Correction (indications) du DM n^o 1

Soient M et N deux A-modules, et soit $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ l'ensemble des morphismes de A-modules de M dans N. On pose $M^* = \mathrm{Hom}_A(M,A)$.

1. Définir une structure naturelle de A-module sur $\mathrm{Hom}_A(M,N)$.

On définit l'addition et la loi externe sur $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ par respectivement : $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ et $(a\cdot f)(x) = a\cdot f(x)$ et on vérifie les propriétés de module.

2. Prouver que les A-modules M et $\mathrm{Hom}_A(A,M)$ sont isomorphes.

On remarque que si $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$, alors $f(a) = f(a\cdot 1) = a\cdot f(1)$ et on en déduit que f est uniquement déterminé par $f(1)\in M$. On vérifie que l'application $f \to f(1)$ est un isomorphisme de $\mathrm{Hom}_A(A,M)$ sur M.

3. On suppose A intègre. Montrer que, si M est un module de torsion (c'est-à-dire si $T(M) = M$), alors $M^* = \{0\}$. Décrire le dual du $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.

Si $T(M) = M$, pour tout $x \in M$ il existe $a \neq 0$ tel que $a\cdot x = 0$. Alors, si $f \in M^*$, $f(a\cdot x) = a\cdot f(x) = f(0) = 0$. Mais a et $f(x)$ appartiennent à A qui est intègre donc, comme $a \neq 0$, et que $a\cdot f(x) = 0$, c'est que $f(x) = 0$. Donc $f = 0$. Il est facile de voir que $(M\times N)^* \simeq M^*\times N^*$. Par conséquent $(\mathbf{Z}\times Z/2\mathbf{Z})^* \simeq \mathbf{Z}^*\times(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^* \simeq \mathbf{Z}$ en appliquant 2) et ce qui précède.

4. Construire un morphisme naturel de A-module $\varphi : M \to (M^*)^*$.

Soit $x\in M$. On définit $\varphi(x) \in (M^*)^*$ par : $\varphi(x)(f) = f(x)$. On vérifie que $\varphi(x)$ est bien A-linéaire ainsi que l'application $x \mapsto \varphi(x)$.

5. Dans cette question, on suppose que M et N sont libres de type fini, de rang respectifs n et k.

5-a. Si $e_1,\dots,e_n$ est une base de M, montrer que $e_1^*,\dots,e_n^*$ définis par : $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ définissent une base de M^*. En déduire un isomorphisme de M sur M^*.

On montre que $\{e_1^*,\dots,e_n^*\}$ est une famille libre et génératrice. Si $f := \sum_{i=1}^n a_i e_i^* = 0$ alors, pour tout $j = 1,\dots,n$, $f(e_j) = a_j = 0$ donc la famille est libre. Si $f\in M^*$ et $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, alors $f(x) = f(\sum_{i=1}^n a_i e_i) = \sum_{i=1}^n a_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n f(e_i)e_i^*(x)$ donc $f = \sum_{i=1}^n f(e_i)e_i^*$ et la famille est génératrice de M^*. M et M^* sont deux modules libres et de rang n donc ils sont isomorphes.

5-b. Montrer que φ est un isomorphisme.

Montrons que φ est injective. Si $\varphi(x) = 0$ alors pour tout $f\in M^*$, $\varphi(x)(f) = 0$ soit $f(x) = 0$. En prenant $f = e_i^*$ on en déduit que $x = 0$. Montrons que φ est surjective. Si $F \in (M^*)^*$ soit $a_i = F(e_i^*)$. Alors on voit facilement que $F = \varphi(x)$.

5-c. Plus généralement, montrer que $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ est libre de type fini, et en donner une base. Quel est son rang ?

Une base de $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ est donnée par $\varphi_{i,j}$ définie par : $\varphi_{i,j}(e_k) = \delta_{k,j}f_i$ (où $\{f_1,\dots,f_k\}$ est une base de N). Sa matrice dans ces bases est la matrice élémentaire $E_{i,j}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indices i,j qui vaut 1. Le rang de $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ est le produit des rangs de M et de N. Lien avec le cours : $\varphi_{i,j} = e_j^*\otimes f_i$ vu comme élément de $M^*\otimes N$.

6. Soit Λ un ensemble quelconque. On considère les A-modules A^Λ et $A^{(\Lambda)}$ définis en cours.

6-a. Définir une application bilinéaire naturelle $(\ ,\ ) : A^\Lambda\times A^{(\Lambda)} \to A$.

Soit $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in A^\Lambda$ et $y = (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in A^{(\Lambda)}$. On définit $(x,y) = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda y_\lambda$. Noter que cette définition a du sens car, comme y est de support fini, cette somme est en fait une somme finie. Il est facile de vérifier que cette application est bilinéaire.

6-b. Montrer que $(\ ,\ )$ induit un isomorphisme de A-modules de A^Λ sur $(A^{(\Lambda)})^*$.

Si $x\in A^\Lambda$, on définit $\varphi(x)\in(A^{(\Lambda)})^*$ par $\varphi(x)(y) = (x,y)$. Posons $e_\mu\in A^\Lambda$ l'élément qui vérifie $(e_\mu)_\lambda = \delta_{\lambda,\mu}$. Pour tout $y\in A^{(\Lambda)}$, $y = \sum_\lambda y_\lambda e_\lambda$ et comme y est de support fini, cette somme est finie. Il est clair que la famille des e_μ forme une base de $A^{(\Lambda)}$ (mais pas de A^Λ parce qu'elle ne peut engendrer que des éléments de support fini..). Soit maintenant $x\in A^\Lambda$ tel que $\varphi(x) = 0$, cela signifie que $(x,y) = 0$ pour tout $y\in A^{(\Lambda)}$. Avec $y = e_\lambda$, on obtient $x_\lambda = 0$. Donc $x = 0$, et φ est injective. Soit $\psi\in(A^{(\Lambda)})^*$, et soit $x_\lambda := \psi(e_\lambda)$. On voit facilement que $\psi = \varphi(x)$. Donc ψ est aussi surjective.

6-c. Montrer que $(\ ,\ )$ induit un morphisme injectif de A-modules de $A^{(\Lambda)}$ dans $(A^\Lambda)^*$.

Pareil qu'à la question précédente : on pose $\varphi(y)(x) = (x,y)$. L'injectivité se démontre de la même façon. Par contre, si on suit la même preuve pour la surjectivité, cela ne marche pas parce que $(\psi(e_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ n'est pas nécessairement de support fini.