Université de Bordeaux
Licence de Sciences et Technologies
2014-2015

Algèbre 1

Corrigé du DST 2015

12 Juin 2015, Durée 3h

Documents non autorisés

Exercice 1.

1. Par un calcul direct on trouve :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme pour tout $n \geq 4$, $A^n = A^4 A^{n-4}$ on obtient que pour tout $n \geq 4$, $A^n = 0$.

2. On calcule la somme demandée :

$$\begin{aligned} I + A + A^2 + A^3 = A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B \end{aligned}$$

3. En utilisant les identités $B = I + A + A^2 + A^3$ et $A^4 = 0$ démontrées dans les questions précédentes, on a :

$$\begin{aligned} B(I - A) &= (I + A + A^2 + A^3)(I - A) \\ &= I + A + A^2 + A^3 - A - A^2 - A^3 - A^4 = I. \end{aligned}$$

On a trouvé une matrice $C = I - A$ telle que $BC = I$ donc d'après un théorème du cours, B est inversible de matrice inverse $I - A$.

Exercice 2.

1. a) On calcule le rang de la matrice dont les lignes sont les vecteurs u_1 u_2 u_3. Pour cela on l'échelonne en appliquant le pivot de Gauss. On obtient avec les opérations successives : $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les trois lignes sont échelonnées et non nulles donc le rang de la matrice est 3 donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) On a $f(u_1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -u_1$. On trouve par un calcul analogue $f(u_2) = u_2$ et $f(u_3) = 3u_3$.

c) Puisque $f(u_1) = -u_1$, $f(u_2) = u_2$ et $f(u_3) = 3u_3$, la matrice N de f dans la base $\mathcal{B}$ est

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ donc elle est inversible. Pour calculer son inverse on applique la méthode du pivot de Gauss sur les lignes de la concaténation de P et de I, jusqu'à obtenir I à la place de P. Les calculs donnent :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

et on conclut que

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Pour tout $n \geq 0$,

$$N^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

4. Pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} M^n = (PNP^{-1})^n &= (PNP^{-1})(PNP^{-1}) \dots (PNP^{-1}) \\ &= PN(P^{-1}P)N(P^{-1}P) \dots (P^{-1}P)NP^{-1} = PN^nP^{-1} \end{aligned}$$

donc

$$
\begin{aligned}
M^n &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)^n + 3^n & (-1)^n - 3^n & -(-1)^n + 3^n \\ (-1)^n - 1 & (-1)^n + 1 & -(-1)^n + 1 \\ -1 + 3^n & 1 - 3^n & 1 + 3^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Exercice 3.

1. Les racines dans $\mathbb{C}$ de $X^2 + X + 1$ sont $z_1 = (-1 + i\sqrt{3})/2$ et $z_2 = (-1 - i\sqrt{3})/2$. Comme $(X^3 - 1) = (X - 1)(X^2 + X + 1)$, z_1 et z_2 sont aussi racines de $X^3 - 1$.

2. a) Par la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$, il existe une unique paire de polynômes (Q_n, R_n) tels que $X^n - 1 = (X^2 + X + 1)Q_n(X) + R_n(X)$ avec $\deg(R_n) < \deg(X^2 + X + 1) = 2$. Donc R_n est bien de la forme $R_n = a_n + b_n X$.

b) $R_0 = 0$, $R_1 = X - 1$, $R_2 = -X - 2$.

c) En évaluant l'identité $X^n - 1 = (X^2 + X + 1)Q_n(X) + a_n + b_n X$ en z_1 et z_2, on trouve

$$
(S)\ \begin{cases} a_n + b_n z_1 = z_1^n - 1 \\ a_n + b_n z_2 = z_2^n - 1 \end{cases}
$$

d) Soit $n = 3k + r$ avec $r = 0, 1, 2$ la division euclidienne de n par 3. Comme z_1 vérifie $z_1^3 = 1$, on a $z_1^n - 1 = z_1^{3k+r} - 1 = (z_1^3)^k z_1^r - 1 = z_1^r - 1$. De même $z_2^n - 1 = z_2^r - 1$. Ainsi, les coefficients du système (S) d'inconnues a_n et b_n ne dépendent que du reste r de la division de n pas 3. Donc ses solutions (a_n, b_n) vont elles aussi dépendre seulement du reste de la division de n pas 3. Autrement dit, on a : $R_{3k} = R_0 = 0$, $R_{3k+1} = R_1 = X - 1$, $R_{3k+2} = R_2 = -X - 2$.

Exercice 4.

1. a) Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et soit $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_n + \mu y_n)$. On a :

$$
\begin{aligned}
f(\lambda x + \mu y) &= (0, \lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_{n-1} + \mu y_{n-1}) \\
&= (0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_{n-1}) + (0, \mu y_1, \ldots, \mu y_{n-1}) \\
&= \lambda(0, x_1, \ldots, x_{n-1}) + \mu(0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \\
&= \lambda f(x) + \mu f(y)
\end{aligned}
$$

donc f est bien une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(f) &= \{x \in \mathbb{K}^n \mid f(x) = \mathbf{0}\} \\
&= \{(0, \ldots, 0, x_n) \mid x_n \in \mathbb{K}\}.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(f) &= \{f(x) \mid x \in \mathbb{K}^n\} \\ &= \{(0, x_1, \dots, x_{n-1}) \mid (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}\}\end{aligned}$$

b) On a $f^2((x_1, \dots, x_n) = (0, 0, x_1, \dots, x_{n-2})$. Il est clair que $f^k(x)$ commence par k zéros, donc que $f^n = 0$.

