Université de Bordeaux
Mathématiques

Algèbre 3 – Licence 2
Année 2015–2016

FEUILLE D'EXERCICES n° 2

Permutations

On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$, où n est un entier ≥ 2 pour éviter le cas trivial $n = 1$. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on note $\varepsilon(\sigma)$ la signature de σ.

Exercice 1 –

1) Dresser la liste des éléments de $\mathfrak{S}_3$.
2) Établir la table de $\mathfrak{S}_3$ pour la loi de composition.

Exercice 2 –

1) On considère dans $\mathfrak{S}_5$ les permutations
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$
Déterminer σ_1^{-1}, σ_2^{-1}, $\sigma_1\sigma_2$ et $\sigma_2\sigma_1$.
2) Même question avec $\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.
3) Écrire τ_1^{-1} sous la forme τ_1^k et τ_2^{-1} sous la forme τ_2^l où k et l sont des entiers strictement positifs. Y-a-t-il unicité de k et l ?
4) Même question avec σ_1 et σ_2.

Exercice 3 – On considère ici des permutations de $\mathfrak{S}_8$.

1) Soit
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$
Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2) Même question avec $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.
3) Calculer σ^{2016} et τ^{2016}.
4) Quel est l'ordre de σ ? Quel est celui de τ ?

Exercice 4 – Généralisons. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation différente de l'identité, dont la décomposition en produit de cycles à supports disjoints est $c_1 c_2 \cdots c_r$ (où $r \geq 1$). Notons $l_i \geq 2$ la longueur du cycle c_i.

1) Exprimer l'ordre de σ en fonction des l_i.
2) Donner un exemple de permutation de $\mathfrak{S}_{12}$ d'ordre 15.
3) Combien y a-t-il de telles permutations dans $\mathfrak{S}_{12}$?
4) Quel est l'ordre maximal d'un élément de $\mathfrak{S}_8$? $\mathfrak{S}_{12}$? $\mathfrak{S}_{15}$?

Exercice 5 – On note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note g_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui à e_i associe $e_{\sigma(i)}$ pour tout i.

1) Montrer que g_σ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$. Quelle est sa matrice M_σ dans $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$?
2) Montrer que si σ, $\tau \in \mathfrak{S}_n$, alors $M_{\sigma\tau} = M_\sigma M_\tau$.
3) Montrer que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $\det M_\sigma = \varepsilon(\sigma)$.

Exercice 6 –

1) Soient σ, $\tau \in \mathfrak{S}_n$. On dit que τ est une conjuguée de σ s'il existe $\gamma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\tau = \gamma\sigma\gamma^{-1}$. Montrer que dans $\mathfrak{S}_n$ la relation "est une conjuguée de" est une relation d'équivalence. Ceci permet de parler désormais de permutations conjuguées.
2) Montrer que, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et si a_1, a_2, $\ldots$, a_k sont $k \geq 2$ éléments deux à deux distincts de $\{1, 2, \ldots, n\}$, alors
$$\sigma(a_1\ a_2\ \ldots\ a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\ \sigma(a_2)\ \ldots\ \sigma(a_k)).$$
3) Quelles sont les permutations conjuguées de l'identité ? Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation différente de l'identité dont la décomposition en produit de cycles à supports disjoints est $c_1 c_2 \cdots c_r$ (où $r \geq 1$). Notons $l_i \geq 2$ la longueur du cycle c_i. Montrer que $\tau \in \mathfrak{S}_n$ et σ sont conjuguées si et seulement si τ admet une décomposition en produit de cycles à supports disjoints de la forme $c'_1 c'_2 \cdots c'_r$ où c'_i est de longueur l_i pour tout i.
4) Combien de permutations de $\mathfrak{S}_n$ commutent avec $(1\ 2\ \ldots\ n)$? Avec $(1\ 2\ \ldots\ k)$ où $2 \leq k \leq n$?

Exercice 7 – Soit $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de signature 1.

1) Déterminer $\mathfrak{A}_3$.
2) Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est l'ensemble des produits d'un nombre pair de transpositions.
3) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation différente de l'identité dont la décomposition en produit de cycles à supports disjoints est $c_1 c_2 \cdots c_r$ (où $r \geq 1$). Notons $l_i \geq 2$ la longueur du cycle c_i. À quelle condition portant sur les l_i a-t-on $\sigma \in \mathfrak{A}_n$?
4) Quel est la cardinal de $\mathfrak{A}_n$? *Indication* : on pourra considérer l'application $f : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n$ définie par $f(\sigma) = (1\ 2)\sigma$.

Exercice 8 –

1) Montrer que $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, $\ldots$, $(1\ n)$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.
2) Montrer que $(1\ 2)$, $(2\ 3)$, $\ldots$, $(n-1\ n)$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.
3) Montrer que $(1\ 2)$ et $(1\ 2\ 3\ \ldots\ n)$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.
4) Montrer que si $n \geq 3$, les cycles de longueur 3 engendrent $\mathfrak{A}_n$.
5) Montrer que si $n \geq 3$, $(1\ 2\ 3)$, $(1\ 2\ 4)$, $\ldots$, $(1\ 2\ n)$ engendrent $\mathfrak{A}_n$.
6) Montrer que les cycles de longueur n engendrent $\mathfrak{S}_n$ si n est pair, et qu'ils engendrent $\mathfrak{A}_n$ si n est impair.