu'il m'ait fait l'amitié de rapporter sur mon travail. Je remercie aussi Hans dont les remarques m'ont permis d'améliorer grandement la présentation de ce mémoire.

Ma gratitude va aussi à Fabrice Bethuel et à Naoufel Ben Abdallah, qui ont bien voulu être membres de mon jury et qui ont bravé les menaces de grève à la SNCF pour assister à ma soutenance.

Ce mémoire est l'occasion pour moi d'exprimer toute mon amitié à Frédéric Hélein et à Jean-Luc Joly. Frédéric a été mon directeur de thèse, et c'est certainement grâce au bon départ que j'ai pris avec lui que j'ai pu continuer mes travaux. Jean-Luc, au delà d'un ami, a été pour moi un véritable modèle, et je ne le remercierai jamais assez pour toutes les discussions toujours passionnantes que nous avons eues ensemble.

Enfin, ce travail doit beaucoup aux membres du MAB, qui par leur amitié et leur disponibilité, m'ont permis de travailler dans une ambience chaleureuse. Je remercie en particulier Vincent Bruneau avec qui j'ai travaillé sur les guides d'ondes, Charles-Henri Bruneau et Iraj Mortazavi, pour leurs lumières sur les méthodes de pénalisation, mais aussi Thierry, David (dit le Petit Basque), l'autre David, Mazen, Cédric, et tous les autres, qui savent que la porte de mon bureau leur est toujours ouverte.

Table des matières

Première partie
Introduction

Mes travaux de recherche portent principalement sur l'étude des phénomènes de couches limites qui peuvent apparaître en ferromagnétisme, en mécanique des fluides ou dans l'étude de guides d'ondes. En ferromagnétisme, on cherche à justifier certains modèles négligeant l'énergie d'échange en faisant tendre le coefficient d'échange vers zéro. En mécanique des fluides numérique, on veut comprendre des méthodes de pénalisation utilisées pour calculer le flôt d'un fluide visqueux autour d'un obstacle en faisant tendre le coefficient de pénalisation vers l'infini. Enfin, on étudie un guide dont le coeur a une conductivité élevée, et on veut décrire le comportement des modes guidés lorsque la résistance du coeur tend vers zéro.

Dans tous ces problèmes, le passage à la limite est contrarié par une incompatibilité entre les conditions imposées au bord du domaine et la limite attendue, qui ne vérifie pas ces conditions. Prenons un exemple simple. On considère le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} (1) & -\varepsilon^2 u_\varepsilon'' + u_\varepsilon = 0 \text{ sur } [0,1], \\ \\ (2) & u_\varepsilon(0) = 1,\ u_\varepsilon(1) = 0. \end{array}\right. \tag{1.1}$$

L'unique solution est donnée par $u_\varepsilon(x) = \dfrac{\operatorname{sh}\frac{1-x}{\varepsilon}}{\operatorname{sh}\frac{1}{\varepsilon}}$.
Lorsque ε tend vers zéro, la solution u^ε tend vers zéro presque partout. La fonction nulle ne vérifiant pas la condition (2) au bord, u^ε ne tend pas vers zéro dans $H^1([0,1])$, et l'on peut écrire :

$$u_\varepsilon(x) = e^{\frac{-x}{\varepsilon}} + r_\varepsilon(x),$$

où r_ε tend vers zéro en toute norme lorsque ε tend vers zéro.

Le terme $e^{\frac{-x}{\varepsilon}}$ est un terme de couche limite qui permet d'expliquer le défaut de convergence de u_ε.

Lorsque l'incompatibilité porte sur les conditions de Neuman, il se forme une couche limite d'amplitude ε. Considérons le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} (3) & -\varepsilon^2 v_\varepsilon'' + v_\varepsilon = 0 \text{ sur } [0,1], \\ \\ (4) & v_\varepsilon'(0) = 1,\ v_\varepsilon(1) = 0. \end{array}\right. \tag{1.2}$$

La solution est donnée par $v_\varepsilon(x) = -\varepsilon\dfrac{\operatorname{sh}\frac{1-x}{\varepsilon}}{\operatorname{ch}\frac{1}{\varepsilon}}$.
On peut écrire la solution sous la forme :

$$v_\varepsilon(x) = -\varepsilon e^{\frac{-x}{\varepsilon}} + r_\varepsilon(x)$$

où r^ε tend vers zéro en toute norme.
La couche limite, décrite par $-\varepsilon e^{\frac{-x}{\varepsilon}}$, est alors d'amplitude ε. Sa description permet de comprendre pourquoi la suite des v_ε ne tend pas vers zéro dans $H^2(0,1)$.

Comme dans les exemples précédents, lorsque l'incompatibilité des conditions au bord empêche la convergence des solutions lorsque le petit paramètre tend vers zéro, on va s'attacher à décrire la couche limite de manière simple pour écrire la solution comme somme d'un terme de couche limite, qui contient tous les défauts de compacité et d'un reste qui tend vers zéro.

La méthode utilisée pour décrire la couche limite est une méthode BKW : on suppose que la solution s'écrit sous la forme d'un développement formel du type

$$u_\varepsilon(x) = U^0(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon U^1(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \dots$$

où $\varphi(x)$ est la distance au bord, et où les profils U^i se décomposent en $U^i(x,z) = \overline{U^i}(x) + \widetilde{U^i}(x,z)$, avec $\widetilde{U^i}(x,z) \longrightarrow 0$ ainsi que toutes ses dérivées lorsque $z \longrightarrow +\infty$. La couche limite est ainsi décrite grâce à la variable rapide $z = \dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}$ par la partie en tilde du profil, partie qui est très petite lorsque l'on s'éloigne du bord. Typiquement, cette partie, exponentiellement décroissante, est en e^{-z}. La partie $\overline{U^i}$ décrit le comportement de la solution à l'intérieur du domaine.
Une fois que l'on a fixé la forme du développement formel, on injecte celui-ci dans les équations étudiées, et on identifie formellement les différentes puissances de ε. Ce procédé permet d'obtenir des équations caractérisant les profils. Ce travail formel est ensuite justifié par l'estimation de la différence entre la solution du problème considéré et le développement formel obtenu dans l'étape précédente.

Décrivons un peu plus en détails les différents travaux composant ce mémoire.

La deuxième partie est consacrée aux équations de Landau-Lifschitz qui interviennent en ferromagnétisme. Les matériaux ferromagnétiques sont largement utilisés en enregistrement ou en furtivité radar pour leurs propriétés magnétiques. Ils ont la caractéristique de présenter, même en l'absence de champ magnétique extérieur, une magnétisation spontanée décrite par le moment magnétique u, qui est un champ de vecteurs unitaire défini sur le domaine Ω dans lequel est confiné le matériaux ferromagnétique. Ce moment magnétique relie l'induction magnétique B et le champ magnétique H par la relation

$$B = \mu_0(H + u).$$

Dans ma thèse, j'avais étudié le modèle stationnaire du micromagnétisme en démontrant un résultat de régularité partielle pour les points critiques de l'énergie du ferromagnétisme (cf. [A3]). On étudie ici la dynamique des phénomènes ferromagnétiques, qui est décrite par l'équation de Landau-Lifschitz :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \wedge H_e - u \wedge (u \wedge H_e), \tag{1.3}$$

où le champ effectif H_e est dérivé de l'énergie du ferromagnétisme :

$$H_e = \varepsilon^2 \Delta u + H. \tag{1.4}$$

Le coefficient ε^2, coefficient d'échange, est destiné à tendre vers zéro dans cette étude. Concernant le champ magnétique H, deux modèles, décrits plus en détail dans la partie 1, sont en concurrence. Pour étudier la propagation des ondes, on couple (1.3) avec les équations de Maxwell dans lesquelles on a remplacé B par $\mu_0(H + u)$:

$$\begin{cases} \mu_0 \dfrac{\partial}{\partial t}(H + u) + \operatorname{rot} E = 0, \\ \\ \varepsilon_0 \dfrac{\partial E}{\partial t} - \operatorname{rot} H = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Pour étudier par exemple le retournement du moment magnétique en enregistrement, on utilise le modèle quasistationnaire dans lequel H est obtenu à partir de u via la loi de Faraday et les équations de Maxwell statiques :

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{rot} H = 0, \\ \\ \operatorname{div}\,(H+\bar{u}) = 0 \text{ (par la loi de Faraday)},\end{array}\right. \tag{1.6}$$

où $\bar{u}$ désigne l'extension de u par zéro en dehors du domaine ferromagnétique.

Dans un premier temps, on étudie les solutions faibles du couplage (1.3)-(1.5). Après avoir montré l'existence de solutions faibles (déjà obtenu par d'autres méthodes par Visintin dans [63]), on étudie l'ensemble ω-limite des solutions en démontrant qu'il est composé de points critiques de l'énergie du ferromagnétisme. On justifie aussi par un procédé asymptotique l'approximation quasistatique. Enfin, on étudie le comportement des matériaux ferromagnétiques en couche mince. On démontre que le champ démagnétisant (obtenu à partir de u par les équations (1.6)) se localise dans le cas des couches minces et se transforme en une anisotropie forçant le moment magnétique à être dans le plan tangent à la couche mince.

Dans un deuxième temps, on étudie l'existence des solutions fortes des deux modèles quasistatique et Landau-Lifschitz-Maxwell à $\varepsilon > 0$ fixé (cf. [A2], [A3] et [A6]).

La question se pose ensuite du comportement des solutions fortes obtenues précédemment lorsque ε tend vers zéro. Le passage à la limite pour ces solutions (disons pour simplifier H^2 en espace) est empêché par la condition de Neumann homogène au bord vérifée par les solutions de (1.3) pour $\varepsilon > 0$. En effet, la limite est appelée à vérifier l'équation

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = u_0 \wedge H_0 - u_0 \wedge (u_0 \wedge H_0), \tag{1.7}$$

qui est une équation différentielle ordinaire ne conservant pas la condition de Neumann homogène au bord.
Il apparaît donc, comme dans le problème (1.2), une couche limite à l'ordre ε^1. On est alors amené à caractériser cette couche limite par une méthode BKW pour écrire que

$$u_\varepsilon(t,x) = u_0(t,x) + \varepsilon \widetilde{U^1}(t, x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon r_\varepsilon(t,x),$$

où u_ε est la solution de (1.3) à $\varepsilon > 0$, u_0 est la solution du problème limite (1.7), $\varepsilon\widetilde{U^1}$ est un terme de couche limite qui tend vers zéro en norme L^2, mais explose en norme H^2, et $\varepsilon r_\varepsilon$ est un reste borné en norme H^2 tendant vers zéro en norme H^1.
La caractérisation de la couche limite permet donc de comprendre que le défaut de convergence pour les solutions fortes est uniquement dû au terme de couche limite.
Ce point est mis en évidence dans [A6] pour le modèle quasistationnaire et dans [S3] pour le couplage Landau-Lifschitz-Maxwell.

La troisième partie de ce mémoire présente une série de travaux concernant les méthodes de pénalisation utilisées pour calculer le flôt d'un fluide visqueux incompressible autour d'un obstacle. Pour éviter l'utilisation d'un maillage non structuré induit par la géométrie, certains auteurs utilisent des méthodes de pénalisation qui consistent à résoudre les équations de Navier-Stokes dans tout le domaine en ajoutant un terme de pénalisation pour forcer la vitesse à être nulle dans l'obstacle. En notant $\mathcal{O}$ le domaine global de calcul et Ω l'obstacle (avec $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset \mathcal{O}$), il s'agit de résoudre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \Delta u^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon^2} \chi_\Omega u^\varepsilon = f \text{ dans } \mathcal{O}, \\ \text{div } u^\varepsilon = 0 \text{ dans } \mathcal{O}, \\ u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}, \end{cases} \tag{1.8}$$

où χ_Ω est la fonction indicatrice de Ω, et où le coefficient de pénalisation ε est petit.

Dans [7], Angot, Bruneau et Fabrie montrent que l'erreur entre u^ε calculé par (1.8) et la solution du flôt autour de l'obstacle Ω est d'ordre $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Par contre, les simultations numériques semblent montrer que l'erreur est en fait d'ordre ε. Pour comprendre la bonne qualité des résultats numériques, nous avons été amenés dans [A7] à expliciter la couche limite apparaissant dans l'obstacle Ω. L'origine de cette couche limite est la suivante : dans $\mathcal{O} \setminus \Omega$, u^ε tend vers u^0 solution du flôt autour de l'obstacle Ω :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^0}{\partial t} - \Delta u^0 + (u^0 \cdot \nabla) u^0 + \nabla p^0 = f \text{ dans } \mathcal{O} \setminus \Omega, \\ \text{div } u^0 = 0 \text{ dans } \mathcal{O} \setminus \Omega, \\ u^0 = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}, \\ u^0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.9}$$

D'autre part, dans l'obstacle, u^ε tend vers la fonction identiquement nulle. Or, lorsque l'on écrit la formulation faible du problème pénalisé (1.8), on impose que le saut de u^ε sur $\partial\Omega$ soit nul, mais aussi que le saut de $\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} - p^\varepsilon n$ soit nul sur cette frontière.
Concernant la première condition, elle passe à la limite sans problème puisque $u^0 = 0$ sur $\partial\Omega$. Par contre, la deuxième ne passe pas à la limite puisqu'il n'y a pas de raison que $\dfrac{\partial u^0}{\partial n}$ soit nul sur $\partial\Omega$ (on peut montrer que la pression est continue à l'ordre zéro sur la frontière).
Ce défaut de compatibilité de la limite avec une condition de Neumann entraîne l'apparition d'une couche limite à l'ordre ε^1 (comme dans le problème (1.2)), et la description de cette couche limite par une méthode BKW permet de quantifier le passage à la limite de u^ε vers u^0 et ainsi de démontrer que l'erreur entre u^ε et u^0 est d'ordre ε, comme les simulations numériques le laissaient pressentir.

J'ai ensuite étudié une méthode de pénalisation mise en oeuvre pour calculer le flôt d'un fluide visqueux incompressible autour d'un obstacle recouvert d'une couche mince de matériaux poreux, utilisée dans [16]. On note $\mathcal{O}$ le domaine de calcul, on fixe $\Omega \subset \mathcal{O}$. La couche mince de matériau poreux est représentée par ω_ε où :

$$\omega_\varepsilon = \{x \in \Omega, \ \text{dist}(x, \partial\Omega) < \kappa\varepsilon\},$$

où κ est un coefficient fixé. L'obstacle est lui représenté par $\Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon}$. La méthode de résolution consiste à mettre sur le matériaux poreux une pénalisation d'ordre $\dfrac{1}{\varepsilon}$ et sur l'obstacle une pénalisation en $\dfrac{1}{\varepsilon^2}$. On est donc amené à résoudre :

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \Delta u^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}\chi_{\omega_\varepsilon} u^\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\chi_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon + \nabla \pi^\varepsilon = f \text{ in } \mathcal{O}, \\
\text{div } u^\varepsilon = 0 \text{ in } \mathcal{O}, \\
u^\varepsilon = 0 \text{ on } \partial\mathcal{O},
\end{cases} \tag{1.10}
$$

où $\chi_{\omega_\varepsilon}$ (resp. $\chi_{\Omega_\varepsilon}$) est la fonction caractéristique de ω_ε (resp. Ω_ε).
Le problème est alors de comprendre en quoi la résolution de (1.10) est une bonne approximation du problème physique initial. J'ai donc comparé ce problème à différents modèles de flôt autour d'une couche mince de matériaux poreux.
Le premier consiste à résoudre sur $\mathcal{U}_\varepsilon = \mathcal{O} \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$ les équations de Navier Stokes avec une pénalisation en $\dfrac{1}{\varepsilon}$ sur ω_ε pour représenter le matériau poreux, en imposant une condition de Dirichlet homogène sur l'obstacle :

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} - \Delta v^\varepsilon + (v^\varepsilon \cdot \nabla) v^\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}\chi_{\omega_\varepsilon} v^\varepsilon + \nabla \pi^\varepsilon = f \text{ dans } \mathcal{U}_\varepsilon, \\
\text{div } v^\varepsilon = 0 \text{ dans } \mathcal{U}_\varepsilon, \\
v^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{U}_\varepsilon,
\end{cases} \tag{1.11}
$$

Le deuxième modèle, obtenu par des méthodes d'homogénéisation par Mikelic dans [45], consiste à résoudre les équations de Navier Stokes dans le fluide avec des conditions de Dirichlet Neuman sur le bord de la couche poreuse :

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} - \Delta v^\varepsilon + (v^\varepsilon \cdot \nabla) v^\varepsilon + \nabla \pi^\varepsilon = f \text{ dans } \mathcal{U}, \\
\text{div } v^\varepsilon = 0 \text{ dans } \mathcal{U}, \\
v^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}, \\
v^\varepsilon = -\kappa\varepsilon \left(\dfrac{\partial v^\varepsilon}{\partial n}\right)_T \text{ sur } \partial\Omega,
\end{cases} \tag{1.12}
$$

Le troisième modèle couple les équations de Navier-Stokes dans le fluide avec les équations de Brinkman stationnaire dans la couche mince de matériau poreux :

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} - \Delta v^\varepsilon + (v^\varepsilon \cdot \nabla) v^\varepsilon + \nabla \pi^\varepsilon = f \text{ dans } \mathcal{U}, \\
-\Delta v^\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon} v^\varepsilon + \nabla \pi^\varepsilon = 0 \text{ dans } \omega_\varepsilon, \\
\text{div } v^\varepsilon = 0 \text{ dans } \mathcal{U}_\varepsilon, \\
v^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}, \\
[v^\varepsilon] = 0 \text{ et } \left[\dfrac{\partial v^\varepsilon}{\partial n} - \pi^\varepsilon n\right] = \dfrac{1}{2}|v^\varepsilon|^2 n \text{ sur } \partial\Omega,
\end{cases} \tag{1.13}
$$

où $[v]$ désigne le saut de v à la frontière $\partial\Omega$.

On fait un développement asyptotique des solutions de (1.11), de (1.12) et de (1.13), et on montre que ces trois modèles sont équivalents à l'ordre ε^1, *i.e.* dans les trois cas, la solution admet dans la partie fluide $\mathcal{U}$ un développement asyptotique de la forme

$$v^\varepsilon(t,x) = U^0(t,x) + \varepsilon U^1(t,x) + \varepsilon^2 r^\varepsilon(t,x),$$

où r^ε est borné en norme L^2, et où U^0 et U^1 sont les mêmes dans les trois modèles (seul le reste dépend du modèle).

Pour obtenir un même développement asymptotique sur le problème à double pénalisation, il apparaît qu'il faut changer la géométrie de ce problème en modifiant l'épaisseur de la couche poreuse. En prenant celle-ci d'épaisseur $(\kappa - 1)\varepsilon$, on retrouve alors le même développement asymptotique jusqu'à l'ordre 1 que pour les trois modèles équivalents. Ce changement du coefficient multiplicatif de l'épaisseur permet de compenser l'erreur (d'ordre ε^1) occasionnée par la pénalisation en $\dfrac{1}{\varepsilon^2}$ dans l'obstacle.

