

Feuille de TD n°3

Groupes (suite)

Exercice 1

On munit l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ de la loi interne \otimes définie par la formule

$$x \otimes y = xy + x + y.$$

Il est montré dans l'exercice 3 de la feuille de TD n°2 que (I, \otimes) est un groupe. Montrer que l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & I \\ x & \longmapsto & e^x - 1 \end{cases} \text{ est un isomorphisme de groupes.}$$

Exercice 2

Montrer qu'un groupe qui n'a qu'un nombre fini de sous-groupes est fini.

Exercice 3

Trouver tous les morphismes du groupe additif \mathbb{Q} dans lui-même. Même question pour les morphismes de \mathbb{Q} dans \mathbb{Z} .

Exercice 4

Soit (G, \cdot) un groupe. On définit l'application $f : \begin{cases} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^2 \end{cases}$. Montrer que f est un morphisme de groupes si et seulement si G est abélien.

Exercice 5

Soit R_0 l'ensemble des rotations du plan réel de centre 0 et \mathbb{S}^1 l'ensemble des nombres complexes de module 1. Montrer que les groupes (R_0, \circ) et (\mathbb{S}^1, \times) sont isomorphes.

Exercice 6

Soit G le produit direct de (\mathbb{R}_+^*, \times) et de $(\{-1, 1\}, \times)$. Montrer que G est isomorphe à (\mathbb{R}^*, \times) .

Exercice 7

Soit G un groupe cyclique engendré par un élément g . On note $\text{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G .

1. Montrer que l'application $\psi : \begin{cases} \text{End}(G) & \longrightarrow & G \\ f & \longmapsto & f(g) \end{cases}$ est une bijection.
2. Soit $\text{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G .
 - a) Montrer que $\text{Aut}(G)$ est un groupe.
 - b) Soit $f \in \text{End}(G)$. Montrer que $f \in \text{Aut}(G)$ si et seulement si $\psi(f)$ est un générateur de G .
3. Déterminer $\text{Aut}(\mathbb{Z})$.

Exercice 8

1. Montrer que les groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes.
2. Montrer plus généralement que $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sont isomorphes si et seulement si m et n sont premiers entre eux.

Ordres (groupes)

Exercice 9

Pour tout entier $n \geq 2$, on note $s_n : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ la surjection canonique.

On note $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et on considère l'application $s : \begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & (s_2(x), s_6(x)) \end{cases}$.

1. Montrer que s est un morphisme de groupes. Déterminer son noyau. Ce morphisme est-il surjectif?

2. Déterminer les sous-groupes d'ordre 2 de G .
3. Soit H un sous-groupe de G . Montrer que $s^{-1}(H)$ est un sous-groupe de \mathbb{Z} qui contient $6\mathbb{Z}$. Déterminer $s^{-1}(H)$ et $s(s^{-1}(H))$ lorsque $H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{0\}$.

Exercice 10

Soient (G, \cdot) un groupe et x, y des éléments de G .

1. On suppose que xy est d'ordre fini. Que peut-on dire de yx ?
2. Donner un exemple où x et y sont d'ordre fini, mais pas xy .

Exercice 11

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{N}$. Quel est l'ordre de a dans le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Exercice 12

Soient (G, \cdot) un groupe fini et K, H deux sous-groupes de G de cardinaux premiers entre eux. Que peut-on dire de $K \cap H$?

Exercice 13

1. Soit (G, \cdot) un groupe tel que pour tout $x \in G$, x^2 est l'élément neutre de G . Montrer que G est abélien.
2. Soit p un nombre premier. Montrer que tout groupe d'ordre p est cyclique.
3. Montrer que tout groupe d'ordre inférieur à 5 est abélien.