Université de Bordeaux
Licence de Sciences et Technologies
2016-2017

Algèbre linéaire 1

Devoir surveillé n° 1

6 mars 2017, Durée 1h30

Documents non autorisés

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}^5$ le système d'équations linéaires suivant en appliquant la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

Exercice 2. On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Dire, en le justifiant, si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1) $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + z \text{ et } x + 2y = 3z\}$.

2) $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1 \text{ et } x + 2y = 3z\}$.

3) $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}$, on considère les ensembles

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}, V = \mathrm{Vect}\{(1,0,1),(0,1,1)\} \text{ et } W = \mathrm{Vect}\{(1,-1,0)\}.$$

1) Justifier que U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Montrer que $U \cap V = W$.

3) Déterminer une famille finie $\mathscr{F}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ telle que $U = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.

4) Déterminer des nombres réels a, b, c tels que $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n et soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E. On considère, pour k compris entre 1 et n, les vecteurs $f_k = \sum_{i=1}^{k} e_i$. Dit autrement, $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$, $\dots$, $f_n = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$.

1) Montrez que, pour tout k tel que $1 \leq k \leq n$,

$$\mathrm{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_k) \subset \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k).$$

2) Quelle est la dimension de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$?

3) Montrez que $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ est une famille libre de E.

4) En déduire que pour tout $1 \leq k \leq n$, la famille $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ est libre et

$$\mathrm{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_k) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k).$$