Université de Bordeaux
Licence de Sciences et Technologies
2014-2015

Algèbre 1

Corrigé du DS n° 2

23 avril 2015, Durée 1h30

Documents non autorisés

Attention, on donne ici seulement un résumé de solutions, ce n'est pas à prendre comme un modèle de rédaction.

Exercice 1. A est inversible d'inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

1. Si $a = b = c$ les trois colonnes sont identiques à une colonne non nulle donc la matrice est de rang 1

2. Si $a \neq b \neq c$, on effectue les opérations élémentaires de colonnes successives :

$$\begin{aligned} &C_2 \leftarrow C_2 - C_1,\ C_2 \leftarrow C_2/(b-a)\ (b-a \neq 0), \\ &C_3 \leftarrow C_3 - C_1,\ C_3 \leftarrow C_3/(c-a)\ (c-a \neq 0), \\ &C_3 \leftarrow C_3 - C_2,\ C_3 \leftarrow C_3/(c-b)\ (c-b \neq 0) \end{aligned}$$

et on obtient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & b+a & 1 \end{pmatrix}$. qui est échelonnée et de rang 3.

3. Si $a = b$ et $b \neq c$ les deux premières colonnes sont égales et les deuxième et troisième sont non nulles et non proportionnelles donc le rang est 2.

Exercice 3.

1.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^p = 0 \text{ pour tout } p \geq 4.$$

2.

$$M^p = \begin{pmatrix} 3^p & (p-1)3^{p-1} & p(p-1)3^{p-2} \\ 0 & 3^p & 2(p-1)3^{p-1} \\ 0 & 0 & 3^p \end{pmatrix}$$

3. a)

$$X_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 27 \\ 54 \\ 27 \end{pmatrix}$$

b)

$$MX_n = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_n + y_n \\ 3y_n + 2z_n \\ 3z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

On montre que $X_n = M^n X_0$ par récurrence, en utilisant la propriété $X_{n+1} = MX_n$ que l'on vient de démontrer. Cela donne immédiatement le rang 1 ; pour l'hérédité, $X_{n+1} = MX_n = M(M^n X_0) = M^{n+1} X_0$.

c)

$$\begin{cases} x_n = (n^2 + n + 1)3^{n-1} \\ y_n = 2n3^n \\ z_n = 3^{n+1} \end{cases}$$

Exercice 4.

1.

$$AE_{11} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \; E_{11}A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } AE_{11} = E_{11}A \Rightarrow b = c = 0.$$

2.

$$AE_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}, \; E_{12}A = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } AE_{12} = E_{21}A \Rightarrow a = d.$$