Dans la quatrième partie, on étudie un modèle très simplifié de guide d'ondes fermé avec un coeur supraconducteur. On est alors amené à considérer les valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{L}^\varepsilon = -\Delta + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\chi_\Omega$ dans $H_0^1(\mathcal{O})$, où $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ est la section du guide et où $\Omega \subset \mathcal{O}$, dont la fonction caractéristique est notée χ_Ω, est la section du coeur supraconducteur de conductivité $i\dfrac{1}{\varepsilon^2}$. J'avais démontré dans ma thèse que les valeurs propres de $\mathcal{L}^\varepsilon$ tendaient, lorsque ε tend vers 0, vers les valeurs propres du laplacien dans $H_0^1(\mathcal{O} \setminus \Omega)$. Le but du travail [A8] est de donner un développement à tout ordre des valeurs propres de $\mathcal{L}^\varepsilon$. La méthode de démonstration repose sur l'étude de la résolvante de l'opérateur et sur l'analyse de la couche limite qui se forme dans le coeur Ω (cette couche limite peut être comparée à celle obtenue dans le cadre des méthodes de pénalisation).

La liste de mes publications ainsi que la bibliographie sont dans la dernière partie de ce mémoire. Etant reliés à ma thèse, les résultats des articles [A1], [A2], [A3] et [B1] ne sont pas décrits ici.

Deuxième partie
Ferromagnétisme

1 Modélisation

Les matériaux ferromagnétiques sont caractérisés par une magnétisation spontanée décrite par le moment magnétique M. Ce moment est un champ de vecteurs, défini sur le domaine Ω dans lequel est confiné le matériau ferromagnétique, et de norme constante M_s :

$$M(t,x) = M_s u(t,x) \text{ où } u : \Omega \longrightarrow S^2 \subset I\!R^3.$$

Le moment magnétique relie l'induction magnétique au champ magnétique par la relation

$$B = \mu_0(H + M),$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, et où on a étendu M par zéro en dehors de Ω (B et H sont définis sur tout $I\!R^3$). Les configurations du moment magnétique sont décrites par les points critiques d'une énergie somme de quatre termes : $E_{micro} = E_{ech} + E_d + E_a + E_{anis}$.
Le premier terme appelé énergie d'échange est issu du modèle d'interaction entre deux spins d'Heisenberg :

$$E_{ech} = \frac{1}{2}\mu_0 K_e \int_\Omega |\nabla M|^2.$$

Les deux termes suivants ont pour origine l'interaction entre le champ magnétique et M. On scinde le champ magnétique H en deux parties : $H = H_d + H_a$. Le champ démagnétisant H_d vérifie :

$$\text{rot } H_d = 0 \text{ et div } H_d = -\text{div } M,$$

et le champ appliqué vérifie :

$$\text{div } H_a = 0 \text{ et rot } H_a = \text{rot } H.$$

Cette décomposition correspond à la décomposition de Hodge de H puisque par la loi de Faraday, $\mu_0 \text{div } (H + M) = \text{div } B = 0$ donc, $\text{div } H = -\text{div } M$.
On a alors

$$E_d = -\mu_0 \frac{1}{2} \int_\Omega M \cdot H_d = \mu_0 \frac{1}{2} \int_{I\!R^3} |H_d|^2,$$

et

$$E_a = -\mu_0 \int_\Omega M \cdot H_a.$$

Enfin le dernier terme d'anisotropie reflète l'existence d'axes préférentiels de magnétisation, en raison par exemple de la structure cristaline du matériau ferromagnétique. C'est un terme local qui peut être quadratique ou polynomial d'ordre 4 en M selon les matériaux. De manière générale, ce terme ne change en rien l'analyse mathématique des équations, et on le négligera par la suite.

Les configurations stationnaires du moment magnétiques sont décrites par les points critiques de E_{micro}, sous la contrainte que M soit de norme constante M_s (cf. [A3] et ma thèse pour l'étude de la régularité de ces points critiques). En particulier, n'imposant aucune donnée de Dirichlet au bord de Ω, on obtient que $\dfrac{\partial M}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$ (où n est la normale unitaire sortante au bord).

La dynamique du moment magnétique est décrite par l'équation de Landau Lifschitz :

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \gamma \left(M \wedge H_{eff} - \frac{\alpha}{M_s} M \wedge (M \wedge H_{eff}) \right),$$

où γ et α sont deux constantes strictement positives, et où le champ effectif est dérivé de l'énergie E_{micro} :

$$H_{eff} = -\frac{1}{\mu_0} \partial_M E_{micro} = K_e \Delta M + H.$$

Concernant le champ magnétique H, deux modèles sont en concurrence, selon les applications, et selon l'influence des effets de propagation d'ondes. Le premier consiste à dire que H est donné par les équations de Maxwell, et le deuxième, appelé modèle quasistationnaire, consiste à réduire H au champ démagnétisant.

Avant de décrire plus avant les équations, on va fixer à 1 toutes les constantes physiques M_s, γ et α, et on va noter le coefficient d'échange ε^2. Ce petit coefficient est destiné à tendre vers zéro dans notre étude.

Remarque 2.1 *Cela correspond à adimensionner les équations en prenant $t' = |\gamma| M_s t$ comme nouvelle variable de temps, $x' = \dfrac{x}{R}$ comme nouvelle variable d'espace, où R est la taille caractéristique de l'échantillon de matériau ferromagnétique, et en posant ensuite comme nouvelles inconnues u, H' et E', avec :*

$$\begin{cases} u = \dfrac{M}{M_s}, \\[2ex] E' = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \dfrac{E}{M_s}, \\[2ex] H' = \dfrac{H}{M_s}, \end{cases}$$

(Cf. [38], [28] et [60]). Par la suite, on notera toujours E et H les champs électriques et magnétiques adimensionnés.
Dans les équations adimensionnées, les seuls coefficients dont on tient compte sont le coefficient d'échange ε^2 et la vitesse $\dfrac{1}{\eta^2}$ dans les équations de Mawell, où

$$\varepsilon^2 = \frac{K_e}{R^2} \text{ et } \eta = R\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} M_s |\gamma|.$$

Le moment magnétique est donc représenté par u, champ de vecteurs unitaires vérifiant l'équation de Landau Lifschitz suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \wedge (\varepsilon^2 \Delta u + H) - u \wedge (u \wedge (\varepsilon^2 \Delta u + H)), \tag{2.1}$$

avec pour condition au bord

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{2.2}$$

Dans le modèle complet Laudau-Lifschitz-Maxwell, l'équation (2.1) est couplée aux équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \eta \dfrac{\partial}{\partial t}(H+\bar{u}) + \text{rot } E = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3, \\ \\ \eta \dfrac{\partial E}{\partial t} - \text{rot } H = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{2.3}$$

Dans le modèle quasistationnaire, on suppose que H se restreint au champ démagnétisant, c'est à dire qu'on néglige les effets propagatifs dus aux équations de Maxwell, en posant $H = \mathcal{H}(u)$ où l'opérateur $\mathcal{H}$ est défini pour $u \in L^2(\Omega)$ par :

$$\begin{cases} \mathcal{H}(u) \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3), \\ \\ \text{rot } \mathcal{H}(u) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3, \\ \\ \text{div } (\mathcal{H}(u) + \bar{u}) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{2.4}$$

où $\bar{u}$ désigne le prolongement de u par zéro en dehors de Ω.

En multipliant (2.1) par u, on remarque que l'équation de Landau-Lifschitz conserve (formellement) la contrainte physique $|u| = 1$. D'autre part, en calculant formellement $u \wedge \dfrac{\partial u}{\partial t}$ et en utilisant la formule du double produit vectoriel, on obtient l'équation suivante, équivalente à (2.1) pour les solutions régulières :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \wedge \frac{\partial u}{\partial t} = 2u \wedge (\varepsilon^2 \Delta u + H). \tag{2.5}$$

Ce sera cette dernière forme de l'équation, appelée équation de Landau-Lifschitz-Gilbert, que l'on utilisera pour définir les solutions faibles.

Enfin, en prenant formellement le produit scalaire de (2.5) par $\dfrac{\partial u}{\partial t} - 2(\varepsilon^2 \Delta u + H)$, pusique $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ au bord, on obtient l'égalité d'énergie suivante :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} + \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial t}|^2 = 0, \tag{2.6}$$

où

$$\mathcal{E}(t) = \varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \left(|H(t,x)|^2 + |E(t,x)|^2 \right) dx.$$

Dans le chapitre suivant, on étudie les solutions faibles du couplage Landau-Lifschitz-Gilbert-Maxwell (2.5)-(2.3). On construit tout d'abord des solutions faibles qui respectent la contrainte $|u| = 1$ et pour lesquelles on ne conserve qu'une version affaiblie de la formule de décroissance de l'énergie (2.6), puisque l'on a :

$$\forall\, t, \;\; \mathcal{E}(t) + \int_0^t |\frac{\partial u}{\partial t}|^2 \leq \mathcal{E}(0).$$

Cette formule permet ensuite d'étudier le comportement des solution faibles en temps grand, et plus précisément de caractériser l'ensemble ω-limite d'une solution. On démontre ainsi que les éléments de l'ensemble ω-limite sont points critiques de l'énergie E_{micro}. Le même résultat est démontré par une méthode différente dans [B4], lorsque le matériau ferromagnétique est conducteur (ce qui rajoute dans les équations de Maxwell le courant électrique σE.

On donne ensuite une justification du modèle quasistationnaire en prenant la limite du système (2.5)-(2.3) lorsque η tend vers 0. Cette approximation est ainsi valable pour des échantillons de petite taille.

Dans le chapitre 3, on démontre l'existence de solutions fortes du modèle quasistationaire et du modèle complet.

Alors que dans les chapitres précédents, le coefficient d'échange ε^2 est fixé, on s'attache dans le chapitre 4 à faire tendre ce coefficient vers zéro. On s'aperçoit que le passage à la limite pour les solutions fortes est empêché par la formation d'une couche limite due à la condition de Neumann homogène.

2 Asymptotiques sur les solutions faibles

Cette partie décrit les résultats obtenus en collaboration avec Pierre Fabrie dans [A4] et ceux obtenus dans [A7]. Ils concernent les solutions faibles des équations du ferromagnétisme. Dans toute cette partie, le coefficient d'échange ε^2 est fixé égal à 1.

2.1 Existence des solutions faibles

Pour construire des solutions faibles, on considère la version Landau-Lifschitz-Gilbert. Cette forme de l'équation a pour mérite d'éliminer la partie trilinéaire $u \wedge (u \wedge \Delta u)$ à laquelle on ne peut pas donner un sens pour les solutions faibles. La partie bilinéaire $u \wedge \Delta u$ est plus facile à traiter puisque l'on remarque que formellement,

$$u \wedge \Delta u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u \wedge \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

Théorème 2.1 *Soient (u_0, E_0, H_0) vérifiant les hypothèse suivantes :*

$$\begin{cases} u_0 \in H^1(\Omega), \\ |u_0| = 1 \textit{ presque partout sur } \Omega, \\ E_0 \in L^2(I\!R^3) \textit{ et } H_0 \in L^2(I\!R^3), \\ \operatorname{div}(H_0 + \overline{u_0}) = 0 \textit{ dans } I\!R^3. \end{cases} \tag{2.7}$$

Alors, il existe (u, E, H) vérifiant :

$$\nabla u \in L^\infty(I\!R^+, L^2(\Omega)), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(I\!R^+ \times \Omega) \;\; |u| = 1 \textit{ pour presque tout } (t,x) \in I\!R^+ \times \Omega,$$

$$E \in L^\infty(I\!R^+, L^2(I\!R^3)), \quad H \in L^\infty(I\!R^+, L^2(I\!R^3)),$$

et solution faible du couplage Landau-Lifschitz-Gilbert au sens suivant :

– *pour tout* $\Psi \in H^1(I\!R^+ \times \Omega)$,

$$\int_{I\!R^+\times\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}.\psi + \int_{I\!R^+\times\Omega} u \wedge \frac{\partial u}{\partial t}.\psi = -2\int_{I\!R^+\times\Omega} \sum_{i=1}^{3} u \wedge \frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + 2\int_{I\!R^+\times\Omega} u \wedge H.\Psi,$$

– $u(0,x) = u_0(x)$ *au sens de la trace,*
– *pour tout* $\Psi \in H^1(I\!R^+ \times I\!R^3)$,

$$-\eta\int_{I\!R^+\times I\!R^3} H.\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \eta\int_{I\!R^+\times\Omega} u.\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \int_{I\!R^+\times I\!R^3} E.\mathrm{rot}\ \Psi = \eta\int_{I\!R^3} H_0.\Psi(0,.) + \eta\int_{\Omega} u_0.\Psi(0,.),$$

$$-\eta\int_{I\!R^+\times I\!R^3} E.\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \int_{I\!R^+\times I\!R^3} H.\mathrm{rot}\ \Psi = \eta\int_{I\!R^3} E_0.\Psi(0,.),$$

– *pour tout* $t > 0$, *on a l'estimation d'énergie suivante :*

$$\mathcal{E}(t) + \int_0^t \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial t}|^2 \leq \mathcal{E}(0) \tag{2.8}$$

où

$$\mathcal{E}(t) = \int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2 dx + \int_{I\!R^3} \left(|H(t,x)|^2 + |E(t,x)|^2\right) dx$$

Remarque 2.2 *Pour satisfaire les contraintes physiques, on demande aux conditions initiales de vérifier* $|u_0| = 1$ *et* $\mathrm{div}\ (H_0 + u_0) = 0$ *(loi de Faraday).*

Remarque 2.3 *Si l'on ne sait pas a priori que u est borné dans* $L^\infty(I\!R^+ \times \Omega)$, *il n'est pas possible de prendre u comme fonction test dans la formulation de Landau-Lifschitz-Gilbert, et donc, le calcul formel qui montre que la norme de u est conservée au cours du temps n'est pas licite pour les solutions faibles. On va donc obtenir par construction que u est de norme 1, en résolvant tout d'abord un problème où cette contrainte est relaxée, et est remplacée par une pénalisation forçant la norme de u à être de plus en plus proche de 1.*

De la même manière, l'égalité d'énergie obtenue formellement ne peut plus s'obtenir pour les solutions faibles, et c'est par construction qu'on obtient une inégalité d'énergie.

Plan de la preuve :
On va construire une solution de norme 1 par une méthode de pénalisation due à Chern pour l'étude du flôt des applications harmoniques, et utilisé par Alouge Soyeur dans [4].
Premier pas : on relaxe la contrainte de norme 1, et on résout le problème pénalisé suivant :

$$\frac{\partial u^\lambda}{\partial t} - u^\lambda \wedge \frac{\partial u^\lambda}{\partial t} - 2\Delta u^\lambda + \frac{4}{\lambda}(|u^\lambda|^2 - 1)u^\lambda = 2H^\lambda, \tag{2.9}$$

que l'on couple avec les équations de Maxwell (2.3). Le terme de pénalisation $\frac{4}{\lambda}(|u^\lambda|^2 - 1)u^\lambda$ est la dérivée de l'énergie $\frac{1}{\lambda}\int_\Omega (|u^\lambda|^2 - 1)^2$. Lorsque λ tend vers zéro, l'énergie étant bornée, la norme ponctuelle de u^λ tend vers 1, comme on le verra dans le deuxième pas.

Par un procédé de Galerkin classique, on construit une solution faible du couplage (2.9)-(2.3) qui vérifie l'inégalité d'énergie suivante : pour tout $t > 0$,

$$\mathcal{E}_\lambda(t) + \int_0^t \int_\Omega |\frac{\partial u^\lambda}{\partial t}(t,x)|^2 dx\, dt + \leq \mathcal{E}_\lambda(0), \tag{2.10}$$

avec

$$\mathcal{E}_\lambda(t) = \int_\Omega |\nabla u^\lambda(t,x)|^2 dx + \frac{1}{\lambda}\int_\Omega (|u^\lambda(t,x)|^2-1)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{I\!R^3} \left(|H^\lambda(t,x)|^2 + |E^\lambda(t,x)|^2\right) dx.$$

On n'obtient ici qu'une inégalité puisque cette formule est obtenue par passage à la limite faible de l'égalité correspondante vérifiée par les approximations de Galerkin de la solution.

Deuxième pas : on fait tendre le paramètre de pénalisation λ vers zéro. L'inégalité d'énergie (2.10) permet d'obtenir des bornes indépendantes de λ (puisque $\mathcal{E}_\lambda(t=0) = \mathcal{E}(t=0)$ car u_0 est de norme 1). Ces bornes autorisent l'extraction d'une sous suite convergeant faiblement vers (u, E, H).

Par l'inégalité d'énergie, puisque les injections de Sobolev nous assurent que, à extraction près, u^λ tend fortement vers u dans L^4, on obtient que u est de norme 1 presque partout.

Par linéarité, il est clair que la limite faible vérifie l'équation de Maxwell.

Par semi continuité inférieure, on obtient facilement l'inégalité d'énergie pour (u, E, H).

Pour obtenir l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert, étant donnée une fonction test ψ, il suffit de prendre $u^\lambda \wedge \psi$ comme fonction test dans (2.9), ce qui a pour effet d'éliminer le terme de pénalisation puisque $\frac{1}{\lambda}u^\lambda(|u^\lambda|^2-1)\cdot(u^\lambda\wedge\psi) = 0$, ce qui permet d'obtenir à la limite l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert.

Remarque 2.4 *L'unicité des solutions faibles demeure un problème ouvert. A noter que si l'on ne prend pas en compte le champ magnétique dans l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert, Alouges et Soyeur construisent dans [4] des données initiales pour lesquelles il n'y a pas unicité. Ces données initiales sont des applications faiblement harmoniques à valeurs dans la sphère (vérifiant $u\wedge\Delta u = 0$, et donc solutions de (2.5)) mais qui sont instationnaires au sens suivant : elles ne sont pas points critiques de l'énergie de Dirichlet sur Ω avec la contrainte $|u| = 1$ lorsque l'on autorise des variations dans le domaine de départ. La preuve du résultat de non unicité est donc basée sur la construction d'applications faiblement harmoniques non stationnaires à valeurs dans la sphère. Les processus algébriques de construction d'applications harmoniques ne sont pas transposables dans le cas des points critiques de l'énergie du micromagnétisme en raison de l'énergie démagnétisante, qui est une énergie non locale que l'on ne sait pas traiter de façon explicite.*

2.2 Caractérisation de l'ensemble ω-limite

On s'intéresse dans cette partie au comportement en temps grand des solutions faibles du système Landau-Lifschitz-Gilbert. On fixe une solution faible (u, E, H) et on appelle ensemble ω-limite de u tout élément u_∞ de $H^1(\Omega)$ tel qu'il existe une suite de temps t_n tendant vers $+\infty$ vérifiant $u(t_n,\cdot) \rightharpoonup u_\infty$ faiblement dans $H^1(\Omega)$.
On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.2 *Soit $u_\infty \in \omega(u)$. Alors $|u_\infty| = 1$ presque partout et*

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_\infty \wedge \frac{\partial u_\infty}{\partial x_i}\right) + u_\infty \wedge \mathcal{H}(u_\infty) = 0.$$

Autrement dit, u_∞ est point critique de l'énergie du micromagnétisme E_{micro} sous la contrainte $|u| = 1$, et vérifie que u_∞ est parallèle à $\Delta u_\infty + \mathcal{H}(u_\infty)$.

