

N1MA4M11 Algèbre 3

DS

21 Mars 2014, durée 1h20, documents interdits

Exercice 1 :

- Dans cette question on considère le groupe $G = (\mathbb{Z}/23\mathbb{Z})^*$ muni de la multiplication modulo 23.
 - Quel est l'ordre de G ?
 - Que peuvent valoir les ordres des éléments de G d'après le théorème de Lagrange ?
 - Quels sont les ordres des éléments suivants de G : $-1 \bmod 23$, $2 \bmod 23$, $-2 \bmod 23$?
 - Montrez que G est cyclique.
- Dans cette question, p et q sont deux nombres premiers impairs tels que $p = 1 + 2q$. Soit G le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ muni de la multiplication modulo p .
 - Quel est l'ordre de G ?
 - Que peuvent valoir les ordres des éléments de G d'après le théorème de Lagrange ?
 - Montrez que $-1 \bmod p$ est l'unique élément d'ordre 2 de G (indication : pensez à utiliser : $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$).
 - Montrez que, si $a \bmod p$ est d'ordre q dans G , alors $-a \bmod p$ est d'ordre $2q$ dans G .
 - Déduire de ce qui précède que G est cyclique.

Exercice 2 : Soit G un groupe, et soit H et K deux sous-groupes de G . On note

$$HK := \{hk \mid h \in H \text{ et } k \in K\}.$$

- Dans cette question on prend $G = S_3$, et on pose $H = \langle(1, 2)\rangle$, $K = \langle(2, 3)\rangle$, $L = \langle(1, 2, 3)\rangle$.
 - Montrez que $HK = \{\text{Id}, (1, 2), (2, 3), (1, 2, 3)\}$ et que HK n'est pas un sous-groupe de G .
 - Montrez que ni H ni K n'est distingué dans G .
 - Montrez que L est distingué dans G .
 - Montrez que $LK = G$.
- On retourne au cas général, et on considère l'application :

$$\begin{aligned} f : H \times K &\rightarrow HK \\ (h, k) &\mapsto hk \end{aligned}$$

- Montrez que, si $x = f(h, k)$, alors l'ensemble des antécédents de x par f est l'ensemble $\{(hg, g^{-1}k) \mid g \in H \cap K\}$ et que celui-ci est de cardinal $|H \cap K|$.
- En déduire que le cardinal de l'ensemble HK est égal à $|H||K|/|H \cap K|$.
- Montrez que, si H est distingué dans G , alors HK est un sous-groupe de G .