Université de Bordeaux
Licence de Sciences et Technologies
2016-2017

Algèbre linéaire 1

Corrigé Devoir surveillé n° 1

Exercice 1. On résout par la méthode du pivot de Gauss en indiquant les opérations effectuées sur les lignes L_i :

$$\left\{\begin{array}{lllllllllll} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & + & 6x_4 & + & x_5 & = 2 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = 4 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & + & x_5 & = 4 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lllllllllll} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = 1 & \\ & & & & 2x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & & & & -2x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = 1 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ & & & & 2x_3 & & 3x_4 & & & = 3 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lllllllllll} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = 1 & \\ & & & & 2x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = 0 & \\ & & & & & & & & x_5 & = 1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ & & & & & & x_4 & + & x_5 & = 3 & L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lllllllllll} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = 1 & \\ & & & & 2x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = 0 & \\ & & & & & & x_4 & + & x_5 & = 3 & L_3 \leftarrow L_4 \\ & & & & & & & & x_5 & = 1 & L_4 \leftarrow L_3 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 & = -5/2 - 2x_2 \\ x_3 & = -3/2 \\ x_4 & = 2 \\ x_5 & = 1 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions peut donc être décrit comme l'ensemble des quintuplets de la forme

$$(-5/2 - 2x_2, x_2, -3/2, 2, 1)$$

où x_2 parcourt $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

1. E_1 est l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^3$ du système homogène

$$\left\{\begin{array}{llllll} x & - & y & - & z & = 0 \\ x & - & 2y & - & 3z & = 0 \end{array}\right.$$

   C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car il ne contient pas le vecteur nul $(0,0,0)$.

3. E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$: $u=(1,0,1)$ et $v=(0,1,0)$ appartiennent à E_3, mais pas leur somme $u+v$.

Exercice 3.

1. U est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène donc U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $v \in V$, alors $v=\lambda(1,0,1)+\mu(0,1,1)$ pour certains $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. On a $v=(\lambda,\mu,\lambda+\mu)$ et $v\in U$ si et seulement si $\lambda+\mu+(\lambda+\mu)=0$ ce qui équivaut à $\mu=-\lambda$, soit $v=\lambda((1,0,1)-(0,1,1))=\lambda(1,-1,0)\in W$.
3. $u=(x,y,z)\in U$ si et seulement si $z=-x-y$ soit $u=(x,y,-x-y)=x(1,0,-1)+y(0,1,-1)$. Donc $U=\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ avec $\mathscr{F}=\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$.
4. On cherche des coefficients (a,b,c) tels que $(1,0,1)$ et $(0,1,1)$ vérifient l'équation $ax+by+cz=0$. Cela conduit au système linéaire
$$\begin{cases} a+c &=0\\ b+c &=0\end{cases}$$
dont une solution non nulle est $(a,b,c)=(1,1,-1)$.
Soit donc $H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$, montrons que $V=H$. Il suffit d'écrire :
$$\begin{aligned} H &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}\\ &= \{(x,y,x+y) \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\}\\ &= \{x(1,0,1)+y(0,1,1) \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\}\\ &= \mathrm{Vect}\{(1,0,1),(0,1,1)\}=V.\end{aligned}$$

Exercice 4.

1. Comme f_k est combinaison linéaire de $\{e_1,\dots,e_k\}$, on en déduit que $\{f_1,\dots,f_k\}\subset\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$. Comme $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$ est un sous-espace vectoriel de E, toute combinaison linéaire de $\{f_1,\dots,f_k\}$ est aussi dans $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$, d'où l'inclusion demandée.
2. La dimension de $\mathrm{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_k)$ est au plus égale à k, et elle vaut exactement k si et seulement si la famille $\{e_1,\dots,e_k\}$ est libre. Comme $\{e_1,\dots,e_k\}$ est une sous-famille d'une famille libre, elle est aussi libre.
3. On suppose que $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ sont tels que $\lambda_1 f_1+\cdots+\lambda_n f_n=\mathbf{0}$. En remplaçant on obtient
$$\lambda_1 e_1+\lambda_2(e_1+e_2)+\cdots+\lambda_n(e_1+e_2+\cdots+e_n)=\mathbf{0}$$
ce qui équivaut à
$$(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)e_1+(\lambda_2+\cdots+\lambda_n)e_2+\cdots+\lambda_n e_n=\mathbf{0}.$$
Comme la famille $\{e_1,\dots,e_n\}$ est libre, on peut en déduire le système linéaire
$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n &=0\\ \qquad\lambda_2+\cdots+\lambda_n &=0\\ \qquad\qquad\vdots & \\ \qquad\qquad\lambda_n &=0\end{cases}$$

Ce système triangulaire a pour seule solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$ et la famille $\{f_1, \dots, f_n\}$ est donc libre.

4. D'après la question précédente $\{f_1, \dots f_n\}$ est libre ; on sait que toute sous-famille d'une famille libre est libre ; donc, pour tout $1 \leq k \leq n$, la famille $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ est libre.

   On en déduit que la dimension de l'espace $\mathrm{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_k)$ est k. Pour la même raison, la dimension de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$ est aussi k. On a une inclusion (démontrée à la question 1)) entre deux espaces de même dimension donc ils sont égaux (résultat du cours) :

$$\mathrm{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_k) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k).$$