Preuve : l'inégalité d'énergie nous donne des bornes sur (u, E, H) puisque l'on a :

$$\begin{cases} u \in L^\infty(I\!R^+; H^1(\Omega)), \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(I\!R^+ \times \Omega), \\ \\ E \in L^\infty(I\!R^+; L^2(I\!R^3)), \\ \\ H \in L^\infty(I\!R^+; L^2(I\!R^3)). \end{cases}$$

En particulier, l'existence de points dans $\omega(u)$ ne pose pas de problème, et on obtient aisément que $u_\infty = 1$.
On fixe $a > 0$. Pour passer à la limite dans l'équation de Landau-lifschitz, on pose, pour $s \in [-a, a]$, $U_n(s, x) = u(t_n + s, x)$, et en écrivant un théorème d'accroissement fini en utilisant que $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(I\!R^+ \times \Omega)$, on obtient que U_n tend vers u_∞ dans $L^2((-a, a) \times \Omega)$ fort et dans $L^2((-a, a); H^1(\Omega))$ au sens faible. On définit alors H_a^n et E_a^n par :

$$H_a^n(x) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} H(t_n + s, x) ds,$$

$$E_a^n(x) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} E(t_n + s, x) ds.$$

Les bornes sur E et H montrent que H_a^n et E_a^n sont bornées dans $L^2(I\!R^3)$ indépendemment de n et de a. Ceci nous permet dans un premier temps de supposer, quite à extraire une sous suite, que $H_a^n \rightharpoonup H_a$ et $E_a^n \rightharpoonup E_a$ dans $L^2(\Omega)$ faible.
En multipliant (2.5) par $1_{[t_n - a, t_n + a]}(t)\Psi(x)$ et en poussant n vers $+\infty$, on obtient que

$$u_\infty \wedge (\Delta u_\infty + H_a) = 0.$$

On fait maintenant tendre a vers $+\infty$. Le champ H étant dans $L^\infty(I\!R^+; L^2(I\!R^3))$, on peut définir $H_\infty \in L^2(I\!R^3)$ tel que $H_a \rightharpoonup H_\infty$ dans $L^2(I\!R^3)$ faible lorsque a tend vers $+\infty$.
En prenant la moyenne de la loi de Faraday sur $[t_n - a, t_n + a]$, et en faisant tendre n puis a vers $+\infty$, on obtient que div $(H_\infty + \overline{u_\infty}) = 0$.
En prenant la moyenne des équations de Maxwell sur $[t_n - a, t_n + a]$, on obtient que $\|\text{rot } H_a\|_{L^2(I\!R^3)} \leq \dfrac{C}{a}$, et en faisant tendre a vers $+\infty$, on obtient que rot $H_\infty = 0$.
Ainsi, $H_\infty = \mathcal{H}(u_\infty)$ et en conclusion,

$$u_\infty \wedge (\Delta u_\infty + \mathcal{H}(u_\infty)) = 0.$$

Remarque 2.5 *$H(t_n)$ n'a aucune raison de converger vers $\mathcal{H}(u_\infty)$, et c'est pour cela qu'on utilise ce procédé de moyennisation en temps. Par contre, lorsque l'on ajoute au modèle de la conductivité au moins sur un sous domaine de Ω, la dissipation ainsi introduite permet de s'affranchir du procédé de moyennisation comme cela est démontré dans [B3].*

2.3 Justification du modèle quasistationnaire

Le modèle quasistationnaire est notamment utilisé lorsque la taille de l'échantillon est très petite devant les longueurs d'ondes considérées. Après adimensionnement, cela correspond à dire que le coefficient η dans (2.3) est très petit devant 1. En faisant tendre ce coefficient vers zéro dans les équations, on obtient le théorème suivant :

Théorème 2.3 *On considère une suite $(\eta_n)_n$ tendant vers zéro lorsque $n \to +\infty$.*
Sous les hypothèses du théorème 2.1, si on note u_n une solution faible du système (2.5)-(2.3) avec $\eta = \eta_n$, il existe une sous suite encore notée $(u_n)_n$ telle que u_n tend vers u dans $L^\infty(I\!R^+; H^1(\Omega))$ faible $\star$, où u est une solution du modèle quasistationnaire.

Ce théorème est obtenu par un procédé de moyennisation en temps, notamment pour passer à la limite sur le champ magnétique. Ceci permet de supprimer les oscillations de H.

En posant $a_n = \sqrt{\eta_n}$, on définit u_n, H_n et E_n par

$$u^n(t,x) = \frac{1}{a_n}\int_0^{a_n} u_n(t+s,x)ds,$$

$$H^n(t,x) = \frac{1}{a_n}\int_0^{a_n} H_n(t+s,x)ds,$$

$$E^n(t,x) = \frac{1}{a_n}\int_0^{a_n} E_n(t+s,x)ds.$$

L'inégalité d'énergie permet d'obtenir sur u_n, E_n et H_n des bornes uniformes en n. On peut donc passer à la limite faible $\star$ dans le procédé de moyennisation, en supposant à extraction près que

$$\begin{array}{l} u^n \rightharpoonup u^\infty \text{ dans } L^\infty(I\!R^+; H^1(\Omega)) \text{ faible } \star, \\ E^n \rightharpoonup u^\infty \text{ dans } L^\infty(I\!R^+; L^2(I\!R^3)) \text{ faible } \star, \\ H^n \rightharpoonup u^\infty \text{ dans } L^\infty(I\!R^+; L^2(I\!R^3)) \text{ faible } \star. \end{array}$$

La quantité $\dfrac{\partial u_n}{\partial t}$ étant uniformément bornée dans $L^2(I\!R^+ \times \Omega)$, u^n converge fortment vers u^∞ dans $L^2(\Omega)$: ceci permet de passer à la limite dans l'équation de Landau-Lifschitz.
D'autre part, en faisant la moyenne de la loi de Faraday sur $[t, t+a_n]$, on montre que div $(H^\infty + \overline{u^\infty}) = 0$.
Enfin, en faisant la moyenne des équations de Maxwell sur $[t, t+a_n]$, puisque a_n est grand devant la période des oscillations de H, on obtient que rot $H^\infty = 0$.
Ainsi, $H^\infty = \mathcal{H}(\infty)$, et la convergence vers les solutions du modèle quasistationnaire est démontrée.

2.4 Couche mince de matériau ferromagnétique

Dans [A7], on étudie le comportement des matériaux ferromagnétiques en couche mince. On note Ω_h la couche mince d'épaisseur h, qui peut soit être plane ($\Omega_h = \omega \times]0, h[$), soit non planes difféomorphes à $\omega \times]0, h[$. Dans tous les cas, on fait un changement d'échelle dans la dimension mince pour se ramener à un domaine fixe, puis on passe à la limite lorsque h tend vers zéro. On obtient alors un modèle bi-dimensionnel.

On étudie aussi bien les configurations statiques, *i.e.* les minima de l'énergie du micromagnétime donnée par :

$$\mathcal{E}(u) = \int_{\Omega_h} |\nabla u|^2 + \int_{I\!R^3} |\mathcal{H}(u)|^2,$$

où l'opérateur $\mathcal{H}$ est défini par (2.4), que les configurations dynamiques solutions sur Ω_h des équations de Landau-Lifschitz quasistationnaire.

Pour une couche mince plane, on obtient le théorème suivant concernant les configurations statiques :

Théorème 2.4 *Soit $u_h \in H^1(\omega\times]0,h[;S^2)$ qui minimise l'énergie $\mathcal{E}$. On note $\tilde{u}_h(x,y,z) = u_h(x,y,hz)$. Alors, à extraction près, la suite $(\tilde{u_h})_h$ tend dans $H^1(\omega\times[0,1])$ faible vers une constante de norme 1 notée e.*
Cette constante est contenue dans le plan de ω et minimise sur S^1, le cercle unité de $I\!R^2$, la fonction F donnée par :

$$F(\xi) = \int_{\partial\omega} |(\xi\cdot n(y))|^2 d\sigma(y),$$

où n est la normale unitaire sortante à $\partial\omega$.

Le comportement des solutions faibles du modèle quasistationnaire sur $\omega\times]0,h[$ est décrit par le théorème suivant :

Théorème 2.5 *Soit $u_0 \in H^1(\omega;S^2)$. On note $v_h \in L^\infty(I\!R^+;H^1(\omega\times]0,h[)$ une solution faible des équations de Landau-Lifschitz quasistationnaire (2.5)-(2.4) issue de la donnée initiale $u_h^0(x,y,z) = u_0(x,y)$. On note $\tilde{v}_h(t,x,y,z) = v_h(t,x,y,hz)$.*
À extraction près, $\tilde{v}_h$ tend faiblement dans $L^\infty(I\!R^+;H^1(\omega\times]0,h[)$ faible $\star$ et presque partout vers $\tilde{v}$, fonction indépendante de z, vérifiant $\tilde{v} \in L^\infty(I\!R^+;H^1(\omega;S^2))$, solution faible du problème suivant :

$$\begin{cases} \tilde{v}(t=0) = u_0, \\ \dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial t} + v \wedge \dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial t} = 2\tilde{v}\wedge(\Delta\tilde{v} + P(\tilde{v}))\,, \end{cases}$$

où $P : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ est donné par $P(\xi) = -(\xi\cdot e_3)e_3$ (e_3 étant le troisième vecteur de la base canonique).
En outre, $\tilde{v}$ vérifie l'inégalité d'énergie suivante :

$$\mathcal{E}_2(t) + \int_0^t \|\frac{\partial\tilde{v}}{\partial t}\|^2_{L^2(\omega)} \leq \mathcal{E}_2(0),$$

où

$$\mathcal{E}_2(t) = \int_\omega |\nabla\tilde{v}(t)|^2 + \int_\omega |\tilde{v}_3(t)|^2.$$

Dans les deux cas, la démonstration est basée sur un rescaling en z pour se ramener à un domaine fixe. Ce rescaling dans les équations donnant $\mathcal{H}(u)$ en fonction de u montre que le champ démagnétisant tend vers un champ $P(u)$ type anisotropie forçant le moment magnétique à être dans le plan de la couche mince :

$$P(u) = -(u\cdot e_3)e_3$$

où e_3 est le troisième vecteur de la base canonique.
Dans le cas stationnaire, en comparant l'énergie du minimiseur à l'énergie d'un champ constant, on montre que la limite est une constante incluse dans le plan de la couche mince. De plus, en faisant un développement asymptotique de l'énergie d'un moment magnétique constant, on montre que la constante limite doit minimiser l'énergie F. Ce résultat repose sur l'écriture du champ démagnétisant sous forme intégrale à l'aide du noyau du laplacien. A noter que cette formulation intégrale est utilisée dans [A3] pour calculer les équations des points critiques non stationnaires de l'énergie du micromagnétisme.

Dans le cas non stationnaire, la formule de l'énergie (2.8) permet d'estimer les solutions après changement d'échelle pour passer à la limite faible.

Lorsque la couche Ω_h est difféomorphe à $\omega\times]0,h[$, on est amené à utiliser un changement de variables $\Psi : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ tel que $\Psi(\omega\times]0,h[) = \Omega_h$, puis à faire les calculs dans les nouvelles coordonnées.

Le résultat remarquable est qu'ici aussi, le champ démagnétisant se comporte en couche mince comme un champ d'anisotropie de la forme $P(u) = -(u \cdot n)n$ où n est la normale à la couche mince.

Remarque 2.6 *Ces résultats ont été ensuite prolongés à des couches minces difféomorphes à $S^2 \times [0,h]$ par D. Sanchez (cf. [59]), en utilisant les techniques géométriques développées dans la troisième partie de ce mémoire pour l'étude des méthodes de pénalisation en mécanique des fluides (cf. paragraphe 2.1 de la partie III).*

Remarque 2.7 *Ce comportement du champ démagnétisant en couche mince a été aussi observé par Haddard dans sa thèse (cf. [28]).*

3 Existence de solutions fortes

Dans cette partie, le coefficient d'échange est fixé, et on prend $\varepsilon = 1$. Dans le premier travail [A6], le domaine est $I\!R^3$ tout entier, ce qui permet d'utiliser une discrétisation en espace qui a le mérite de conserver la condition de norme 1. On démontre ensuite l'existence de solutions régulières sur un domaine borné dans [A5] pour le modèle quasistationnaire, et dans [S3] pour le couplage Landau-Lifschitz-Maxwell.

3.1 Solutions fortes sur $I\!R^3$

Sur $I\!R^3$, on peut utiliser une discrétisation en espace, décrite dans [39] et utilisée dans [61] par P.L. Sulem, C. Sulem et C. Bardos pour établir l'existence de solutions régulières à l'équation $\dfrac{\partial u}{\partial t} = u\wedge\Delta u$. Cette méthode a pour intérêt de conserver au cours de la discrétisation la contrainte géométrique $|u| = 1$.
Dans un premier temps, on étudie l'équation de Landau-Lifschitz (2.1) sans champ magnétique :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \wedge \Delta u - u \wedge (u \wedge \Delta u)),$$

et on montre l'existence de solutions régulières locales en temps vérifiant :

$$\nabla u \in L^\infty((0,T); H^1(I\!R^3)) \cap L^2((0,T); H^2(I\!R^3)).$$

On démontre aussi dans ce cadre là l'existence de solutions globales à données petites, *i.e.* si $\|\nabla u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}$ est petit.

On étudie ensuite le système Landau-Lifschitz-Maxwell, mais exprimé avec B comme inconnue au lieu de H (car on préfère traiter rot u dans les équations plutôt que $\frac{\partial u}{\partial t}$). On étudie donc le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = u \wedge (\Delta u + B) - u \wedge (u \wedge (\Delta u + B)), \\ \dfrac{\partial B}{\partial t} = -\text{rot } E, \\ \dfrac{\partial E}{\partial t} = \text{rot } B - \text{rot } u, \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot), \quad B(0,\cdot) = B_0(\cdot), \quad E(0,\cdot) = E_0(\cdot). \end{cases} \tag{2.11}$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.6 *Soit* (u_0, E_0, B_0) *tel que :*

$$E_0 \in H^1(\mathbb{R}^3), \quad B_0 \in H^1(\mathbb{R}^3), \quad \text{div } B_0 = 0,$$

$$|u_0| = 1, \quad \nabla u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3).$$

Alors il existe un temps $T^\star$ *et un unique* (u, E, B) *tel que*

(*i*) $|u| = 1$, $\nabla u \in L^\infty((0,T); \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2((0,T); \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^3))$ *pour tout* $T < T^\star$,

(*ii*) E *et* B *sont dans* $L^\infty((0,T); H^1(\mathbb{R}^3))$,

(*iii*) (u, E, B) *vérifient (2.11).*

Ici aussi, on utilise comme procédé d'approximation une dicrétisation en espace qui conserve la norme ponctuelle des solutions en tout temps.

3.2 Solutions fortes en domaines bornés pour le modèle quasistationnaire

On démontre le théorème suivant :

Théorème 2.7 *Soit* $u_0 \in H^2(\Omega)$ *tel que* $\frac{\partial u_0}{\partial n} = 0$ *sur* $\partial\Omega$ *et tel que* $|u_0| = 1$ *sur* Ω. *Alors il existe un temps* $T^\star$ *et une unique application* $u : [0, T^\star[\times \Omega \longrightarrow S^2$ *vérifiant :*

$$u \in \mathcal{C}^0([0,T]; H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^3(\Omega)) \text{ pour tout } T < T^\star,$$

avec u *de norme 1, et* u *solution de l'équation de Landau-Lifschitz quasistationnaire (2.1)-(2.4).*

En domaine borné, le procédé de discrétisation en espace utilisé précédemment n'a plus cours. D'autre part, le problème d'une méthode d'approximation de Galerkin est qu'elle ne peut pas conserver la contrainte de norme ponctuelle égale à 1. Enfin, autre défaut de l'équation de

Landau-Lifschitz, elle ne fait apparaître que de la dissipation dans la partie tangentielle du laplacien $u \wedge \Delta u$.

Pour palier à ces problèmes, on remarque la propriété suivante : si u est une solution régulière de l'équation de Landau-Lifschitz, puisque u est régulière de norme 1, on a

$$u \wedge (u \wedge \Delta u) = -\Delta u - u|\nabla u|^2.$$

Ainsi, u est aussi solution de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u|\nabla u|^2 + u \wedge \Delta u + u \wedge \mathcal{H}(u) - u \wedge (u \wedge \mathcal{H}(u)). \tag{2.12}$$

Cette nouvelle équation ne conserve par la norme ponctuelle des solutions. Par contre, elle conserve la norme 1 pour les solutions régulières. Il suffit pour s'en convaincre de multiplier (2.12) par u et on obtient l'équation vérifiée par $a := |u|^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} - \Delta a = (a-1)|\nabla u|^2, \\ \dfrac{\partial a}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ a(t=0,x) = |u_0(x)|^2 = 1 \text{ sur } \Omega, \end{cases}$$

qui est une équation parabolique pour laquelle il y a unicité de la solution du problème de Cauchy. Or la fonction constante égale à 1 est solution, donc $|u| = 1$.

Ainsi, si u est une solution régulière de (2.12), étant de norme 1, u est solution régulière de (2.1).

On est donc ramené à construire des solutions régulière pour le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = |\nabla u|^2 u + u \wedge \Delta u + u \wedge H(u) - u \wedge (u \wedge H(u)) & \text{dans } I\!R_t^+ \times \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } I\!R_t^+ \times \partial\Omega, \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.13}$$

On construit une approximation de Galerkin du problème (2.13) sur la base des vecteurs propres du laplacien sur Ω avec condition de Neumann homogène au bord. En notant V_n l'espace engendré par les n premières valeurs propres de $A = -\Delta + Id$ sur le domaine $D(A) = \left\{ u \in H^2(\Omega),\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$, en notant P_n la projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur V_n, on cherche $u_n \in V_n$ solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta u_n - P_n \left[|\nabla u_n|^2 u_n + u_n \wedge (\Delta u_n + H(u_n)) - u_n \wedge (u_n \wedge H(u_n)) \right] = 0, \\ u_n(0) = P_n(u_0). \end{cases} \tag{2.14}$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une solution au problème (2.14), et on cherche à estimer cette solution indépendamment de n.