2. On a $\deg(\Delta(P)) \leq \deg(P) - 1$. En effet, si $\deg(P) = n$ et si on pose $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} \cdots + a_0$, on voit que le coefficient dominant de $P(X+1) = a_n (X+1)^n + a_{n-1} (X+1)^{n-1} + \cdots + a_0$ est aussi a_n, et donc que dans $P(X+1) - P(X)$ les termes dominants se simplifient.

D'après la question précédente, l'application Δ va bien de $\mathbb{K}[X]_n$ dans $\mathbb{K}[X]_n$. Montrons que Δ est linéaire :

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) - \lambda P(X) - \mu Q(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) = \lambda \Delta(P) + \mu \Delta(Q).\end{aligned}$$

Donc Δ définit bien par restriction un endomorphisme Δ_n de $\mathbb{K}[X]_n$.

b) Montrons que $\operatorname{Ker}(\Delta_n)$ est l'ensemble des polynômes constants. En effet, soit $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_0 \in \operatorname{Ker}(\Delta_n)$. La condition $P(X+1) - P(X) = 0$ devient

$$a_n((X+1)^n - X^n) + a_{n-1}((X+1)^{n-1} - X^{n-1}) + \cdots + a_1((X+1) - X) = 0.$$

En exprimant que les coefficients de ce polynôme de degré $n-1$ sont nuls, on obtient un système linéaire d'inconnues $a_n, \dots, a_1$ à n équations qui est de forme triangulaire : en effet, le seul terme de degré $n-1$ provient de $a_n((X+1)^n - X^n)$ et ne fait intervenir que a_n ; il y a deux termes de degré $n-2$ qui proviennent de $a_n((X+1)^n - X^n) + a_{n-1}((X+1)^{n-1} - X^{n-1})$ et qui ne font intervenir que a_n et a_{n-1} , et ainsi de suite. Plus précisément, obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{llllll} \binom{n}{1} a_n & & & & = 0 \\ \binom{n}{2} a_n & + \binom{n-1}{1} a_{n-1} & & & = 0 \\ \vdots & & & & \\ a_n & + a_{n-1} & \dots & + a_1 & = 0 \end{array}\right.$$

dont l'unique solution est $(a_n, \dots, a_1) = (0, \dots, 0)$.

Montrons que $\operatorname{Im}(\Delta_n) = \mathbb{K}[X]_{n-1}$: D'après la question a), $\operatorname{Im}(\Delta_n) \subset \mathbb{K}[X]_{n-1}$. Pour montrer l'égalité, il suffit de montrer qu'ils ont même dimension. D'après le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Im}(\Delta_n)) = (n+1) - \dim(\operatorname{Ker}(\Delta_n))$. On a montré que $\operatorname{Ker}(\Delta_n)$ est l'ensemble des polynômes constants donc sa dimension est 1 donc $\dim(\operatorname{Im}(\Delta_n)) = (n+1) - 1 = n = \dim(\mathbb{K}[X]_{n-1})$.

c) D'après la question a), $\operatorname{Im}(\Delta_n) \subset \mathbb{K}[X]_{n-1}$ donc $\operatorname{Im}(\Delta_n^2) \subset \mathbb{K}[X]_{n-2}$. Comme on perd un degré à chaque itération de Δ_n, on a $\Delta_n^{n+1} = 0$ et Δ_n est bien nilpotent.

3. a) Par définition de m, on a $f^{m-1} \neq 0$ c'est-à-dire : il existe $x \in E$ tel que $f^{m-1}(x) \neq 0$.

b) Supposons que $\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{m-1} f^{m-1}(x) = 0$. On applique f^{m-1} et on obtient : $\lambda_0 f^{m-1}(x) + \lambda_1 f^m(x) + \cdots + \lambda_{m-1} f^{2m-2}(x) = 0$. Comme $f^m = 0$, on a aussi $f^{m+1} = \cdots = f^{2m-1} = 0$ donc il ne reste dans l'expression précédente que $\lambda_0 f^{m-1}(x) = 0$. Comme $f^{m-1}(x) \neq 0$, on peut conclure que $\lambda_0 = 0$. On est ramenés à $\lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{m-1} f^{m-1}(x) = 0$, auquel on applique f^{m-2} pour obtenir de la même façon que précédemment $\lambda_1 = 0$, et ainsi de suite, jusqu'à $\lambda_{m-1} = 0$.

c) D'après un théorème du cours, le cardinal d'une famille libre est au plus égal à la dimension de l'espace vectoriel qui contient cette famille. Puisque les vecteurs $x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x)$ forment une famille libre, et qu'il y a dans cette famille m vecteurs, on peut conclure que $m \leq \dim(E)$.