université de BORDEAUX	**Année universitaire 2016-2017** SEMESTRE 2 SESSION 1 DE PRINTEMPS **Parcours :** Mathématiques/Informatique **Code UE : 4TPM201U** **Épreuve : Algèbre linéaire 1** 15 mai 2017 : (durée : 3h) *Documents interdits* Responsables de l'épreuves : C. Bachoc et R. Coulangeon	**Collège Sciences et Technologies**

Il ne s'agit pas d'un modèle de correction. On donne ici seulement les résultats corrects et des indications de solutions, pour les passages qui ne sont pas des applications immédiates du cours.

Exercice 1.

1. Déterminer le noyau et le rang des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

   Les trois colonnes de A sont égales et non nulles donc A est de rang 1. Le noyau de A est :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(A) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\} = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1)). \end{aligned}$$

   On constate que les trois colonnes de B sont de somme nulle et que les deux premières ne sont pas proportionnelles. Donc B est de rang 2. On détermine son noyau en résolvant le système linéaire $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on trouve que $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Vect}((1,1,1))$.

2. Soit a un réel fixé. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

   ainsi que les vecteurs

$$\vec{u_1} = (1,1,1)\ ,\ \vec{u_2} = (1,-1,0)\ \text{ et } \vec{u_3} = (1,0,-1).$$

   Enfin, on note f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est égale à M.

   (a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   Comme la famille $\mathscr{B}$ a trois éléments, il suffit pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$ de vérifier qu'elle est libre. Pour cela, on montre que $\lambda_1\vec{u_1} + \lambda_2\vec{u_2} + \lambda_3\vec{u_3} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ en résolvant un système linéaire.

(b) Calculer les images par f de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, et $\vec{u}_3$ et en déduire la matrice N de f dans la base $\mathscr{B}$.

$f(\vec{u_1}) = M\vec{u}_1 = (a+2)\vec{u}_1$, $f(\vec{u_2}) = (a-1)\vec{u}_2$, $f(\vec{u_3}) = (a-1)\vec{u}_3$.

$$N = \begin{pmatrix} a+2 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

(c) On note $\mathscr{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$ et calculer son inverse.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour calculer P^{-1} on peut appliquer la méthode vue en cours qui consiste à appliquer l'algorithme du pivot de Gauss sur les lignes de la concaténation de P et de la matrice identité jusqu'à faire apparaître la matrice identité à la place de P. On trouve

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(d) Quelle relation y a-t-il entre N, P, P^{-1} et M ?
C'est du cours : $N = P^{-1}MP$.

(e) Déterminer, en fonction de a, la dimension du noyau de f.
Pour calculer le noyau de f il vaut mieux considérer la matrice N plutôt que M. En observant N on voit facilement que :
— Si $a = -2$, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(\vec{u_1})$ est de dimension 1.
— Si $a = 1$, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(\vec{u_2}, \vec{u_3})$ est de dimension 2.
— Si $a \notin \{-2, 1\}$, $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$, et est donc de dimension 0.

Exercice 2.

Soit A une matrice carrée de taille 3 triangulaire supérieure, c'est-à-dire de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

avec $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$.

1. Montrez que si a, d ou f est nul, le rang de A est strictement inférieur à 3.
Si $a = 0$, une colonne est nulle donc le rang de A est au plus égal à 2. Si $f = 0$, une ligne est nulle d'où la même conclusion. Enfin, si $d = 0$, les deux premières colonnes sont proportionnelles donc, dans ce cas aussi, le rang de A est au plus 2.
2. Montrez qu'inversement, si a, d et f sont non nuls, alors A est inversible.
Si a, d et f sont non nuls, alors A est ligne échelonnée avec ses trois pivots non nuls donc elle est de rang 3 donc elle est inversible.

3. Dans cette question, on suppose que $a = d = f = 1$. Calculez l'inverse de A.
   On applique l'algorithme vu en cours et on trouve
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b & -c+be \\ 0 & 1 & -e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Donnez deux matrices A_1 et D telles que $A = A_1 D$, où A_1 est triangulaire supérieure avec ses coefficients diagonaux égaux à 1, et D est diagonale.
   Attention, il fallait ici supposer $df \neq 0$. On se rappelle que multiplier une matrice à droite par une matrice diagonale revient à multiplier les colonnes de cette matrice par les coefficients diagonaux de la matrice diagonale. On trouve
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b/d & c/f \\ 0 & 1 & e/f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

5. Lorsque $adf \neq 0$, calculez l'inverse de A en vous aidant des deux questions précédentes.
   On a $A = A_1 D$ donc $A^{-1} = D^{-1} A_1^{-1}$ et on utilise le calcul de A_1^{-1} fait à la question 3.
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/d & 0 \\ 0 & 0 & 1/f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b/d & -c/f + be/(df) \\ 0 & 1 & -e/f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/(ad) & -c/(af) + be/(adf) \\ 0 & 1/d & -e/(df) \\ 0 & 0 & 1/f \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f^2 = 0$, c'est-à-dire qu'on a la propriété :
$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n,\ f(f(\vec{u})) = 0.$$

1. Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
   Soit $\vec{v} \in \operatorname{Im} f$. Il existe donc $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{v} = f(\vec{u})$. Alors $f(\vec{v}) = f(f(\vec{u})) = f^2(\vec{u}) = \vec{0}$ donc $\vec{v} \in \operatorname{Ker} f$.
2. En utilisant le théorème du rang, montrer que $\dim \operatorname{Im} f \leq 1$ et que $\dim \operatorname{Ker} f \geq 2$.
   Par le théorème du rang, $3 = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f)$. Comme $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$, on a $\dim(\operatorname{Im} f) \leq \dim(\operatorname{Ker} f)$. Donc $\dim \operatorname{Im} f \leq 1$ et $\dim \operatorname{Ker} f \geq 2$.
3. On suppose désormais que l'application f n'est pas identiquement nulle, ou autrement dit que $\operatorname{Ker} f \neq \mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer que $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ et $\dim \operatorname{Im} f = 1$.
   Puisque $\operatorname{Ker} f \neq \mathbb{R}^3$, $\dim(\operatorname{Ker} f) \leq 2$. D'après la question précédente, on a $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$ et d'après le théorème du rang $\dim(\operatorname{Im} f) = 1$.
   (b) Soit $\vec{u} \notin \operatorname{Ker} f$. Montrer qu'il existe $\vec{v} \in \operatorname{Ker} f$ tel que la famille $\mathscr{B} = (f(\vec{u}), \vec{v}, \vec{u})$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.
   On sait que $f(\vec{u}) \neq \vec{0}$ et que $f(\vec{u}) \in \operatorname{Ker} f$. Donc, par le théorème de la base incomplète, comme celui-ci est de dimension 2, il existe $\vec{v} \in \operatorname{Ker} f$ tel que $\{f(\vec{u}), \vec{v}\}$ soit une base de $\operatorname{Ker} f$. Comme $\vec{u}$ n'appartient pas à $\operatorname{Ker} f$, on sait que la famille $\{f(\vec{u}), \vec{v}, \vec{u}\}$ est libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Quelle est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ précédente ?

La matrice de f dans la base $\{f(\vec{u}), \vec{v}, \vec{u}\}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.

1. Soit $a = 138$, $b = 102$, $c = 110$. On note $d = \text{pgcd}(a,b)$ et $d' = \text{pgcd}(d,c)$.
   (a) Appliquez l'algorithme d'Euclide étendu à a et b pour calculer d ainsi qu'une relation de Bézout entre a et b.

   On trouve $d = 6$ et $6 = 138 * 3 - 102 * 4$.

   (b) Faites de même avec d et c.

   On trouve $d' = 2$ et $2 = 110 * 1 - 6 * 18$.

   (c) En déduire des entiers u, v, w tels que $d' = au + bv + cw$.

   $2 = 110 * 1 - 6 * 18 = 110 * 1 - (138 * 3 - 102 * 4) * 18 = 110 * 1 - 138 * 54 + 102 * 72$.

   (d) Donnez la liste des diviseurs de a, b et c, puis vérifier que leur plus grand diviseur commun est égal à d'.

   — $a = 2 * 3 * 23$ donc les diviseurs de a sont : $1, 2, 3, 23, 6, 46, 69, 138$.

   — $b = 2 * 3 * 17$ donc les diviseiurs de b sont $1, 2, 3, 17, 6, 34, 51, 102$.

   — $c = 2 * 5 * 11$ donc les diviseurs de c sont $1, 2, 5, 11, 10, 22, 55, 110$.

   Leur plus grand diviseur commun est bien 2.

2. Soit a, b et c trois entiers naturels non nuls quelconques. On note $D = \text{pgcd}(a,b,c)$ leur plus grand diviseur commun. On note $d = \text{pgcd}(a,b)$ et $d' = \text{pgcd}(d,c)$.
   (a) Montrez que D divise d, et en déduire que $D \leq d'$.

   D divise a et b donc il divise le pgcd de a et b c'est un théorème du cours. Donc D divise d. Comme D divise aussi c, il est bien inférieur ou égal au pgcd de d et c. Donc on a bien $D \leq d'$.

   (b) Montrez que $D = d'$.

   d' divise d et c. Comme d divise a et b, on en déduit que d' divise a, b et c. Donc, par définition de D, $d' \leq D$. En combinant avec la question précdente on en déduit que $d' = D$.

   (c) Déduire de ce qui précède qu'il existe des entiers u, v, w tels que

   $$D = au + bv + cw.$$

   On applique une première fois le théorème de Bézout pour obtenir u_1 et v_1 tels que $d = au_1 + bv_1$ puis une deuxième fois pour obtenir u_2 et v_2 tels que $d' = du_2 + cv_2$. On obtient que $d' = (au_1 + bv_1)u_2 + cv_2 = a(u_1u_2) + b(v_1u_2) + cv_2$. Comme $D = d'$ on obtient l'expression recherchée.