En multipliant (2.14) par u_n, on obtient une estimation L^2 du type :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u_n\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.15}$$

On multiplie ensuite (2.14) par $\Delta^2 u_n$, et on intégre par parties. Les termes de bord issus de cette intégration par parties s'annulent puisque si e_i est un vecteur propres de A, $\dfrac{\partial \Delta e_i}{\partial n} = \lambda_i \dfrac{\partial e_i}{\partial n} = 0$.
En utilisant les inégalités de Hölder, de Sobolev et de Gagliardo-Nirenberg et après absorption de $\|\nabla\Delta u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}$ grâce à l'inégalité de Young, on obtient une estimation du type :

$$\frac{d}{dt}\left(\|\Delta u_n\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 + \|\nabla\Delta u_n\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\left(1 + \|u_n\|^5_{H^2(\Omega)}\right). \tag{2.16}$$

En sommant avec l'estimation (2.15), on obtient une estimation sur la norme H^2 du type :

$$\frac{d}{dt}\|u_n\|_{H^2(\Omega)} + \|\nabla\Delta u_n\|^2_{L^2(\Omega)} \leq K\left(1 + \|u_n\|^5_{H^2(\Omega)}\right). \tag{2.17}$$

La constante K ci dessus étant indépendante de n, en utilisant un lemme de comparaison, on majore $\|u_n(t)\|_{H^2(\Omega)}$ par $\xi(t)$ où ξ est solution de $\xi' = K(1+\xi^5)$ avec $\xi(0) = \|u_0\|_{H^2(\Omega)}$.
Ceci nous donne l'existence d'un temps $T^\star$ (temps d'explosion pour l'équation différentielle en ξ) et de constantes $C(T)$ indépendantes de n telles que pour $T < T^\star$ et pour tout n,

$$\|u_n\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} + \|u_n\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} \leq C(T).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on construit de manière classique une solution de (2.13) dans l'espace désiré.

Quelques remarques sur les spécificités de l'estimation (2.16) :
- les propriétés géométriques de l'équation sont essentielles, puisqu'elles permettent d'annuler le terme d'ordre le plus élevé dans l'estimation (2.16), terme qui ne pourrait être absorbé par ailleurs.
- une autre propriété essentielle pour l'estimation du champ démagnétisant est donnée par le lemme ci-dessous :

  Lemme 2.1 *Pour tout $p \in]1, +\infty[$, pour $k = 0$ ou $k = 1$, il existe une constante C telle que*

  $$\|\mathcal{H}(u)\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq c\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}. \tag{2.18}$$

  Ce lemme permet à chaque fois de majorer la norme $L^2(\Omega)$ ou $H^1(\Omega)$ de la restriction de $\mathcal{H}(u)$ à Ω par la norme de u. On remarque que l'extension de u par zéro en dehors de Ω crée un singularité au bord de Ω qui n'a pas d'incidence sur la régularité de la restriction de $\mathcal{H}(u)$ à Ω, puisque celle-ci a la même régularité que u.

Remarque 2.8 *On obtient une résultat d'existence locale des solutions régulières, mais on ne sait pas s'il y a effectivement explosion en temps fini. Cette explosion a lieu pour les solutions du flôt des applications harmoniques avec des données initiales bien choisies (cf. [19]). D'autre part, on obtient en l'absence de champ magnétique un théorème d'existence globale à données petites. Lorsque le champ magétique est présent, ce théorème n'est pas généralisable, car la petitesse de la donnée initiale signifierait que les deux quantités $\int_\Omega |\nabla u_0|^2$ et $\int_{I\!R^3} |\mathcal{H}(u_0)|^2$ sont petites simultanément, ce qui n'est pas possible. En effet, rendre le champ démagnétisant petit veut dire que u_0 est un champ de vecteur unitaire presque à divergence nulle, et les champs de vecteurs unitaires u_0 tels que $\operatorname{div} \overline{u_0} = 0$ sont singuliers, donc la norme du gradient ne peut être petite.*

3.3 Solutions régulières pour le couplage Landau-Lifschitz-Maxwell

Cette partie est consacrée au résultat d'existence de solutions régulières pour le modèle Landau-Lifschitz-Maxwell, à coefficient d'échange fixé. On démontre dans [S3] le théorème suivant :

Théorème 2.8 *Soit $u_0 \in H^3(\Omega)$ tel que $\frac{\partial u_0}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$ et que $|u_0| = 1$ sur Ω. Soient E_0 et H_0 dans H_{rot}, vérifiant $\text{div }(H_0 + \bar{u_0}) = 0$. Alors il existe un temps $T^\star$ et une unique solution (u, E, H) au couplage (2.1)-(2.3), telle que pour tout $T < T^\star$, $u \in L^2\big([0,T]; H^3(\Omega)\big) \cap \mathcal{C}^0\big([0,T]; H^2(\Omega)\big) \cap \mathcal{C}^1\big([0,T]; H^1(\Omega)\big)$ et E et H sont dans $\mathcal{C}^1\big([0,T]; L^2(I\!\!R^3)\big) \cap \mathcal{C}^0\big([0,T] : H_{\text{rot}}\big)$.*

Comme dans la partie précédente, pour bien faire apparaître toute la dissipation due au laplacien, on remplace dans Landau-Lifschitz le terme $u \wedge (u \wedge \Delta u)$ par $-\Delta u - u|\nabla u|^2$.

De plus, concernant le champ magnétique, on isole la partie à rotationnel nul $\mathcal{H}(u)$ que l'on sait traiter, de la partie à divergence nulle propagée par les équations de Maxwell. Ceci revient à faire la décomposition de Hodge du champ magnétique H en disant que

$$H = \mathcal{H}(u) + \mathbf{h},$$

où $\text{div }\mathbf{h} = 0$. Cette décomposition du champ magnétique en $H_\perp + H_\parallel$ avec $H_\perp = \mathbf{h}$ et $H_\parallel = \mathcal{H}(u)$ est utilisée dans [31] pour l'étude du système Landau-Lifschitz-Maxwell sans énergie d'échange.

On se ramène donc à résoudre le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{lll} & \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \quad u \wedge \Delta u + u|\nabla u|^2 & \\ (1) & \qquad\qquad +u \wedge \mathcal{H}(u) - u \wedge (u \wedge \mathcal{H}(u)) & \text{sur } \Omega, \\ & \qquad\qquad +u \wedge \mathbf{h} - u \wedge (u \wedge \mathbf{h}) & \\ (2) & \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ (3) & \dfrac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{h} = -\dfrac{\partial^2 P_\perp(u)}{\partial t^2} & \text{sur } I\!\!R^3, \end{array}\right. \tag{2.19}$$

où $P_\perp$ est le projecteur orthogonal dans $L^2(I\!\!R^3)$ sur les champs de divergence nulle.

Là aussi, on utilise une méthode de Galerkin, mais il va falloir faire des estimations plus poussées que pour le problème quasistationnaire, en raison du second membre de l'équation d'ondes.

Pour estimer $\mathbf{h}$, on est amené à multiplier l'équation d'ondes par $\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}$. On obtient alors :

$$\frac{d}{dt}\left(\|\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}\|^2_{L^2(I\!\!R^3)} + \|\nabla \mathbf{h}\|^2_{L^2(I\!\!R^3)}\right) \leq \|\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}\|_{L^2(I\!\!R^3)} \|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\|_{L^2(\Omega)},$$

et on doit donc estimer $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Pour ce faire, on dérive l'équation (1) dans (2.19) par rapport au temps pour obtenir l'équation vérifiée par $v = \frac{\partial u}{\partial t}$. En multipliant l'équation obtenue par Δv, on obtient une estimation de v en norme $L^\infty(0,T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega))$. La dérivée en temps

$\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ayant la même régularité que Δv, on obtient ainsi une majoration de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ en norme $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.
En combinant les estimations obtenues, on arrive au résultat suivant : on définit Q par

$$Q(t) = \|u\|^2_{H^2(\Omega)} + \|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\nabla \mathbf{h}\|^2_{L^2(I\!R^3)} + \|\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}\|^2_{L^2(I\!R^3)}.$$

Il existe un polynôme F tel que

$$\frac{dQ}{dt} + \|\nabla \Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta \frac{\partial u}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq F(Q).$$

On conclut la preuve par un simple lemme de comparaison.

4 Couches limites pour les solutions fortes

On veut étudier le comportement des solutions fortes construites dans les théorèmes 2.7 et 2.8 lorsque le coefficient d'échange ε^2 (situé devant le laplacien dans l'équation de Landau-Lifschitz) tend vers zéro.

Si l'on tient compte du coefficient ε dans les estimations réalisées pour prouver l'existence des solutions régulières, on s'aperçoit que les estimations obtenues explosent lorsque ε tend vers zéro.

Cette explosion est tout à fait logique. En effet, l'équation limite attendue est de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \wedge H - u \wedge (u \wedge H)$$

qui est une équation différentielle ordinaire qui ne conserve pas la condition de Neumann homogène au bord vérifiée par la solution à $\varepsilon > 0$. Ainsi, la norme H^2 des solutions u^ε ne peut qu'exploser lorsque ε tend vers zéro.

On va donc démontrer pour les deux modèles (quasistationanire et Landau-Lifschitz-Maxwell) qu'il apparaît au bord une couche limite que l'on va caractériser par une méthode BKW. On écrira ainsi que u^ε s'écrit comme la somme de la solution du problème limite plus un terme de couche limite plus un reste borné dans H^2 et tendant vers zéro dans H^1.

4.1 Couche limite pour le modèle quasistationnaire

On rappelle qu'on étudie le modèle quasistationnaire suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = u^\varepsilon \wedge (\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + \mathcal{H}(u^\varepsilon)) - u^\varepsilon \wedge (u^\varepsilon \wedge (\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + \mathcal{H}(u^\varepsilon)), \\[2ex] \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\[2ex] u^\varepsilon(t=0) = u_0. \end{cases} \tag{2.20}$$

On définit la fonction distance au bord : $\varphi(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$, qui va permettre de décrire la couche limite.

On démontre le théorème suivant :

Théorème 2.9 *Soit $u_0 \in H^5(\Omega)$ vérifiant $|u_0| = 1$ et $\dfrac{\partial u_0}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$. Si l'on note T^ε le temps maximum d'existence de la solution régulière de l'équation (2.20) issue de la donnée initiale u_0, alors $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T^\varepsilon = +\infty$. En outre, il existe une fonction $U \in L^\infty_{loc}(I\!R^+_t; H^4(\Omega_x) \otimes H^4(I\!R^+_z))$ telle que*

$$u^\varepsilon(t,x) = u^0(t,x) + \varepsilon U\big(t,x,\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\big) + \varepsilon v^\varepsilon(t,x),$$

où pour tout $T < T^\varepsilon$, la fonction v^ε est bornée dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$, et la fonction $\varepsilon v^\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^3(\Omega))$.

Comme pour la construction des solutions régulières, on travaille avec le problème équivalent suivant :

$$\begin{cases} (1)\ \ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon = \varepsilon^2 u^\varepsilon |\nabla u^\varepsilon|^2 + \varepsilon^2 u^\varepsilon \wedge \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon \wedge H^\varepsilon - u^\varepsilon \wedge (u^\varepsilon \wedge H^\varepsilon), \\ \\ (2)\ \ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = 0 \text{ au bord}, \\ \\ (3)\ \ \text{rot } H^\varepsilon = 0 \text{ sur } I\!R^3, \\ \\ (4)\ \ \text{div } (H^\varepsilon + u^\varepsilon) = 0 \text{ dans } I\!R^3, \end{cases} \tag{2.21}$$

(on note $H^\varepsilon = \mathcal{H}(u^\varepsilon)$).

Premier pas : méthode BKW.

On suppose que u^ε et H^ε admettent un développement asymptotique de la forme :

$$u^\varepsilon(t,x) = U^0\left(t,x,\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\, U^1\left(t,x,\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) + \dots$$

$$H^\varepsilon(t,x) = H^0\left(t,x,\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon H^1\left(t,x,\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) + \dots$$

où les fonctions U^i et H^i se décomposent sous la forme :

$$V(t,x,z) = \overline{V}(t,x) + \widetilde{V}(t,x,z),$$

avec $\overline{V}(t,x) = \lim\limits_{z\longrightarrow+\infty} V(t,x,z)$.

On suppose que $\widetilde{V}$, ainsi que toutes ses dérivées partielles aussi bien en x qu'en z tendent vers zéro lorsque z tend vers $+\infty$. En fait, le terme $\overline{V^i}$ est un terme intérieur d'ordre ε^i tandis que le terme $\widetilde{V^i}$ est le terme de couche limite d'ordre ε^i.

On remplace alors u^ε et H^ε dans les équation (2.21) par leurs développements asymptotiques et on identifie formellement les coefficients des différentes puissances de ε. Ceci nous permet d'obtenir des équations caractérisant les différents profils.

Détaillons l'obtention des termes d'ordre zéro :

Les équations (3) et (4) dans (2.21) à l'ordre ε^{-1} donnent $\nabla\varphi \wedge H^0_z = 0$ et $\nabla\varphi \cdot (H^0_z + U^0_z) = 0$, *i.e.* puisque $\nabla\varphi = -n$, on obtient que $H^0_z = -(U^0_z \cdot n)n$, et donc en intégrant en z (les deux quantités tendent vers zéro lorsque z tend vers $+\infty$) :

$$\widetilde{H^0} = -(\widetilde{U^0} \cdot n)n \tag{2.22}$$

En écrivant les mêmes équations à l'ordre ε^0, on obtient :

$$\text{rot } H^0 + \nabla\varphi \wedge H_z^1 = 0,$$

$$\text{div } (H^0 + U^0) + \nabla\varphi \cdot (U_z^1 + H_z^1) = 0.$$

Si l'on pousse z vers $+\infty$, ce qui a pour effet de faire tendre en zéro les termes en tilde, on voit que

$$\overline{H^0} = \mathcal{H}(\overline{U^0}) \tag{2.23}$$

et donc par différence,

$$\widetilde{H^1} = -(\widetilde{U^1} \cdot n)n \tag{2.24}$$

On écrit maintenant (1) à l'ordre ε^0. En faisant tendre z vers $+\infty$, on en déduit l'équation vérifiée par $\overline{U^0}$:

$$\frac{\partial \overline{U^0}}{\partial t} = \overline{U^0} \wedge \overline{H^0} - \overline{U^0} \wedge (\overline{U^0} \wedge \overline{H^0}) \tag{2.25}$$

ce qui, combiné à (2.23), caractérise complètement $\overline{U^0}$.

En écrivant la condition au bord (2) à l'ordre ε^{-1}, on obtient que $\widetilde{U_z^0} = 0$ pour $x \in \partial\Omega$ et $z = 0$. On étend cette condition pour tout $x \in \Omega$, et on obtient ainsi que $\widetilde{U^0}$ vérifie un système dont l'unique solution est la fonction nulle.

Remarque 2.9 *Comme on le précise dans l'introduction, le terme de couche limite est nul à l'ordre ε^0 puisque la couche limite est due à une incompatibilité de la condition de Neumann au bord. D'autre part, le premier terme du développement formel U^0 vérifie l'équation limite.*

On continue alors le processus pour définir les profils d'ordre 1. On voit ainsi que l'on peut prendre $\overline{U^1} = 0$ et que $\widetilde{U^1}$ est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{U^1}}{\partial t} - |\nabla\varphi|^2 \widetilde{U_{zz}^1} = |\nabla\varphi|^2 U^0 \wedge \widetilde{U_{zz}^1} + U^0 \wedge \widetilde{H^1} + \widetilde{U^1} \wedge H^0 + \text{ termes trilinéaires,} \\ \widetilde{U_z^1} = \dfrac{\partial U^0}{\partial n} \text{ en } z = 0, \end{cases}$$

où $\widetilde{H^1}$ est donné par (2.24), ce qui nous donne une équation parabolique en la variable rapide z avec x comme paramètre. On remarque que $|\nabla\varphi| = 1$ dans un voisinage du bord, ce qui simplifie l'équation obtenue pour $\widetilde{U^1}$.

Remarque 2.10 *Comme dans le cadre des couches limites, on observe une localisation dans la couche limite du champ démagnétisant, puique celui-ci se transforme en un champ d'anisotropie du même type que dans le cadre des couches minces*

Deuxième pas : existence et régularité des profils.

On montre via un théorème de Cauchy Lipschitz dans H^5 que la solution du problème (2.25) existe bien localement. De plus, elle reste ponctuellement de norme 1. Pour montrer que cette solution est globale, on montre d'abord que l'explosion en norme H^2 est impossible. En effet, en intégrant en temps (2.25), et en utilisant que $\|\overline{U^0}\|_{L^\infty} = 1$, on a une estimation du type :

$$\|\overline{U^0}(t)\|_{H^2} \leq \|u_0\|_{H^2} + C\int_0^t \|\overline{U^0}(t)\|_{H^2} + Ct + \int_0^t \|\overline{U^0}(s)\|_{H^2}\|\mathcal{H}(\overline{U^0}(s))\|_{L^\infty} ds.$$

Une majoration de $\|\mathcal{H}(\overline{U^0}(s))\|_{L^\infty}$ par $\|\mathcal{H}(\overline{U^0})\|_{H^2(\Omega)}$ puis par $\|\overline{U^0}\|_{H^2(\Omega)}$ ne permettrait pas d'obtenir la globalité de la solution. On utilise donc la majoration suivante, due à G. Métivier [43] :

$$\|\mathcal{H}(\overline{U^0})\|_{L^\infty} \leq C\ln\left(\|\overline{U^0}\|_{H^2} + 1\right),$$

qui permet d'obtenir que :

$$\|\overline{U^0}(t)\|_{H^2} \leq \|u_0\|_{H^2} + C\int_0^t \left[1 + \ln\left(\|\overline{U^0}(s)\|_{H^2} + 1\right)\right] \|\overline{U^0}(s)\|_{H^2}\, ds,$$

ce qui montre par un théorème classique de comparaison que $\overline{U^0}(t)$ reste borné en norme $H^2(\Omega)$ sur tout intervalle de temps borné.

Une fois que l'on sait que toute explosion est impossible en norme H^2, on montre facilement que l'explosion est impossible en norme supérieure, et donc $\overline{U^0}$ existe globalement.

Concernant $\widetilde{U^1}$, solution d'une équation parabolique en la variable $z \in \mathbb{R}^+$, on résout d'abord le même problème avec $z \in [0, L]$ puis on fait tendre L vers $+\infty$.

Dernier pas : estimation du reste.

On écrit u^ε sous la forme :

$$u^\varepsilon(t,x) = \overline{U^0}(t,x) + \varepsilon\, \psi(x)\widetilde{U^1}\left(t, x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\theta(t,x) + \varepsilon v^\varepsilon(t,x),$$

où $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ est une fonction de troncature qui vaut 1 au voisinage de bord, et s'annule loin du bord (ψ est notamment nulle là où φ n'est plus régulière), et où la fonction θ sert à relever la condition de Neumann au bord : $\theta \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^4(\Omega))$ tel que $\dfrac{\partial\theta}{\partial n}(t,x) = -\dfrac{\partial\widetilde{U^1}}{\partial n}(t,x,0)$ sur $\mathbb{R}^+ \times \partial\Omega$.

Ainsi, v^ε vérifie une équation similaire à (2.21) avec toujours une dissipation de la forme $\varepsilon^2\Delta v^\varepsilon$, avec un terme source en $\mathcal{O}(1)$ (puisque la méthode BKW a éliminé les termes d'ordre ε^{-1}) et avec des conditions de Neumann homogènes au bord.

