Université de Bordeaux
Licence de Sciences et Technologies
2014-2015

Algèbre 1

Devoir surveillé n° 1

19 mars 2015, Durée 1h30

Documents non autorisés

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations linéaires suivant en appliquant la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x + 3y - 4z = 2 \\ 2x + 3y - 5z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Exercice 2. Soient

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } x + y - z = 0\right\}$$

et

$$F = \text{Vect}\left\{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\right\}.$$

1. Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Pour chacune des affirmations suivantes, indiquez, *en le justifiant*, si elle est vraie ou fausse :

a) $F \subset E$.

b) $E \subset F$.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$e_1 = (1, 1, 0, 0), \; e_2 = (0, 1, 1, 0), \; e_3 = (0, 0, 1, 1),$$
$$e_4 = (0, 1, 0, 1), \; e_5 = (1, 0, 0, 1) \text{ et } e_6 = (1, 0, 1, 0).$$

1. La famille $\mathcal{F} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ est-elle libre ?

2. Montrer que la famille $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

3. Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_5\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4. Soit $\{e_1, \ldots, e_p\}$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$ n'appartenant pas à Vect $\{e_1, \ldots, e_p\}$, la famille $\{e_1 + u, \ldots, e_p + u\}$ est libre.

2. (*Hors barème, mais donnant lieu à un bonus de points*)
On suppose maintenant que u est une combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \ldots, e_p$, c'est-à-dire qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que

$$u = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les λ_i pour que la famille $\{e_1 + u, \ldots, e_p + u\}$ soit libre.