Université de Bordeaux
Licence de Sciences et Technologies
2014-2015

Algèbre 1

Corrigé du devoir surveillé n° 1

Exercice 1. On applique la méthode du Pivot de Gauss (les opérations effectuées sont indiquées en bout de ligne) :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x + 3y - 4z = 2 \\ 2x + 3y - 5z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 & \\ y - z = 1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y + z = -1 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ -y + 2z = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 & \\ y - z = 1 & \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ z = 1 & L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{cases}$$

Le système initial est donc équivalent au système échelonné

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ y - z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

qui admet pour solution unique le triplet $(x, y, z) = (0, 2, 1)$.

Exercice 2.

1. E est l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogène ("sans second membre"), ce qui en fait un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en vertu d'un résultat du cours.
2. a) Le vecteur $(0, 1, -1)$ n'appartient pas à E puisque ses composantes ne vérifient pas l'équation $x + y - z = 0$. Par conséquent, F n'est pas contenu dans E.

   b) Les éléments de E sont les triplets (x, y, z) solutions du système

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 & \\ 2x + 2y = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

   Autrement dit, $E = \text{Vect}\{(1, -1, 0)\} \subset \text{Vect}\{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\} = F$.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$e_1 = (1,1,0,0)\,,\ e_2 = (0,1,1,0)\,,\ e_3 = (0,0,1,1)\,,$$
$$e_4 = (0,1,0,1)\,,\ e_5 = (1,0,0,1)\ \text{ et }\ e_6 = (1,0,1,0)\,.$$

1. La famille $\mathcal{F}$, constituée de 6 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est nécessairement liée, en vertu d'un résultat du cours (une famille libre dans $\mathbb{R}^n$ contient *au plus n* vecteurs).
2. La famille $\mathcal{B}_0$, constituée de 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^4$, est donc une bases de $\mathbb{R}^4$ si et seulement si elle est libre, ce que l'on vérifie grâce au calcul suivant :

$$x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & -x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_2$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & & + & 2x_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_3$$

   d'où $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, ce qui confirme que la famille est libre.
3. À l'inverse, la famille $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_5\}$ n'est pas libre, donc n'est a fortiori pas une base de $\mathbb{R}^4$, ce que l'on vérifie soit en résolvant un système linéaire analogue au précédent, soit en constatant simplement que l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres : $e_1 - e_2 + e_3 = e_5$.

Exercice 4.

1. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ des scalaires tels que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i(e_i + u) = 0_{\mathbb{R}^n}$. On a alors

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i = -(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i)u. \tag{1}$$

   - Si la somme $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i$ était non nulle, alors on pourrait diviser chacun des membres de l'équation (1) par $-(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i)$ et obtenir une expression de u comme combinaison linéaire de $e_1, e_2, \ldots e_p$, contrairement à l'hypothèse $u \notin \text{Vect}\,\{e_1, \ldots, e_p\}$.
   - Donc $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0$ et l'équation (1) devient

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i = 0_{\mathbb{R}^n}, \tag{2}$$

   d'où l'on déduit que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_p = 0$ puisque la famille $\{e_1, \ldots, e_p\}$ est libre. On a donc montré que la famille $\{e_1 + u, \ldots, e_p + u\}$ est libre.

2. Supposons que $u = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p$. Si $\sum_{i=1}^p \alpha_i(e_i + u) = 0_{\mathbb{R}^n}$, alors

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i e_i + (\sum_{i=1}^p \alpha_i) u = 0_{\mathbb{R}^n}$$

c'est-à-dire , en posant $\alpha = \sum_{i=1}^p \alpha_i$ et en utilisant l'expression de u comme combinaison linéaire des e_i :

$$\sum_{i=1}^p (\alpha_i + \alpha\lambda_i) e_i = 0_{\mathbb{R}^n}. \tag{3}$$

Comme la famille $\{e_1, \ldots, e_p\}$ est libre, on conclut que

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & + & \alpha & \lambda_1 & = & 0 \\ \alpha_2 & + & \alpha & \lambda_2 & = & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_p & + & \alpha & \lambda_p & = & 0 \end{array} \right. \tag{S}$$

En sommant toutes les équations du système, on obtient en particulier que

$$\alpha \left(1 + \sum_{i=1}^p \lambda_i \right) = 0_{\mathbb{R}^n}. \tag{4}$$

- Si $\sum_{i=1}^p \lambda_i \neq -1$, alors $\alpha = 0$, d'où, en reportant dans (S)

  $$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0.$$

  La famille est donc libre.
- Inversement, si $\sum_{i=1}^p \lambda_i = -1$, alors d'une part les λ_i ne sont pas tous nuls, et d'autre part

  $$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \lambda_i(e_i + u) &= \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i + \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \right) u \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i - u \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i - \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i \\ &= 0_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

  La famille est donc liée

Bilan : la famille $\{e_1 + u, \ldots, e_p + u\}$ est libre si et seulement si $\sum_{i=1}^p \lambda_i \neq -1$.