On procède alors au même type d'estimations que pour le théorème (2.7). On pose

$$Q^\varepsilon(t) = \|v^\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\varepsilon v^\varepsilon\|^2_{H^2(\Omega)},$$

et on a une estimation du type :

$$\frac{dQ^\varepsilon}{dt} + \|\varepsilon^2\nabla\Delta v^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varepsilon\Delta v^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(1 + Q^\varepsilon) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} f(Q^\varepsilon),$$

où f est un polynôme.

Par un lemme classique de comparaison avec y^ε, la solution de $y' = C(1+y) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} f(y)$ dont le temps d'explosion T^ε tend vers $+\infty$ lorsque ε tend vers zéro, on conclut la preuve du théorème 2.9.

4.2 Couche limite pour le modèle Landau-Lifschitz-Maxwell

On étudie ici le comportement des solutions du couplage Landau-Lifschitz-Maxwell lorsque le coefficient d'échange tend vers zéro. Le système limite est le suivant :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial U^0}{\partial t} = U^0 \wedge H^0 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^0) \text{ dans } \Omega, \\ &\frac{\partial}{\partial t}(H^0 + U^0) + E^0 = 0 \text{ dans } I\!R^3, \\ &\frac{\partial E^0}{\partial t} - \text{rot } H^0 = 0 \text{ dans } I\!R^3. \end{aligned}\right. \tag{2.26}$$

Remarque 2.11 *Le système limite (2.26) est étudié par J. L. Joly, G. Métivier et J. Rauch dans [31] et [32]. On sait en particulier qu'il existe des solutions régulières de ce système, au sens où $U^0 \in \mathcal{C}^1\big(0,T;H^5(\Omega)\big)$ et E^0 et H^0 sont dans $\mathcal{C}^1\big(0,T;H^5_m(\Omega)\big)$ où*

$$H^k_m(\Omega) = \Big\{v \in L^2(I\!R^3),\ v_{|\Omega} \in H^k(\Omega) \textit{ et } v_{|^c\Omega} \in H^k(^c\Omega)\Big\}.$$

On démontre alors le théorème suivant :

Théorème 2.10 *Soit (U^0,H^0,E^0) une solution de (2.26) sur l'intervalle de temps $[0,T]$, vérifiant $U^0 \in \mathcal{C}^1\big(0,T;H^5(\Omega)\big)$, E^0 et $H^0 \in \mathcal{C}^1\big(0,T;H^5_m(\Omega)\big)$. Alors, pour ε assez petit, il existe une suite de données initiales $(u_0^\varepsilon, H_0^\varepsilon, E_0^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ vérifiant les hypothèses du théorème 2.8 telle que les solutions régulières $(u^\varepsilon, H^\varepsilon, E^\varepsilon)$ issues de ces données initiales, existant sur $[0,T]$, s'écrivent :*

$$\left\{\begin{aligned} &u^\varepsilon(t,x) = U^0(t,x) + \varepsilon V(t,x,\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon r^\varepsilon(t,x), \\ &H^\varepsilon(t,x) = H^0(t,x) + \varepsilon R^\varepsilon_H(t,x), \\ &E^\varepsilon(t,x) = E^0(t,x) + \varepsilon R^\varepsilon_E(t,x), \end{aligned}\right.$$

où
- *le profil $V(t,x,z)$ est dans $\mathcal{C}([0,T],H^4(\Omega)\otimes H^4([0,+\infty[)$ pour tout $T>0$,*
- *les restes vérifient l'estimation suivante :*

$$\|r^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H^1)} + \|\varepsilon r^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H^2)} + \|R^\varepsilon_H\|_{L^\infty(0,T;H_{\text{rot}})} + \|R^\varepsilon_E\|_{L^\infty(0,T;H_{\text{rot}})} \ \leq\ C.$$

Remarque 2.12 *En particulier, $(u^\varepsilon, H^\varepsilon, E^\varepsilon)$ tend vers (U^0,H^0,E^0) en norme $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)\times L^2(I\!R^3)\times L^2(I\!R^3))$.*

Comme pour la preuve de l'existence des solutions régulières, on utilise le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon = & \varepsilon^2 u^\varepsilon \wedge \Delta u^\varepsilon + \varepsilon^2 u^\varepsilon |\nabla u^\varepsilon|^2 \\ & +u^\varepsilon \wedge H^\varepsilon - u^\varepsilon \wedge (u^\varepsilon \wedge H^\varepsilon) \qquad \text{sur } \Omega, \\ & +u^\varepsilon \wedge \mathbf{h}^\varepsilon - u^\varepsilon \wedge (u^\varepsilon \wedge \mathbf{h}^\varepsilon) \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial^2 \mathbf{h}^\varepsilon}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{h}^\varepsilon = -\dfrac{\partial^2 P_\perp(u^\varepsilon)}{\partial t^2} & \text{sur } I\!R^3, \\ \text{rot } H^\varepsilon = 0 & \text{sur } I\!R^3, \\ \text{div } (H^\varepsilon + u^\varepsilon) = 0 & \text{dans } I\!R^3. \end{cases} \tag{2.27}$$

La preuve est basée sur une méthode BKW comme dans la preuve du théorème 2.9. L'anzatz pour u^ε et H^ε sera de la même forme (c'est à dire avec des profils de la forme $V^i(t, x, \dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon})$ où la variable rapide décrit la couche limite).
Par contre, on peut montrer qu'il n'apparaît pas de couche limite sur $\mathbf{h}^\varepsilon$, que l'on cherche sous la forme

$$\mathbf{h}^\varepsilon(t, x) = \mathbf{h}^0(t, x) + \varepsilon \mathbf{h}^1(t, x) + \dots.$$

La méthode formelle BKW nous permet de décrire les profils.
A l'ordre zéro, $\overline{U^0}$ et $\mathbf{h}^0$ vérifient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{U^0}}{\partial t} = \overline{U^0} \wedge (\mathcal{H}(\overline{U^0}) + \mathbf{h}^0) - \overline{U^0} \wedge (\overline{U^0} \wedge (\mathcal{H}(\overline{U^0}) + \mathbf{h}^0)), \\ \dfrac{\partial^2 \mathbf{h}^0}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{h}^0 = -\dfrac{\partial^2 P_\perp(\overline{U^0})}{\partial t^2}, \end{cases}$$

qui est une équation équivalente, pour les solutions régulières, au système Landau-Lifschitz-Maxwell sans énergie d'échange étudié par Joly-Métivier-Rauch.

Le terme de couche limite n'apparaît qu'à l'ordre 1, et il vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{U^1}}{\partial t} - \widetilde{U^1}_{zz} = \overline{U^0} \wedge \widetilde{U^1}_{zz} + \overline{U^0} \wedge \widetilde{\mathcal{H}^1} + \widetilde{U^1} \wedge \left(\overline{\mathcal{H}^0} + \mathbf{h}^0\right) + \text{ termes trilinéaires}, \\ \widetilde{\mathcal{H}^1} = -\left(\widetilde{U^1} \cdot n\right) n, \\ \widetilde{U^1_z} = \dfrac{\partial \overline{U^0}}{\partial n} \text{ en } z = 0. \end{cases} \tag{2.28}$$

A noter qu'on n'a pas besoin d'exprimer le terme d'ordre 1 pour $\mathbf{h}$.

Ensuite, on valide cette démarche formelle par une estimation sur les restes. On écrit la solution de (2.27) sous la forme :

$$\begin{cases} u^\varepsilon(t,x) = \overline{U^0}(t,x) + \varepsilon\, \psi(x)\widetilde{U^1}\left(t, x, \dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\theta(t,x) + \varepsilon v^\varepsilon(t,x), \\ \\ \mathbf{h}^\varepsilon(t,x) = \mathbf{h}^0(t,x) + \varepsilon \mathbf{l}^\varepsilon(t,x) \end{cases}$$

où, comme dans le cas quasistationnaire, $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R^3, I\!R)$ est une fonction de troncature qui vaut 1 au voisinage de bord, et s'annule loin du bord, et où la fonction θ sert à relever la condition de Neumann au bord pour avoir $\dfrac{\partial v^\varepsilon}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$.

L'équation vérifiée par le reste $(v^\varepsilon, \mathbf{l}^\varepsilon)$ permet d'estimer celui-ci en utilisant la quantité :

$$Q^\varepsilon = \|v^\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\varepsilon\Delta v^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varepsilon\nabla \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t}\|^2_{L^2} + \|\frac{\partial \mathbf{l}^\varepsilon}{\partial t}\|^2_{L^2(I\!R^3)} + \|\nabla \mathbf{l}^\varepsilon\|^2_{L^2(I\!R^3)}.$$

On obtient avec des méthodes analogues à celles utilisées pour démontrer l'existence de solutions régulières pour le système Landau-Lifschitz-Maxwell (cf. preuve du théorème 2.8) une inégalité du type :

$$\frac{dQ^\varepsilon}{dt} + \|\varepsilon^2\nabla\Delta v^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varepsilon^2\Delta\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(1+Q^\varepsilon) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} F(Q^\varepsilon),$$

où F est un polynôme.

Par théorème de comparaison, on peut estimer le reste $(v^\varepsilon, \mathbf{l}^\varepsilon)$ ce qui nous permet de conclure la preuve du théorème 2.10.

5 Conclusion

Les expériences physiques et les simulations numériques montrent la formation de domaines, dans lesquels le moment magnétique est presque constant, et de parois séparant ces domaines, dans lesquelles le moment magnétique varie fortement. La formation de ces parois est due à la compétition entre l'énergie d'échange et soit l'énergie démagnétisante dans le cas des matériaux ferromagnétiques doux (cf. [46]) soit l'énergie d'anisotropie.

Ce phénomène n'est encore que partiellement compris, même dans le cas stationnaire. Comme dans la modélisation des transitions de phases grâce à l'équation de Cahn-Hilliard, le passage à la limite du coefficient d'échange ε^2 vers zéro pourrait permettre à terme de comprendre la formation des parois comme le montrent les travaux de Rivière, Serfaty, Labbé et Alouges (cf. [53], [54], [3]).

Dans le cas non stationnaire, les travaux [A9] et [S3] décrivent uniquement les couches limites apparaissant au bord et non la formation et la dynamique des parois. La description de cette dynamique, y compris en dimension 1 pour un fil ferromagnétique, est un problème complètement ouvert.

Dans un autre ordre d'idée, lorsqu'à une configuration stable de matériau ferromagnétique en couche mince on applique un champ magnétique relativement fort, le moment magnétique a tendance à s'aligner avec le champ appliqué, sauf au bord du domaine où il apparaît une couche limite (cf [48]). L'apparition de cette couche limite, observée expérimentalement et par des simulations numériques, est aussi inexpliquée sur le plan mathématique.

Troisième partie

Analyse asymptotique de méthodes de pénalisation en mécanique des fluide

Les méthodes de pénalisation en mécanique des fluides sont utilisées depuis plus de vingt ans. Lorsque la géométrie du domaine d'écoulement est complexe, ces méthodes permettent, en ajoutant aux équations un terme de pénalisation prenant en compte cette géométrie, de se ramener à un domaine de calcul simple, et ainsi de pouvoir utiliser des maillages réguliers ou des méthodes spectrales de résolution. Après les premiers travaux de Peskin (cf. [49] et [50]), certains auteurs (cf. [25]) utilisent un terme de pénalisation sur la frontière. D'autres auteurs étendent la pénalisation à tout l'obstacle, ce qui permet de faire des simulations numériques performantes pour de grands nombres de Reynolds (cf. [55], [5], [6], [8]).
Dans ce dernier cas, il apparaît dans l'obstacle une couche limite induite par le terme de pénalisation. La description de cette couche limite va nous permettre de mieux comprendre les bonnes performances de ces méthodes de pénalisation.

1 Flôt autour d'un obstacle

On étudie ici des méthodes de pénalisation utilisées pour calculer le flôt d'un fluide visqueux incompressible en géométrie complexe. Il s'agit d'approcher les solutions des équations de Navier Stokes incompressible autour de l'obstacle Ω :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f \text{ dans } \mathcal{O} \setminus \Omega, \\ \text{div } u = 0 \text{ dans } \mathcal{O} \setminus \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\mathcal{O}$, ouvert borné régulier de $I\!R^3$, est le domaine global de calcul, $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset \mathcal{O}$ est un ouvert borné régulier.
Pour éviter l'utilisation de maillages non structurés qui respecteraient la géométrie de l'obstacle (cf. [35]) ou pour pouvoir utiliser des méthodes spectrales plus efficaces (cf. [36]), on introduit le problème pénalisé suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \Delta u^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon^2} \chi_\Omega u^\varepsilon = f \text{ dans } \mathcal{O}, \\ \text{div } u^\varepsilon = 0 \text{ dans } \mathcal{O}, \\ u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Dans [7], Angot, Bruneau et Fabrie montrent que l'erreur entre les solutions du problème pénalisé et la solution de (3.1) est en $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ lorsque ε tend vers zéro. Ils observent par contre numériquement que cette erreur est en fait d'ordre ε. Dans [A10], on démontre que ceci est la réalité. Le résultat s'obtient en explicitant le terme de couche limite induit dans l'obstacle par la pénalisation.

On utilise les notations suivantes :
- $\mathcal{U} = \mathcal{O} \setminus \overline{\Omega}$ est le domaine dans lequel circule le fluide,
- $\mathbf{V} = \Big\{ v \in H_0^1(\mathcal{U}; I\!R^3), \quad \operatorname{div} v = 0 \Big\}$,
- $\mathbf{H} = \Big\{ v \in L^2(\mathcal{U}; I\!R^3), \quad \operatorname{div} v = 0 \text{ et } v \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{U} \Big\}$,
- $\mathbf{P}$ est la projection orthogonale dans $L^2(\mathcal{U})$ sur $\mathbf{H}$,
- A est l'opérateur de Stokes, de domaine $\mathbf{H} \cap H^2(\mathcal{U})$ défini par $A = -\mathbf{P} \circ \Delta$, *i.e.* si $f \in \mathbf{H}$,

$$AV = f \iff \exists \pi \in H^1(\mathcal{U})/I\!R, \;\; -\Delta V + \nabla \pi = f.$$

On résout d'abord les équations de Navier-Stokes dans $\mathcal{U}$ (3.1) avec des données initiales régulières :

Proposition 3.1 *Soit $u_0 \in H^5(\mathcal{U}) \cap \mathbf{V}$. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(I\!R^+ \times \mathcal{U})$ à support inclus dans $\mathcal{U}$. On suppose que la donnée initiale u_0 vérifie les conditions de compatibilité suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0' := -Av_0 - \Pi\left((v_0 \cdot \nabla)v_0 - f_{|t=0}\right) \in \mathbf{V}, \\ \\ v_0'' := -Av_0' - \Pi\left((v_0' \cdot \nabla)v_0 + (v_0 \cdot \nabla)v_0' - \dfrac{\partial f}{\partial t}_{|t=0}\right) \in \mathbf{V}. \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Alors il existe un temps $T^\star > 0$ et il existe $U^0 : [0, T^\star[\times \mathcal{U} \longrightarrow I\!R^3$ tels que pour tout $T < T^*$, $U^0 \in L^\infty(0,T; H^5(\mathcal{U})) \cap L^2(0,T; H^6(\mathcal{U}))$, et telle que U^0 soit solution de (3.1) avec u_0 comme donnée initiale.

Remarque 3.1 *En dimension 2, $T^\star = +\infty$.*

On approche U^0 par u^ε solution du problème pénalisé (3.2) et on montre le théorème suivant :

Théorème 3.1 *Soient u_0, U^0 et $T^\star$ donnés par la proposition 3.1. Alors il existe des profils $U^1 : [0, T^*[\times \mathcal{U} \longrightarrow I\!R^3$ et $V^1 : [0, T^*[\times \Omega \times I\!R^+ \longrightarrow I\!R^3$ telles que si u_0^ε est une donnée initiale s'écrivant :*

$$u_0^\varepsilon(x) = \begin{cases} u_0(x) + \varepsilon U^1(0,x) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} r^\varepsilon(x) \;\; \textit{if } x \in \mathcal{U}, \\ \varepsilon V^1(0, x, \dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} r^\varepsilon(x) \;\; \textit{if } x \in \Omega, \end{cases}$$

où $\|r^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq K$ et telles que $\operatorname{div} u_0^\varepsilon = 0$ sur $\mathcal{O}$, alors il existe une solution faible au problème pénalisé (3.2) qui s'écrit :

$$u^\varepsilon(t,x) = \left\{ \begin{array}{l} U^0(t,x) + \varepsilon U^1(t,x) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} v_\varepsilon^r(t,x) \;\; \textit{pour } x \in \mathcal{U}, \\ \varepsilon V^1(t, x, \dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} v_\varepsilon^r(t,x) \;\; \textit{pour } x \in \Omega, \end{array} \right.$$

où le reste v_ε^r est borné dans $L^\infty(0,T; L^2) \cap L^2(0,T; H^1)$ pour tout $T < T^\star$.

Remarque 3.2 *Les profils U^1 et V^1 sont assez réguliers pour que l'on puisse déduire du développement asymptotique obtenu dans le théorème 3.1 que l'erreur entre u^ε et U^0 est exactement d'ordre ε dans $L^\infty(0,T; L^2(\mathcal{U}))$ pour tout $T < T^\star$.*

Remarque 3.3 *Le terme de couche limite V^1 "s'allume" même si $V^1(t=0)$ est nul. En effet, la couche limite est due à une incompatibilité sur les conditions de Neumann au bord. Lorsque ε tend vers zéro, on cherche à coupler la solution de (3.1) dans $\mathcal{U}$ à la fonction nulle dans Ω, en imposant que le saut de u soit nul (pas de problème pour cette condition) et aussi que le saut de $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ soit nul, ce qui est faux (puisque $\dfrac{\partial U^0}{\partial n}$ n'a aucune raison d'être nul sur $\partial\Omega$).*

Remarque 3.4 *La couche limite due à la méthode numérique n'apparaît que dans l'obstacle. Elle ne se superpose donc pas avec la couche limite due à la viscosité, que l'on observe dans le fluide au bord de l'obstacle.*

La preuve du théorème 3.1 est basée sur l'analyse de la couche limite qui apparaît dans l'obstacle au voisinage du bord.

La première étape de la preuve est donc d'appliquer une méthode BKW sur le problème (3.2) que l'on traduit par :

$$\begin{cases} (1) \quad \dfrac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} - \Delta v^\varepsilon + (v^\varepsilon \cdot \nabla) v^\varepsilon + \nabla q^\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon^2} v^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega, \\ (2) \quad \operatorname{div} v^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega, \\ (3) \quad \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \Delta u^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = f & \text{dans } \mathcal{U}, \\ (4) \quad \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathcal{U}, \\ (5) \quad u^\varepsilon = v^\varepsilon & \text{sur } \partial\Omega, \\ (6) \quad -\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} + p^\varepsilon n = -\dfrac{\partial v^\varepsilon}{\partial n} + q^\varepsilon n & \text{sur } \partial\Omega, \\ (7) \quad u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \end{cases} \tag{3.4}$$

où l'on a noté v^ε (resp. q^ε) la restriction de u^ε (resp. p^ε) sur l'obstacle Ω. La condition de saut (6) provient de la formulation variationnelle de (3.2) dans laquelle on intègre par parties $-\Delta u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon$.

