Master Mathématiques, Algèbre et Calcul Formel

Examen du 15 Avril 2011, durée 3 heures

Documents interdits.

Exercice 1: Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et contenant une racine primitive n-ième de l'unité ω pour $n = 2^k$. Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux polynômes à coefficients dans K de degrés inférieurs à n. On note $f * g$ l'unique polynôme de degré inférieur à n et tel que $f(x)g(x) = (f * g)(x) \mod x^n - 1$ (autrement dit, $f * g$ est le reste du produit $f(x)g(x)$ dans la division par $x^n - 1$). On considère l'algorithme suivant:

Algorithm 1 Convolution rapide

Entrées: $n = 2^k$; $\{\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n/2-1}\}$; $f, g \in K[x]$, $\deg(f) < n$, $\deg(g) < n$.
Sorties: $f * g$.

1: Si $k = 0$, **sortir** fg.
2: Calculer f_0, g_0 les restes respectifs de f et g modulo $x^{n/2} - 1$ ainsi que f_1, g_1 les restes respectifs de f et g modulo $x^{n/2} + 1$.
3: Appeler récursivement l'algorithme pour calculer $h_0(x) = f_0(x) * g_0(x)$ et $h_1(\omega x) = f_1(\omega x) * g_1(\omega x)$ à l'ordre $n/2 = 2^{k-1}$.
4: **Sortir** $1/2((h_0 + h_1) + x^{n/2}(h_0 - h_1))$.

1. Exécutez cet algorithme pour $n = 4$, $f = 1 + x^3$ et $g = 1 + x + x^2$ et vérifiez votre résultat.

2. Montrez que $f = f_0 + (x^{n/2} - 1)q = f_1 + (x^{n/2} + 1)q$ pour $q = (f_0 - f_1)/2$.

3. En déduire que $2fg = f_0 g_0 (x^{n/2} + 1) - f_1 g_1 (x^{n/2} - 1) \mod x^n - 1$.

4. Montrez que $h_1(x) = f_1(x) g_1(x) \mod x^{n/2} + 1$.

5. Déduire des questions précédentes que la sortie de l'algorithme est correcte.

6. Montrez que sa complexité est en $O(n \log n)$ opérations dans K.

Exercice 2: Le but de cet exercice est de donner une version dans le cas de la caractéristique 2 de l'algorithme de Cantor-Zassenhaus, que l'on rappelle ci-après:

Algorithm 2 Cantor-Zassenhaus

Entrées: $q = p^k$ impair, $Q \in \mathbb{F}_q[X]$ de degré n un produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$, deux à deux distincts, et tous de degré d.
Sorties: Un diviseur de Q non trivial ou bien "échec".
1: Tirer au hasard $A \in \mathbb{F}_q[X]$ de degré inférieur à n.
2: Calculer $D = \gcd(A, Q)$. Si $D \neq 1$, **sortir** D.
3: Calculer $B = A^{(q^d-1)/2} - 1 \mod Q$.
4: Calculer $D = \gcd(B, Q)$.
5: **Sortir** D si $D \neq 1$, sinon "échec".

1. Soit $m \geq 1$ et soit $T_m = X^{2^{m-1}} + X^{2^{m-2}} + \cdots + X^4 + X^2 + X \in \mathbb{F}_2[X]$.
   (a) Montrez que $T_m(T_m + 1) = X^{2^m} + X$.
   (b) En déduire que, si $\alpha \in \mathbb{F}_{2^m}$, alors $T_m(\alpha) \in \mathbb{F}_2$.
   (c) Montrez que l'application $\alpha \mapsto T_m(\alpha)$ de $\mathbb{F}_{2^m}$ dans $\mathbb{F}_2$ est une application linéaire de $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels. En déduire que $\{\alpha \in \mathbb{F}_{2^m} : T_m(\alpha) = 0\}$ et $\{\alpha \in \mathbb{F}_{2^m} : T_m(\alpha) = 1\}$ ont même cardinal, soit 2^{m-1}.

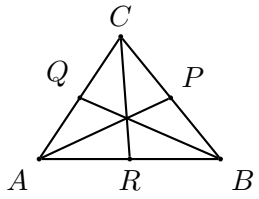
Soit maintenant $q = 2^k$, et $Q(X) \in \mathbb{F}_q[X]$ de degré n. On suppose que Q est le produit de r polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$ notés $P_1, \ldots P_r$, deux à deux distincts et tous de même degré d. On note $R = \mathbb{F}_q[X]/(Q)$, $R_i = \mathbb{F}_q[X]/(P_i)$ et $\phi_i : R \to R_i$ l'application canonique définie par:
$\phi_i(P \mod Q) = P \mod P_i$.

2. Soit $A \in R$. Montrez que $\phi_i(T_{kd}(A)) = T_{kd}(\phi_i(A))$. En utilisant les résultats de la question 1. en déduire que $\phi_i(T_{kd}(A)) \in \mathbb{F}_2$, et que, si A est choisi au hasard et uniformément dans R, $T_{kd}(A)$ appartient à $\mathbb{F}_2$ avec probabilité 2^{1-r}.

3. En déduire un analogue de l'algorithme de Cantor-Zassenhaus pour factoriser Q et montrez que sa probabilité d'échec est inférieure à $1/2$. On écrira cet algorithme sous la forme conventionnelle.

4. Étudier la complexité de l'algorithme décrit à la question précédente.

Exercice 3: Dans cet exercice, on veut démontrer le résultat de géométrie bien connu suivant: les médianes d'un triangle sont concourantes et leur point d'intersection est le centre de gravité du triangle, à l'aide des bases de Gröbner. Soit donc dans le plan un triangle ABC dont les sommets ont pour coordonnées: $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ et $C = (x, y)$. Soit P, Q, R les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$. Soit $S = (u, v)$ l'intersection des médianes AP et BQ.



1. Soit $f_1 = uy - v(x + 1)$ et $f_2 = (u - 1)y - v(x - 2)$. Montrez que $S = (u, v)$ est l'intersection des droites AP et BQ si et seulement si $f_1 = f_2 = 0$.

2. Soit $g_1 = -2uy - (v - y) + 2vx$. Montrez que $g_1 = -f_1 - f_2$. En déduire que les trois médianes sont bien concourantes en S.

3. Soit $g_2 = 3u - x - 1$ et $g_3 = 3v - y$. Montrez que les conditions: $\overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{SP}$, $\overrightarrow{BS} = 2\overrightarrow{SQ}$, $\overrightarrow{CS} = 2\overrightarrow{SR}$ sont équivalentes à $g_2 = g_3 = 0$.

4. On considère désormais x, y, u, v comme des variables de polynômes à coefficients réels. Soit $I = \langle f_1, f_2 \rangle$ l'idéal de $\mathbb{R}[x, y, u, v]$ engendré par f_1 et f_2. Calculez une base de Gröbner de I, relativement à l'ordre lexicographique noté $\prec$, pour lequel $u \succ v \succ x \succ y$.

5. En déduire que yg_2 et g_3 appartiennent à I et conclure.