On cherche un développement asymptotique de u^ε et v^ε sous la forme :

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(t,x) &= U^0(t,x) + \varepsilon U^1(t,x) + \dots, \\ p^\varepsilon(t,x) &= p^0(t,x) + \dots, \\ v^\varepsilon(t,x) &= V^0(t,x,\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon V^1(t,x,\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \dots, \\ q^\varepsilon(t,x) &= q^0(t,x,\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \dots, \end{aligned} \tag{3.5}$$

où $\varphi(x) = dist(x, \partial\Omega)$. Les profils dans l'obstacle Ω s'écrivent :

$$W^i(t,x,z) = \overline{W}^i(t,x) + \widetilde{W}^i(t,x,z)$$

où $\widetilde{W^i}(t,x,z)$ et toutes ses dérivées tendent vers zéro lorsque z tend vers $+\infty$.

On injecte le développement formel (3.5) dans le système (3.4) et en identifiant les puissances de ε, on caractérise les profils. On obtient ainsi que U^0 est la solution du problème (3.1), et que U^1 satisfait l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U^1}{\partial t} - \Delta U^1 + (U^1 \cdot \nabla)U^0 + (U^0 \cdot \nabla)U^1 + \nabla p^1 = 0 & \text{dans } \mathcal{U}, \\ \operatorname{div} U^1 = 0 & \text{dans } \mathcal{U}, \\ U^1 = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \\ U^1 = \left(\dfrac{\partial U^0}{\partial n}\right)_T & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

Dans l'obstacle Ω, on obtient tout d'abord que $V^0 = 0$. Le terme de couche limite n'apparaît qu'à l'ordre ε^1 (puisque la couche limite est due à une incompatibilité dans la condition de Neumann). Il est donné par :

$$\widetilde{V^1}(t,x,z) = \left(\frac{\partial U^0}{\partial n}\right)_T (t, P(x))e^{-z}.$$

On montre qu'à l'ordre ε^0, il n'y a pas de terme de couche limite en pression, et que celle-ci est continue à la frontière, *i.e.*

$$p^0 = q^0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

A l'intérieur de l'obstacle, la vitesse est donnée par :

$$\overline{V^1} + \nabla\overline{q^0} = 0,$$

qui est la loi de Darcy.

Sachant que la divergence de $\overline{V^1}$ est nulle, on peut alors déterminer complètement la pression à l'intérieur de Ω :

$$\begin{cases} \Delta\overline{q^0} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ p^0 = q^0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors que seuls les termes d'ordre 1 apparaissent dans l'énoncé du théorème 3.1, pour pouvoir mener à bien les estimations, on doit poursuivre le développement asymptotique jusqu'à l'ordre ε^2, et caractériser U^2, W^2 et q^1.

Une fois que les profils sont déterminés, et que l'on a montré qu'ils existent et sont réguliers, on conclut la preuve du théorème par l'estimation du reste. Pour ce faire, on définit r^ε par $r^\varepsilon = u_r^\varepsilon$

dans $\mathcal{U}$ et $r^\varepsilon = v_r^\varepsilon$ dans Ω où :

$$\begin{cases} u^\varepsilon(t,x) = U^0(t,x) + \varepsilon U^1(t,x) + \varepsilon^2 U^2(t,x) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_r^\varepsilon(t,x) \text{ pour } x \in \mathcal{U}, \\ v^\varepsilon(t,x) = \varepsilon\theta(x)\widetilde{V^1}(t,x,\dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon^2\overline{V^2}(t,x) + \varepsilon^2\theta(x)\widetilde{V}^2(t,x,\dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} v_r^\varepsilon(t,x) \text{ pour } x \in \Omega, \\ p^\varepsilon(t,x) = p^0(t,x) + \varepsilon p^1(t,x) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} p_r^\varepsilon(t,x) \text{ pour } x \in \mathcal{U}, \\ q^\varepsilon(t,x) = \overline{q^0}(t,x) + \varepsilon\theta(x)\widetilde{q^1} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} q_r^\varepsilon(t,x) \text{ pour } x \in \Omega, \end{cases}$$

où θ est une fonction de troncature nulle loin du bord.

On écrit l'équation vérifiée par le reste, qui est du type :

$$\frac{\partial u_r^\varepsilon}{\partial t} - \Delta u_r^\varepsilon + (U^\varepsilon \cdot \nabla) u_r^\varepsilon + (u_r^\varepsilon \cdot \nabla) U^\varepsilon + \varepsilon^{\frac{3}{2}} (u_r^\varepsilon \cdot \nabla) u_r^\varepsilon + \nabla p_r^\varepsilon = \text{ second membre,}$$

où $U^\varepsilon = U^0 + \varepsilon U^1 + \varepsilon^2 U^2$, et où le second membre provient des termes issus du développement formel que l'on n'a pas annulés par la méthode BKW. Le terme intérieur v_r^ε vérifie une équation du même type, avec en plus le terme $\dfrac{1}{\varepsilon^2} v_r^\varepsilon$ issu de la pénalisation.

On fait une estimation L^2 sur le reste en multipliant l'équation qu'il vérifie par u_r^ε dans $\mathcal{U}$ et par v_r^ε dans Ω.

Dans le second membre, il apparaît des termes issus du développement formel, par exemple, $\Delta\widetilde{V^2}$, et c'est pour pouvoir majorer ces termes en norme L^2 que l'on a besoin de régularité sur les profils, et donc sur la donnée initiale u_0.

Le terme bilinéaire pose un autre problème : on veut que l'estimation soit valable en tout temps où les profils sont définis, *i.e.* sur $[0, T^\star[$, où $T^\star$ est le temps d'existence de U^0. Il faut donc faire en sorte que le terme bilinéaire $\varepsilon^{\frac{3}{2}}(u_r^\varepsilon \cdot \nabla) u_r^\varepsilon$ n'introduise pas dans les majorations des termes non linéaires que l'on ne saurait pas contrôler.

On remarque alors que :

$$\int_{\mathcal{U}} (u_r^\varepsilon \cdot \nabla) u_r^\varepsilon \cdot u_r^\varepsilon = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{U}} \text{div } u_r^\varepsilon |u_r^\varepsilon|^2 + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |u_r^\varepsilon|^2 (u_r^\varepsilon \cdot n) \tag{3.7}$$

Le terme de bord sera éliminé par le même terme provenant de v_r^ε, et le premier terme est nul car u_r^ε est à divergence nulle.

C'est justement cette condition de divergence qui fait défaut pour v_r^ε, dont la divergence est d'ordre ε, puisque div $v_r^\varepsilon = -\varepsilon^{-\frac{3}{2}}$div V^ε. On est donc amené à considérer un relèvement de div V^ε en introduisant ψ_ε tel que :

$$\begin{cases} \psi_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \\ \text{div } \psi_\varepsilon = -\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \text{div } V^\varepsilon \end{cases}$$

L'existence de ce relèvement est donné par le lemme suivant :

Lemme 3.1 *(Cf. [24]) Il existe une constante C telle que pour tout $g \in L^2(\Omega)$, tel que $\int_\Omega g = 0$, il existe $\psi \in H_0^1(\Omega)$ tel que* $\operatorname{div} \psi = g$ *avec* $\|\psi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)}$.

Ayant poussé le développement asymptotique pour obtenir que

$$\|\operatorname{div} V^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq K\varepsilon^2,$$

on peut donc supposer que ψ^ε est borné en norme $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$.

En utilisant avec $v_r^\varepsilon - \psi_\varepsilon$ une formule analogue à (3.7), on remarque que les termes de bord peuvent se compenser puisque, ψ_ε étant nulle sur $\partial\Omega$, on a $v_r^\varepsilon - \psi_\varepsilon = u_r^\varepsilon$ sur $\partial\Omega$.

En conclusion, on a l'estimation suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\|u_r^\varepsilon\|^2_{L^2(\mathcal{U})} + \|v_r^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \|\nabla u_r^\varepsilon\|^2_{L^2(\mathcal{U})} + \|\nabla v_r^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon^2}\|v_r^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \leq K(t)(1 + \|u_r^\varepsilon\|^2_{L^2(\mathcal{U})}),$$

ce qui conclut la preuve du théorème (3.1) par le lemme de Gronwall.

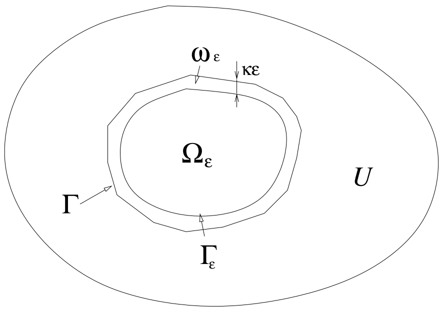
2 Flôt autour d'une couche mince de matériau poreux

Dans [S1] et [S2], on étudie des modèles et des méthodes numériques utilisés pour décrire le flôt d'un fluide visqueux incompressible autour d'un obstacle recouvert d'une couche mince de matériau poreux. Ces méthodes numériques sont notamment utilisées dans [16] avec comme application le contrôle passif de l'écoulement autour des véhicules. La couche mince poreuse a pour utilité de réduire la trainée et de faciliter la pénétration du véhicule dans le fluide.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$ (représantant le domaine global de calcul). Soit Ω un ouvert régulier avec $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset \mathcal{O}$, de frontière Γ. On fixe $\kappa > 0$. On définit la couche mince de matériau poreux par :

$$\omega_\varepsilon = \left\{x \in \Omega, \quad 0 < \operatorname{dist}(x,\Gamma) < \kappa\varepsilon\right\}.$$

On note $\mathcal{U} = \mathcal{O} \setminus \Omega$ et $\mathcal{U}^\varepsilon = \overline{\mathcal{U}} \cup \omega_\varepsilon$, domaine dans lequel le fluide circule. On note l'obstacle par $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon}$. En outre, on note $\Gamma_\varepsilon = \{x \in \Omega, \ \operatorname{dist}(x,\Gamma) = \varepsilon\} = \partial\Omega_\varepsilon$ et $\Gamma = \partial\Omega$.



La méthode utilisée dans [16] consiste à résoudre les équations de Navier Stokes dans tout $\mathcal{O}$ en ajoutant dans la couche poreuse une pénalisation en $\frac{1}{\varepsilon}$, et dans l'obstacle une pénalisation plus forte en $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Il s'agit donc de résoudre les problème suivant :

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \Delta u^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}\chi_{\omega_\varepsilon} u^\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\chi_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon + \nabla \pi^\varepsilon = f \text{ dans } \mathcal{O}, \\
\text{div } u^\varepsilon = 0 \text{ dans } \mathcal{O}, \\
u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O},
\end{cases}
\tag{3.8}
$$

où $\chi_{\omega_\varepsilon}$ (resp. $\chi_{\Omega_\varepsilon}$) est la fonction caractéristique de ω_ε (resp. Ω_ε).

Cette méthode numérique a les mêmes avantages que la méthode utilisée pour le calcul du flôt autour d'un obstacle, puisque on ne tient pas compte de la géométrie de Ω dans le domaine de calcul.

Le but de mon travail est de donner des modèles équivalents à l'équation (3.8), modèles que l'on peut trouver dans la littérature. Pour ce faire, on va obtenir un développement asymptotique de u^ε solution de (3.8), et montrer que les solutions des modèles proposés admettent au moins jusqu'à l'ordre ε^2 des développement asymptotiques similaires.

Commençons d'abord par décrire et analyser les modèles équivalents.

2.1 Modèle de couche mince pénalisée

Le premier modèle proposé est étudié dans [S1]. Il s'agit de résoudre les équations de Navier Stokes dans $\mathcal{U}_\varepsilon$ avec dans ω_ε une pénalisation en $\dfrac{1}{\varepsilon}$, et en imposant que le champ de vitesse soit nul sur Γ_ε. On résout donc :

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \Delta u^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}\chi_{\omega_\varepsilon} u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = f \text{ dans } \mathcal{U}^\varepsilon, \\
\text{div } u^\varepsilon = 0 \text{ dans } \mathcal{U}^\varepsilon, \\
u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}, \\
u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_\varepsilon.
\end{cases}
\tag{3.9}
$$

Ce modèle consiste à imposer dans le milieu poreux une perméabilité importante. On remarque que cette équation ne décrit pas un procédé numérique de résolution par pénalisation puisque le domaine de calcul $\mathcal{U}_\varepsilon$ tient toujours compte de la géométrie de l'obstacle. Son avantage dans mon étude est qu'il isole les difficultés dues à la couche mince de celles due à la couche limite qui apparaît dans l'obstacle pour (3.8) comme on le verra plus loin.

On va s'attacher à obtenir un développement asymptotique valable au moins à l'ordre ε^1 pour les solutions de (3.9). Pour ce faire, grâce à un changement d'échelle dans la direction orthogonale à la couche mince, on se ramène à un domaine fixe. Comme la couche mince n'est pas plate, on est amené à paramétrer celle-ci avec les variables (σ, z), où $\sigma = P(x)$ est la projection sur Γ et $\varepsilon z = \varphi(x)$ est la distance de x à Γ.

On va donc écrire les profils dans la couche mince comme des fonctions V^i de variables (σ, z) où $\sigma \in \Gamma$ et $z \in]0, \kappa[$, et on écrit le développement formel pour le champ de vitesse et pour la pression sous la forme :

$$u^\varepsilon(t,x) = \begin{cases} U^0(t,x) + \varepsilon U^1(t,x) + \dots \text{ si } x \in \mathcal{U}, \\ \\ V^0(t, P(x), \dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon V^1(t, P(x), \dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \dots \text{ si } x \in \omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Dans la couche mince, on doit donc calculer les opérateurs différentiels Δ, ∇ et div dans les nouvelles coordonnées. A titre d'exemple, pour $x \in \omega_\varepsilon$, on pose $v(x) = V(P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon})$. Le gradient de v est donné par :

$$\nabla v = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial V}{\partial z} n + \nabla_{\Gamma_{\varphi(x)}} V.$$

Dans cette formule, l'opérateur ∇_{Γ_s} est défini pour des fonctions $\tilde{v} : \Gamma \longrightarrow I\!R$ par :

$$\nabla_{\Gamma_s} \tilde{v}(\sigma) = (Id + s\, dn(\sigma))^{-1} (\nabla_\Gamma \tilde{v}(\sigma)),$$

où $n : \Gamma \longrightarrow S^2$ est le champ de normales unitaires entrantes dans Ω, et où

$$dn(\sigma) : T_\sigma \Gamma \longrightarrow T_{n(\sigma)} S^2$$

est sa dérivée en σ (c'est donc un endomorphisme de $T_\sigma\Gamma$ puisque $T_{n(\sigma)}S^2 = T_\sigma\Gamma$).

Ainsi, on exprime les opérateurs différentiels comme la somme de dérivées dans la variable transverse, dans laquelle on fait le changement d'échelle (ce qui a pour effet de faire sortir des $\dfrac{1}{\varepsilon}$), et de dérivées dans la variable tangentielle. Ces dérivées tangentielles dépendant de la distance à Γ, puisque l'on a $\varphi(x) \sim \varepsilon z$, on devra faire des développements limités en ε de ces opérateurs tangentiels dans la méthode BKW.

On a maintenant tous les outils géométriques pour faire une méthode BKW. On caractérise ainsi les différents profils. Par exemple U^1 est donné par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U^1}{\partial t} - \Delta U^1 + (U^0 \cdot \nabla) U^1 + (U^1 \cdot \nabla U^0) + \nabla p^1 = 0 \qquad \text{dans } \mathcal{U}, \\ \\ \text{div } U^1 = 0 \qquad \text{dans } \mathcal{U}, \\ \\ U^1(t,x) = -\kappa \left(\dfrac{\partial U^0}{\partial n} \right)_T \qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

Par rapport à la preuve du théorème (3.2), on peut faire les remarques suivantes :

- Dans la couche mince, les profils sont polynomiaux en la variable z en non en exponentielles décroissantes.
- Alors que la pénalisation est moins forte que dans (3.2), on trouve ici aussi un premier terme dans le fluide d'ordre ε. Ceci s'explique par le fait qu'on impose que la vitesse soit nulle à une distance $\kappa\varepsilon$ du bord, ce qui compense la faiblesse de la pénalisation.
- Pour avoir un reste d'ordre $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$, on doit pousser ici le développement asymptotique jusqu'à l'ordre ε^3. En effet, dans l'estimation du reste, on utilise de manière cruciale le lemme 3.1 de relèvement de la divergence. Or, la constante C donnée par ce lemme pour un ouvert fixé Ω est en $\dfrac{C}{\varepsilon}$ dans l'ouvert ω_ε. On a en effet le lemme suivant :

Lemme 3.2 *Il existe une constante C telle que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $g \in L^2(\omega_\varepsilon)$ tel que $\displaystyle\int_{\omega_\varepsilon} g = 0$, il existe $\psi \in H_0^1(\omega_\varepsilon)$ tel que $\operatorname{div} \psi = g$ et*

$$\|\psi\|_{H_0^1(\omega_\varepsilon)} \leq \frac{C}{\varepsilon}\|g\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}. \tag{3.11}$$

La preuve de ce lemme est assez technique. Lorsque la couche mince est plane, on procède de la manière suivante : on cherche à résoudre div $X = g$ sur $I\!R^2\times]0,\kappa\varepsilon[$. On définit alors $Y : I\!R^2\times]0,\kappa[\longrightarrow I\!R^3$ par

$$\begin{aligned} Y_1(x,y,z) &= X_1(x,y,\varepsilon z),\\ Y_2(x,y,z) &= X_2(x,y,\varepsilon z),\\ Y_3(x,y,z) &= \varepsilon X_3(x,y,\varepsilon z). \end{aligned}$$

En posant $\tilde{g}(x,y,z) = g(x,y,\varepsilon z)$, on se ramène à résoudre sur $I\!R^2\times]0,\kappa[$ l'équation

$$\operatorname{div} Y = \tilde{g}.$$

On applique alors une estimation indépendant de ε sur le domaine $I\!R^2\times]0,\kappa[$, et on a donc :

$$\|Y\|_{H_0^1(I\!R^2\times]0,\kappa[)} \leq C\|\tilde{g}\|_{L^2(I\!R^2\times]0,\kappa[)}. \tag{3.12}$$

En ramenant cette inégalité sur le domaine mince, puisque $\dfrac{\partial X_1}{\partial z} = \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial Y_1}{\partial z}$, on obtient :

$$\|X\|_{H^1(I\!R^2\times]0,\kappa\varepsilon[)} \leq \frac{C}{\varepsilon}\|g\|_{L^2(I\!R^2\times]0,\kappa\varepsilon[)}.$$

Lorsque le domaine n'est pas plat, on se ramène aussi au domaine fixe $\Gamma\times]0,\kappa[$ par un changement d'échelle. Contrairement à ce qui se passe dans le cas plan, l'opérateur obtenu sur le domaine fixe dépend alors de ε. On est donc amené à démontrer une inégalité de type (3.12) sur une famille d'opérateurs qui sont des perturbations (continues en ε) de la divergence. Cette inégalité est obtenu par dualité, comme dans la preuve du lemme de relèvement de la divergence.

On obtient, concernant le problème (3.9), le théorème suivant :

Théorème 3.2 *Soient u_0, f, $T^\star$ et U^0 donnés par la proposition 3.1. Il existe un profil $U^1 : [0,T^*[\times\mathcal{U} \longrightarrow I\!R^3$ et un profil $V^1 : [0,T^*[\times\Gamma\times[0,\kappa] \longrightarrow I\!R^3$ tels que si u_0^ε est une donnée initiale de la forme*

$$u_0^\varepsilon(x) = \begin{cases} u_0(x) + \varepsilon U^1(0,x) + \varepsilon^2 r^\varepsilon(x) \ \textit{si}\ x \in \mathcal{U},\\[2ex] \varepsilon V^1\left(0, P(x), \dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 r^\varepsilon(x) \ \textit{si}\ x \in \omega_\varepsilon, \end{cases}$$

où $\|r^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{U}_\varepsilon)} \leq K$ et telle que $\operatorname{div} u_0^\varepsilon = 0$ sur $\mathcal{U}_\varepsilon$, alors, il existe u^ε solution du problème (3.9) qui admet le développement asymptotique suivant :

$$u^\varepsilon(t,x) = \begin{cases} U^0(t,x) + \varepsilon U^1(t,x) + \varepsilon^2 u_r^\varepsilon(t,x) \ \textit{pour}\ x \in \mathcal{U},\\[2ex] \varepsilon V^1(t, P(x), \dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 u_r^\varepsilon(t,x) \ \textit{pour}\ x \in \omega_\varepsilon, \end{cases}$$

où le reste u_ε^r est borné dans $L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{U}_\varepsilon)) \cap L^2(0,T;H^1(\mathcal{U}_\varepsilon))$ pour tout $T < T^\star$.

2.2 Modèle avec condition équivalente au bord

Le modèle suivant est obtenu dans [45] par une méthode d'homogénéisation dans la couche mince poreuse. Il s'agit de résoudre dans la partie fluide $\mathcal{U}$ les équations de Navier Stokes avec au bord une condition mixte :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \Delta u^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = f \text{ dans } \mathcal{U}, \\ \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 \text{ dans } \mathcal{U}, \\ \\ u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}, \\ \\ u^\varepsilon = -\kappa\varepsilon \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} \right)_T \quad \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{3.13}$$

On démontre le théorème suivant :

Théorème 3.3 *Soient u_0, f, $T^\star$, U^0 et U^1 donnés par le théorème 3.2. Si u_0^ε est une donnée initiale de la forme*

$$u_0^\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon U^1(0,x) + \varepsilon^2 r^\varepsilon(x) \textit{ pour } x \in \mathcal{U},$$

où $\|r^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq K$ et telle que $\operatorname{div} u_0^\varepsilon = 0$ sur $\mathcal{U}$, alors, il existe u^ε solution du problème (3.13) qui admet le développement asymptotique suivant :

$$u^\varepsilon(t,x) = U^0(t,x) + \varepsilon U^1(t,x) + \varepsilon^2 u_r^\varepsilon(t,x),$$

où le reste u_ε^r est borné dans $L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{U})) \cap L^2(0,T;H^1(\mathcal{U}))$ pour tout $T < T^\star$.

La démonstration de ce théorème est particulièrement simple puisqu'il n'y a pas de phénomène de couche limite à analyser. L'estimation sur le reste n'a lieu que dans la partie fluide $\mathcal{U}$, et est du même type que l'estimation de u_r^ε dans la preuve du théorème 3.2.

Remarque 3.5 *Pour des données initiales proches à ε^2 près, les solutions des problèmes (3.9) et (3.13) admettent le même développement asymptotique jusqu'à l'ordre ε^2. Le développement asymptotique obtenu dans le théorème (3.2) pouvait laisser prévoir ce comportement. En effet, au bord de Ω, la solution u^ε de (3.9) est équivalente à εU^1, et U^1 vaut $-\kappa \dfrac{\partial U^0}{\partial n}$ sur $\partial\Omega$ et est donc équivalent à $-\kappa \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} \right)_T$. Ainsi, on voit que la solution de (3.9) u^ε est équivalente sur $\partial\Omega$ à $-\kappa\varepsilon \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} \right)_T$.*

2.3 Modèle de Brinkmann stationnaire

L'autre modèle équivalent est un couplage des équations de Navier Stokes dans le fluide avec les équations de Brinkman stationnaires dans la couche mince :

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \Delta u^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = f \text{ dans } \mathcal{U}, \\[2ex]
-\Delta u^\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon} u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = 0 \text{ dans } \omega_\varepsilon, \\[2ex]
[u^\varepsilon] = 0 \text{ sur } \Gamma, \\[2ex]
\left[\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} - p^\varepsilon n \right] = \dfrac{1}{2} |u^\varepsilon|^2 n \text{ sur } \Gamma, \\[2ex]
u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O} \cap \Gamma_\varepsilon, \\[2ex]
\operatorname{div} u^\varepsilon = 0 \text{ dans } \mathcal{U}^\varepsilon,
\end{cases}
\tag{3.14}
$$

où $[w]$ est le saut de w sur Γ.

Dans la couche mince, l'approximation de Brinkman consiste à négliger $\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}$ et $(u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon$, termes qui sont en effet d'ordre ε dans le développement BKW obtenu pour le problème (3.9). Dans la formule de saut sur Γ, on corrige le saut de la contrainte par le terme d'ordre ε^2 suivant : $\dfrac{1}{2}|u^\varepsilon|^2 n$. Cette correction est essentielle pour l'estimation L^2 des solutions puisqu'elle compense le terme de bord venant de l'intégration par parties de $\displaystyle\int_{\mathcal{U}} (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon \cdot u^\varepsilon$ (cf. le calcul (3.7)), ce qui permet d'obtenir l'existence globale des solutions faibles de (3.14).

Pour le modèle de Brinkman, on démontre le théorème suivant :

Théorème 3.4 *Soient u_0, f, $T^\star$, U^0, U^1 et V^1 donnés par le théorème 3.2. Si u_0^ε est une donnée initiale de la forme*

$$
u_0^\varepsilon(x) = \begin{cases}
u_0(x) + \varepsilon U^1(0,x) + \varepsilon^2 r^\varepsilon(x) \ \text{ si } x \in \mathcal{U}, \\[2ex]
\varepsilon V^1 \left(0, P(x), \dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^2 r^\varepsilon(x) \ \text{ si } x \in \omega_\varepsilon,
\end{cases}
$$

où $\|r^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{U}_\varepsilon)} \leq K$ et telle que $\operatorname{div} u_0^\varepsilon = 0$ sur $\mathcal{U}_\varepsilon$, alors, il existe u^ε solution du problème (3.14) qui admet le développement asymptotique suivant :

$$
u^\varepsilon(t,x) = \begin{cases}
U^0(t,x) + \varepsilon U^1(t,x) + \varepsilon^2 u_r^\varepsilon(t,x) \ \text{ pour } x \in \mathcal{U}, \\[2ex]
\varepsilon V^1(t, P(x), \dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 u_r^\varepsilon(t,x) \ \text{ pour } x \in \omega_\varepsilon,
\end{cases}
$$

où le reste u_ε^r est borné dans $L^\infty(0,T; L^2(\mathcal{U}_\varepsilon)) \cap L^2(0,T; H^1(\mathcal{U}_\varepsilon))$ pour tout $T < T^\star$.

Le développement asymptotique pour les solutions de (3.9) et de (3.14) sont donc similaires jusqu'à l'ordre 2, y compris dans la couche mince poreuse.

On a donc obtenu trois modèles décrivant le flôt d'un liquide newtonien autour d'un obstacle recouvert d'une couche mince de matériau poreux. Ces trois modèles sont équivalents à l'ordre 2. On va maintenant les comparer aux solutions de (3.8), équation qui est utilisée dans la pratique pour les simultations numériques.

2.4 Développement asymptotique pour l'équation (3.8)

On rappelle que l'on note $\varphi(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$. On note de plus $\Psi(x) = \text{dist}(x, \Gamma_\varepsilon)$ pour $x \in \Omega_\varepsilon$.

Pour (3.8), on obtient le théorème suivant :

Théorème 3.5 *Soient u_0 et f vérifiant les mêmes hypothèses de compatibilité que dans la proposition 3.1. Soit U^0 et $T^\star$ donnés par cette proposition.*
Alors il existe des profils $\mathbf{U}^1 : [0, T^*[\times \mathcal{U} \longrightarrow I\!R^3$, $\mathbf{V}^1 \longrightarrow [0, T^*[\times \Gamma \times [0, \kappa]$ et $W^1 : [0, T^*[\times \Omega_\varepsilon \times R^+ \longrightarrow I\!R^3$ tels que si l'on considère une donnée initiale u_0^ε de la forme :

$$u_0^\varepsilon(x) = \begin{cases} u_0(x) + \varepsilon \mathbf{U}^1(0, x) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} r^\varepsilon(x) \ \textit{si}\ x \in \mathcal{U}, \\ \\ \varepsilon \mathbf{V}^1\left(0, P(x), \dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} r^\varepsilon(x) \ \textit{si}\ x \in \omega_\varepsilon, \\ \\ \varepsilon W^1\left(0, x, \dfrac{\Psi(x)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} r^\varepsilon(x) \ \textit{si}\ x \in \Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{3.15}$$

où $\|r^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq K$ et tel que $\text{div}\, u_0^\varepsilon = 0$ dans $\mathcal{O}$, alors, il existe u^ε une solution du problème pénalisé (3.8) avec $u^\varepsilon(t=0) = u_0^\varepsilon$ et tel que u^ε admette un développement asymptotique de la forme :

$$u^\varepsilon(t, x) = \begin{cases} U^0(t, x) + \varepsilon \mathbf{U}^1(t, x) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} v_\varepsilon^r(t, x) \ \textit{pour}\ x \in \mathcal{U}, \\ \\ \varepsilon \mathbf{V}^1(t, P(x), \dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} v_\varepsilon^r(t, x) \ \textit{pour}\ x \in \omega_\varepsilon, \\ \\ \varepsilon W^1(t, x, \dfrac{\Psi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} v_\varepsilon^r(t, x) \ \textit{pour}\ x \in \Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{3.16}$$

où le terme de reste v_ε^r est borné niformément en ε dans $L^2(0, T; H^1(\mathcal{O})) \cap L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{O}))$ pour tout $T < T^*$.

La spécificité de ce résultat réside dans le fait qu'on couple une étude de couche mince dans ω_ε avec une étude de couche limite dans Ω_ε. On travaille donc dans la couche mince avec les méthodes géométriques développées pour les théorèmes (3.9) et (3.4) dans [S1], et dans l'obstacle avec les méthodes de couches limites décrites au théorème 3.1.

On remarque que le premier terme dans le fluide $\mathbf{U}^1$ est solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{U}^1}{\partial t} - \Delta \mathbf{U}^1 + (U^0 \cdot \nabla)\mathbf{U}^1 + (\mathbf{U}^1 \cdot \nabla) U^0 + \nabla \mathbf{p}^1 = 0 \text{ dans } \mathcal{U} \\ \\ \text{div}\, \mathbf{U}^1 = 0 \text{ dans } \mathcal{U} \\ \\ \mathbf{U}^1 = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O} \\ \\ \mathbf{U}^1 = (-\kappa - 1)\left(\dfrac{\partial U^0}{\partial n}\right)_N \text{ sur } \Gamma \end{cases} \tag{3.17}$$

Ainsi, le terme U^1 obtenu dans le dévelopement asymptotique des solutions des modèles précédents est différent de $\mathbf{U}^1$. Ceci s'explique par le fait que dans la méthode (3.8) avec deux échelles de pénalisation, on remplace la condition "u^ε nulle sur Γ_ε" par une pénalisation en $\frac{1}{\varepsilon^2}$ dans l'obstacle, ce qui produit une erreur d'ordre ε comme on le voit dans le théorème 3.1.

Remarque 3.6 *Pour que la méthode numérique donne un résultat équivalent à l'ordre ε^2 avec les modèles de la partie 2.1, il faut modifier l'épaisseur de la couche limite et la prendre égale à $(\kappa - 1)\varepsilon$. En particulier, on ne peut pas décrire par ce procédé des couches minces d'épaisseur réelle inférieure à ε. Pour pouvoir traiter ces couches minces, il suffit de mettre dans l'obstacle une pénalisation plus forte, par exemple en $\frac{1}{\varepsilon^3}$. Les interférences entre la couche limite dans l'obstacle et la couche mince poreuse se feront alors à un ordre supérieur et n'affecterons pas l'ordre ε.*

Remarque 3.7 *Une extension des ces travaux serait d'étudier les mêmes équations lorsque l'obstacle est mobile, et subit une poussée de la part du fluide.*

Quatrième partie

Haute conductivité dans un guide d'ondes scalaire

Le but de cette partie est d'étudier un modèle simplifié de guide d'ondes électromagnétiques, composé d'un coeur supraconducteur (de conductivité imaginaire pure) entouré d'un matériau diélectrique. Le guide est supposé fermé, *i.e.* les ondes y sont confinées par une gaine parfaitement conductrice.
La section du guide est représentée par $\mathcal{O}$, ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$ et la section du coeur par Ω, ouvert régulier tel que $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset \mathcal{O}$. On note $\mathcal{U} = \mathcal{O} \setminus \Omega$. Dans le modèle que nous utilisons, on remplace les équations de Maxwell par une équation d'onde du type

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U - i\frac{1}{\varepsilon^2}\chi_{\Omega\times\mathbb{R}}\frac{\partial U}{\partial t} = 0,$$

où $U : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est nul sur le bord du guide $\mathcal{O} \times \mathbb{R}$ (le gaine du guide étant conducteur parfait), et où $\dfrac{i}{\varepsilon^2}$ est la conductivité du coeur supraconducteur.

On cherche des solutions propagées dans la direction du guide de la forme :

$$U(t,x) = e^{i(\omega t - kz)}u(x,y),$$

où ω est la pulsation du signal. On se ramène donc, connaissant ω, à trouver les $k \in \mathbb{R}$ tels que le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\chi_\Omega u = (k^2 - \omega^2)u \text{ dans } \mathcal{O}, \\ \\ u = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}, \end{cases}$$

ait une solution non nulle, autrement dit, on cherche les valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{L}^\varepsilon$ de domaine $H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O})$ défini par :

$$\mathcal{L}^\varepsilon = -\Delta + \frac{1}{\varepsilon^2}\chi_\Omega. \tag{4.1}$$

Remarque 4.1 *Un modèle plus réaliste serait de conserver les équations de Maxwell pour décrire les ondes électromagnétiques propagées par le guide. Les difficultés induites sont pour le moment hors de portée, puisque d'une part, on est confronté à un problème de valeurs propres non linéaires, et d'autre part, l'espace naturel des équations de Maxwell,* H_{rot} *, ne s'injecte pas de manière compacte dans* L^2*. On ne peut donc même pas justifier l'existence de modes guidés.*

On étudie le comportement asymptotique des valeurs propres de $\mathcal{L}^\varepsilon$ lorsque ε tend vers zéro, ce qui correspond à dire que le coeur est de conductivité élevée.

Remarque 4.2 *Cette étude rentre en outre dans la problématique des couplages forts (cf. [9] pour un problème similaire en dimension 1 d'espace).*

Dans ma thèse, j'avais démontré que les valeurs propres de $\mathcal{L}^\varepsilon$ tendaient vers les valeurs propres de $\mathcal{L}^0 = -\Delta$, de domaine $H^2(\mathcal{U}) \cap H_0^1(\mathcal{U})$. On démontre ici que les valeurs propres de $\mathcal{L}^\varepsilon$ admettent un développement asymptotique à tout ordre :

Théorème 4.1 *Soit λ^0 une valeur propre de $\mathcal{L}^0$ de multiplicité m. On fixe $\eta > 0$ tel que dans $B(\lambda^0, \eta)$, il n'y ait pas d'autres valeurs propres de $\mathcal{L}^0$. Alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $\mathcal{L}^\varepsilon$ a exactement m valeurs propres dans $B(\lambda^0, \eta)$. Ces valeurs propres λ_i^ε admettent pour tout N un développement asymptotique de la forme :*

$$\lambda_i^\varepsilon = \lambda^0 + \varepsilon\mu_{1,i} + \varepsilon^2\mu_{2,i} + \ldots + \varepsilon^N\mu_{N,i} + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}).$$

Enfin, si l'on note $(f_1, \ldots, f_m)$ une base orthonormée dans $L^2(\mathcal{U})$ de l'espace propre $ker(\mathcal{H}^\infty - \lambda^0 I)$, les termes de premier ordre $\mu_{1,i}$ sont les valeurs propres de la matrice $m \times m$ de coefficients $a_{i,j}$ avec

$$a_{ij} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f_i}{\partial n}\frac{\partial f_j}{\partial n}.$$

La preuve du théorème 4.1 est basée sur le développement asymptotique de la résolvante de $\mathcal{L}^\varepsilon$. Pour $\xi \in \mathbb{C} \setminus sp(\mathcal{L}^\varepsilon)$, on pose $R^\varepsilon(\xi) = (\mathcal{L}^\varepsilon - \xi Id)^{-1}$.

On établit le lemme suivant :

Lemme 4.1 *Soit $N \in \mathbb{N}$, soit $f \in H^1(\mathcal{O})$ tel que $f = 0$ dans Ω et telle que la restriction de f à $\mathcal{U}$ soit dans $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$. Alors, $R^\sigma(\xi)(f)$ admet un développement asymptotique de la forme*

$$R^\varepsilon(\xi)(f) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k U^k(x) \quad + \varepsilon^N a^\varepsilon(x) \ \text{si } x \in \mathcal{U}, \\ \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k \psi(x)\alpha_k(x) e^{-\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}} + \varepsilon^N b^\varepsilon(x) \ \text{si } x \in \Omega, \end{cases}$$

où ψ est une fonction de troncature nulle loin de $\partial\Omega$, où $\varphi(x)$ désigne la distance de x à $\partial\Omega$, et où les termes de reste sont bornés au sens suivant :
il existe une constante C indépendante de f et de ε telle que

$$\begin{cases} \|a^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq C\varepsilon^2 \|f\|_{H^{2N}(\mathcal{U})}, \\ \\ \|\nabla a^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^{2N}(\mathcal{U})}, \\ \\ \|b^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{e}} \|f\|_{H^{2N}(\mathcal{U})}, \\ \\ \|\nabla b^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^{2N}(\mathcal{U})}. \end{cases}$$

Ce lemme explicite la couche limite qui apparaît dans Ω, que l'on décrit grâce à une méthode BKW appliquée à l'équation de la résolvante : si on note u^ε (resp. v^ε) la restriction de $R^\varepsilon(\xi)(f)$

à $\mathcal{U}$ (resp. Ω), on a :

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon - \xi u^\varepsilon = f \qquad \text{dans } \mathcal{U}, \\[2ex] -\Delta v^\varepsilon - \xi v^\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon^2} v^\varepsilon = 0 \qquad \text{dans } \Omega, \\[2ex] u^\varepsilon = v^\varepsilon \qquad \text{sur } \partial\Omega, \\[2ex] \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = \dfrac{\partial v^\varepsilon}{\partial n} \qquad \text{sur } \partial\Omega, \\[2ex] u^\varepsilon = 0 \qquad \text{sur } \partial\mathcal{O}. \end{cases} \tag{4.2}$$

On cherche via la méthode BKW un développement asymptotique de u^ε et v^ε sous la forme :

$$\begin{cases} u^\varepsilon(x) = U^0(x) + \varepsilon U^1(x) + \dots \\[2ex] v^\varepsilon(x) = V^0(x, \dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon V^1(x, \dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}) + \dots \end{cases}$$

et on justifie le développement asymptotique par une estimation sur l'équation elliptique linéaire satisfaite par les restes.

Remarque 4.3 *Comme dans les problèmes de pénalisation, on impose à la résolvante de tendre vers zéro dans le coeur Ω, tout en imposant hors de Ω qu'elle tende vers la solution d'un problème elliptique avec condition de Dirichlet homogène au bord. Il apparaitra donc une incompatibilité en ce qui concerne la condition de Neuman, ce qui se traduit par l'apparition d'une couche limite à l'ordre ε^1.*

Remarque 4.4 *Le terme d'ordre zéro $U^0 = R^0(\xi)(f)$ est caractérisé par :*

$$\begin{cases} U^0 \in H^1_0(\mathcal{U}), \\[2ex] -\Delta U^0 - \xi U^0 = f \ \textit{dans } \mathcal{U}. \end{cases}$$

Le terme U^1 est alors donné par :

$$\begin{cases} -\Delta U^1 - \xi U^1 = 0 \ \textit{dans } \mathcal{U}, \\[2ex] U^1 = 0 \ \textit{sur } \partial\mathcal{O}, \\[2ex] U^1 = \dfrac{\partial U^0}{\partial n} \ \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

L'expression donnant U^1 permet de caractériser les coefficients d'ordre 1 dans le développement asymptotique des valeurs propres comme étant les valeurs propres de la matrice A.

En notant P^ε la projection spectrale sur E^ε, qui est la somme des sous espaces propres de $\mathcal{L}^\varepsilon$ associés aux valeurs propres contenues dans $B(\lambda^0, \eta)$, on a :

$$P^\varepsilon = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(\lambda^0,\eta)} R^\varepsilon(\xi) d\xi \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^\varepsilon P^\varepsilon = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(\lambda^0,\eta)} \xi R^\varepsilon(\xi) d\xi. \tag{4.3}$$

En s'inspirant de Kato (cf. [34]), on considère alors l'opérateur unitaire $\mathcal{B}^\varepsilon$ donné par :

$$\mathcal{B}^\varepsilon = (Id - W^\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \left((1 - P^\varepsilon)(1 - P^0) + P^\varepsilon P^0\right)$$

où $W^\varepsilon = (P^\varepsilon - P^0)^2$. On définit alors Q^ε par :

$$Q^\varepsilon = P^0 (\mathcal{B}^\varepsilon)^{-1} \mathcal{L}^\varepsilon \mathcal{B}^\varepsilon P^0.$$

Cet opérateur est un endomorphisme autoadjoint sur l'espace propre associé à λ^0, qui est de dimension finie. De plus, on montre que ses valeurs propres sont égales aux valeurs propres de $\mathcal{L}^\varepsilon$ contenues dans $B(\lambda^0, \eta)$.
On se ramène ainsi à la théorie existante en dimension finie qui est décrite en détail dans [34], et qui montre qu'il suffit d'obtenir un développement asymptotique à tout ordre de Q^ε pour conclure.

Grâce à des formules intégrales du type (4.3), on peut déduire de l'asymptotique sur la résolvante le développement asymptotique de chaque facteur définissant Q^ε. Le problème étant que pour composer les développements asymptotiques, il faut que l'on applique la résolvante à un f suffisamment régulier dans $\mathcal{U}$ et nul dans Ω (cf. lemme 4.1).

On remarque alors que l'on a la propriété suivante :

$$Q^\varepsilon = (1 - W^\varepsilon P^0)^{-\frac{1}{2}} P^0 \mathcal{L}^\varepsilon P^\varepsilon P^0 (1 - W^\varepsilon P^0)^{-\frac{1}{2}} P^0,$$

c'est à dire que devant tous les termes dont on fait un développement asymptotique, on a intercalé P^0 qui nous ramène tout dans $H^1_0(\mathcal{U}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$, et qui nous permet donc d'utiliser le lemme 4.1 et de conclure la preuve du théorème 4.1.

Remarque 4.5 *Les prolongements de cette étude sont nombreux : guides d'ondes ouverts, problèmes non autoadjoint (si le coeur du guide n'est pas supraconducteur). De plus, et cette remarque est générale dans tous les problèmes de couche limite, les outils employés ne s'appliquent pas lorsque le bord est singulier (par exemple lorsque la section du coeur dans le guide d'onde est un rectangle, ou présente un cusp). Si certaines avancées ont eu lieu dans des géométries simples (cf. [30] lorsque Ω est un carré), il reste à traiter des géométries plus complexes et plus réalistes physiquement.*
Enfin, notons que l'asymptotique des modes guidés décrits grâce aux équations de Maxwell est un problème totalement ouvert.

Cinquième partie
Publications et bibliographie

Publications de rang A :

[A1] G. Carbou, *Regularity for a nonlinear variational problem in dimension two*, Manuscripta Math. **78** (1993), 37–56.

[A2] G. Carbou, *Unicité et minimalité des solutions d'une équation de Ginzburg-Landau*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire **3** (1995), 305-318.

[A3] G. Carbou, *Regularity for critical points of a non local energy*, Calculus of Variations **5** (1997), 409-433.

[A4] G. Carbou, P. Fabrie, *Time Average in Micromagnetism,* J. Differential Equations **147** (1998), 383–409

[A5] G. Carbou, P. Fabrie, *Regular Solutions for Landau-Lifschitz Equation in a Bounded Domain*, Differential Integral Equations **14** (2001), 213–229

[A6] G. Carbou, P. Fabrie, *Regular Solutions for Landau-Lifschitz equation in* $\mathbb{R}^3$ Commun. Appl. Anal.**5** (2001), no. 1, 17–30.

[A7] G. Carbou, *Thin Layers in Micromagnetism*, Math. Models and Meth. in Applied Sciences **11** (2001), 1529–1546

[A8] V. Bruneau, G. Carbou, *Spectral asymptotic in Large Limit Coupling* Asymptot. Anal. **29** (2002), no. 2, 91–113.

[A9] G. Carbou, P. Fabrie, O. Guès, *Couche limite en ferromagnetisme*, Comm. Partial Differential Equations **27** (2002), no. 7-8, 1467–1495.

[A10] G. Carbou, P. Fabrie, *Boundary layers for a penalisation method for incompressible flow*, à paraître dans "Advances in differential equations"

Articles soumis :

[S1] G. Carbou, *Penalization method for viscous incompressible flow around a porous thin layer*, Preprint MAB U-03-02

[S2] G. Carbou, *Brinkmann Model and Double Penalization Method for the Flow around a Porous Thin Layer*, Preprint MAB, U-03-21

[S3] G. Carbou, P. Fabrie, O. Guès, *On the ferromagnetism equations in the non static case*

Publications de rang B :

[B1] G. Carbou, *Applications harmoniques à valeurs dans un cercle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **314** (1992), no. 5, 359–362.

[B2] G. Carbou, P. Fabrie *Comportement asymptotique des solutions faibles des équations de Landau-Lifschitz*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **325** (1997), no. 7, 717–720.

[B3] G. Carbou, *Modèle quasi-stationnaire en micromagnétisme*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **325** (1997), no. 8, 847–850

[B4] G. Carbou, P. Fabrie, F. Jochmann, *A remark on the Weak ω-Limit Set for Micromagnetism Equation*, Applied Math. Letters **15** (2002), 95–99.

Comptes rendus de congrès à comité de lecture :

[C1] G. Carbou, *Quelques résultats théoriques sur les équations de Landau-Lifschitz*, Colloque d'Analyse Numérique, Arles 1998, Symposium sur le Micromagnétisme.

[C2] G. Carbou, P. Fabrie, *Recent results in micromagnetism*, International Conference on Differential Equations, Vol. 1, 2 (Berlin, 1999), 738–740.

[C3] G. Carbou, P. Fabrie, O. Guès, *Boundary Layers for Landau-Lifschitz Equations*, à paraître dans Physica D, actes du congrès Hysteresis and Micromagnetic Modeling, Salamanca 2003.

Références

[1] R. A. Adams, Sobolev space, Pure and Applied Math. **65**, Academic press 1975.

[2] S. Agmon, Elliptic boundary values problems, Van Nostrand Company, 1965.

[3] F. Alouges, S. Labbé, *z-invariant micromagnetic configurations in the thin plates*, rencontres CIRM "modélisation du ferromagnétisme", 2002.

[4] F. Alouges, A. Soyeur, *On global weak solutions for Landau Lifschitz equations : existence and non uniqueness,* Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. **18** (1992), 1071-1084.

[5] Ph. Angot, J.P. Caltagirone, *Natural convection through periodic porous media,* Proceeding 9th Int. Heat Transfer Conf., Jerusalem, Hemisphere, **5** (1990), 219-224.

[6] Ph. Angot, *Analysis of singular perturbation on the Brinkman problem for fictitious domain models of viscous flow*, Math. Methods Appl. Sci. **22** (1999), 1395-1412.

[7] Ph. Angot, C.-H. Bruneau, P. Fabrie, *A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows*, Numer. Math. **81** (1999), 497-520.

[8] E. Arquis and J.P. Caltagirone, *Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d'une interface milieu fluide-milieu poreux : application à la convection naturelle*, C.R. Acad. Sci Paris **299**, No 1, Série II (1984), 1-4.

[9] M.S. Ashbaugh, E.M. Harell, *Perturbation Theory for Shape Resonances and Large Barrier Potentials*, Commun. Math. Phys. **83** (1982), 151-170.

[10] C. Bardos, J. Rauch, *Maximal positive boundary value problems as limits of singular perturbation problems,* Trans. Amer. Math. Soc. **270** (1982), 377-408.

[11] L. Boutet de Monvel, *Comportement d'un opérateur pseudodifférentiel sur une variété à bord*, J. Anal. Math **17** (1966), 241-304.

[12] F. Brown, Micromagnetics, Wiley, New York, 1963.

[13] Ch.-H. Bruneau, *Numerical Simulation and Analysis of the Transition to Turbulence*, Lecture Notes in Physics **490** (1997).

[14] Ch.-H. Bruneau and P. Fabrie, *Effective downstream boundary conditions for incompressible navier-Stokes equations*, Int. J. Numer. Methods in Fluids **19** (1994), 693-705.

[15] Ch.-H. Bruneau and P. Fabrie, *New efficient boundary conditions for incompressible navier-Stokes equations : a well-posedness result*, M2AN **30** (1996), 815-840.

[16] Ch.-H. Bruneau, I. Mortazavi, *Contrôle passif d'écoulements incompressibles autour d'obstacles à l'aide de milieux poreux*, C. R. Acad. Sci. Paris, **329**, série II, pp 517-521, 2001

[17] L. Cattabriga, *Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, **31**, pp 308-340, 1961

[18] T. Colin, C. Galusinski, H. Kaper, *Waves in ferromagnetic media.* Comm. Partial Differential Equations **27** (2002), 1625-1658.

[19] J.-M. Coron, J.-M. Ghidaglia, *Explosion en temps fini pour le flot des applications harmoniques* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **308** (1989), no. 12, 339–344.

[20] A. De Simone, *Hysteresis and Imperfection sensitivity of small ferromagnetic particles,* Meccanica **30** (1995), 591-603.

[21] A. De Simone, R. V. Kohn, S. Müller and F. Otto, *Magnetic Microstructures- a paradigm of multiscale problems*, preprint no. **70**, Max-Planck Institut fûr Mathematik in den Maturwissenschaften, Leipzig (1999).

[22] G. Foias, R. Temam, *Remarques sur les équations de Navier-Stokes stationnaires et les phénomènes successifs de bifurcation,* Ann. Scuola Norm. Super. Pisa IV, **5** (1978), 29-63.

[23] G. Gioia and R. D. James, *Micromagnetis of very thin films,* Proc. Roy. Soc. London A **453** (1997), 213-223.

[24] V. Giraud, P. A. Raviart, Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms. Springer Series in Computational Mathematics, **5**. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[25] D. Goldstein, R. Handler, L. Sirovich, *Modeling a no-slip flow boundary with an external force field,* J. Comput. Phys, **105**, No 2, pp 354-366, 1993

[26] E. Grenier, O. Guès, *Boundary layers for viscous perturbations of noncharacteristic quasi-linear hyperbolic problems*, J. Differential Equations, **143** (1998), 110-146.

[27] O. Guès, *Perturbations visqueuses de problèmes mixtes hyperboliques et couches limites*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **45** (1995), 973-1006.

[28] H. Haddar, thèse ENPC 2001.

[29] H. Haddar, P. Joly, *Effective boundary conditions for thin ferromagnetic layers ; the 1d model*, Siam J. Appl. Math. **61** (2000/01), no. 4, 1386-1417.

[30] H. Han, R. B. Kellogg, *Differentiability properties of solutions of the Equation* $-\varepsilon^2\Delta u+ru = f(x,y)$ *in a square*, SIAM J. Math. Anal. **21** (1990), 394-408.

[31] J.L. Joly, G. Métivier, J. Rauch, *Solution globale du système de Maxwell dans un milieu ferromagnétique,* Ecole Polytechnique, Séminaire EDP, 1996-1997, exposé N^o 11.

[32] J.L. Joly, G. Métivier, J. Rauch, *Global solutions to Maxwell equations in a ferromagnetic medium*, Ann. Henri Poincaré **1** (2000), no. 2, 307–340.

[33] P. Joly, O. Vacus, *Mathematical and numerical studies of nonlinear ferromagnetic materials.* M2AN Math. Model. Numer. Anal. **33** (1999), 593-626.

[34] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer Verlag, Berlin / Heidelberg / New York, 1966.

[35] K. Khadra, S. Parneix, Ph. Angot, J.P. Caltagirone, *Fictitious domain approach for numerical modeling of Navier-Stokes equation,* Int. J. Numer. Meth. in Fluids **34** (2000), 651-684.

[36] N. Kevlahan, J. M. Ghidaglia, *Computation of turbulent flow past an array of cylinders using a spectral method with Brinkman penalization,* Eur. J. Mech., B, Fluids **20** (2001), 333-350.

[37] S. Labbé et P.Y. Bertin, *Microwave polarizability of ferrite particles,* Journal of Magnetism and Magnetic Materials, **206** (1999), 93-105.

[38] S. Labbé, Simulation numérique du comportement hyperfréquence des matériaux ferromagnétiques, Thèse de l'Université Paris 13 (1998).

[39] O. A. Ladysenskaya, The boundary value problem of mathematical physics, Springer Verlag Applied Math. Sciences, Vol 49, 1985

[40] L. Landau, E. Lifschitz, Electrodynamique des milieux continues, cours de physique théorique, tome VIII (ed. Mir) Moscou (1969).

[41] M. Langlais, D. Phillips, *Stabilization of solutions of nonlinear and degenerate evolution equation,* Nonlinear Analysis, TMA, **9** (1985), 321-333.

[42] G. Métivier, communication privée.

[43] G. Métivier, *The Cauchy problem for semi-linear hyperbolic systems with discontinuous data,* Duke Math J., 53 (1986), 983-1011.

[44] G. Métivier, J. Rauch, *Interaction of piecewise smooth smooth progressing waves for semi-linear hyperbolic equations,* Comm. Partial Differential Equations, 15 (1990), 1079-1140.

[45] A. Mikelic, *Stationary incompressible viscous fluid flow through a porous boundary.* Z. Angew. Math. Mech. **67** (1987), 273-275.

[46] J. Miltat, *Bounded Walls for Soft Magnetic Materials*

[47] P. de Mottoni, M. Schatzman, *Geometrical evolution of developed interfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 1533-1589.

[48] M. Pardavi-Horvath, communication privée.

[49] C. Peskin, *Numerical analysis of blood flow in the heart,* J. Comput. Phys. **25** (1977), 220-252.

[50] C. Peskin, *The fluid dynamics of heart valves : Experimental, theoretical and comptutational method,* Annu. Rev. Fluid Mech **14** (1982), 235-259.

[51] J. Rauch, M. Reed, *Discontinuous progressing waves for semi-linear systems,* Comm. Partial Differential Equations, 10, (1985), 1033-1075.

[52] J. Rauch, M. Reed, *Classical, conormal, semilinear waves,* Séminaire Ecole Polytechnique, (1985-1986), exp. No. 5.

[53] T. Rivière, *Parois et vortex en micromagnétisme,* Journées Equations aux Dérivées Partielles" (Forges-les-Eaux, 2002), Exp. No. XIV, 15 pp., Univ. Nantes, Nantes, 2002.

[54] T. Rivière, S. Serfaty, *Compactness, kinetic formulation, and entropies for a problem related to micromagnetics*, Comm. Partial Differential Equations **28** (2003), 249–269.

[55] E. M. Saiki, S. Biringen, *Numerical simulation of a cylinder in uniform flow : application of a virtual boundary method,* J. Comput. Phys. **123** (1996), 450-465.

[56] D. Sanchez, *Boundary layer on a high-conductivity domain*, Commun. Pure Appl. Anal. **1** (2002), 547-564.

[57] D. Sanchez, *Phénomène de couche limite dans un modèle de ferromagnétisme*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, Série 6, **11** (2002), 239-261.

[58] D. Sanchez, *Behaviour of Landau-Lifschitz Equation in a periodic thin layer*, preprint MAB (2002)

[59] D. Sanchez, *Thin Layer for Landau-Lifschitz Equation*, Preprint MAB (2003).

[60] J. Starinkevich, communication privée.

[61] P.L. Sulem, C. Sulem, C. Bardos, *On the Continuous Limit for a System of Classical Spins*, Commun. Math Phys. **107** (1986), 431-454.

[62] R. Temam, Navier-stokes equations and numerical analysis, North-Holland, Amsterdam 1979

[63] A. Visintin, *On Landau Lifschitz equation for ferromagnetism,* Japan Journal of Applied Mathematics, Vol. 2, **1** (1985), 69-84.

[64] H. Wynled, Ferromagnetism, Encyclopedia of Physics, Vol. XVIII / 2. Springer Verlag, Berlin, 1966.