# Liste d'exercices n$^o$ 1
(généralités sur les modules, modules noethériens)

**N.B.** Dans tous les exercices, $A$ désigne un anneau commutatif et unitaire.

**Exercice 1** *(Exemples de modules)*

**1.** Vérifiez qu'un groupe abélien est un $\mathbf{Z}$-module.

**2.** Soit $K$ un corps, $E$ un $K$-espaces vectoriel et $f$ une application linéaire de $E$ dans $E$. Montrez qu'on définit une structure de $K[X]$-module sur $E$ en posant $P(X) \cdot x = P(f)(x)$. Décrire les sous-modules de $E$.

**Exercice 2**

Vérifier que la structure multiplicative de $A$ définit une structure de $A$-module sur $A$. Décrire les sous-modules de ce module.

**Exercice 3** *(sous-module engendré par une partie)*

Soit $M$ un $A$-module et soit $S$ une partie de $M$. Montrer qu'il existe un plus petit (au sens de l'inclusion) sous-module de $M$ contenant $S$. On le note $\langle S \rangle$. Donner une description explicite des éléments de $\langle S \rangle$.

**Exercice 4**

Soit $M = \mathbf{Z}^2$ et soit $N$ le $\mathbf{Z}$-sous-module de $M$ engendré par $(2,0)$ et $(-1,1)$.

**1.** Dessiner $M$ et $N$.

**2.** Montrer que $N = \{(x_1, x_2) \in M \mid x_1 + x_2 \equiv 0 \bmod 2\}$.

**3.** En déduire que $N \neq M$ et que $M/N \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

**Exercice 5** *(restriction des scalaires)*

Soit $B$ un anneau commutatif unitaire et soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux unitaires. Si $M$ est un $B$-module, montrer que l'on définit une structure de $A$-module sur $M$ en posant $a \cdot x = f(a) \cdot x$ pour tout $(a, x) \in A \times M$.

Si $M = \mathbf{C}^2$, et $f$ est l'inclusion $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$, respectivement l'inclusion $\mathbf{Q} \subset \mathbf{C}$, quelle est la dimension de $M$ pour la structure d'espace vectoriel définie par $f$?

**Exercice 6**

Soit $M$ un $A$-module et soit $I$ un idéal de $A$. On note $IM$ l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ ($n \in \mathbf{N}$ arbitraire, $a_i \in I, x_i \in M$ pour tout $i = 1, \dots n$).

**1.** Montrer que $IM$ est un sous-module de $M$. Déterminer $IA$.

**2.** Soit $N = M/IM$ le sous-module quotient. Prouver que $IN = \{0\}$.

**3.** Montrer que tout morphisme de $A$-modules $f : M \to N$ induit un morphisme de $A$-modules $\overline{f} : M/IM \to N/IN$.

**4.** Prouver que si $f$ est surjectif (resp. bijectif), alors il en est de même de $\overline{f}$.

**Exercice 7** *(annulateur d'un module)*

On appelle *annulateur* d'un $A$-module $M$, noté $\mathrm{Ann}(M)$, l'ensemble des éléments $a \in A$ tels que $ax = 0$ pour tout $x \in M$.

**1.** Montrer que $\mathrm{Ann}(M)$ est un idéal de $A$

**2.** Si $I$ est un idéal de $A$, déterminer l'annulateur du $A$-module $A/I$.

**3.** Prouver que si $M$ et $N$ sont des $A$-modules isomorphes, alors $\mathrm{Ann}(M) = \mathrm{Ann}(N)$.

**4.** Montrez que $M$ est muni naturellement d'une structure de module sur le quotient $A/\mathrm{Ann}(M)$.

**5.** Dans l'exemple 2. de l'exercice 1, décrire $\mathrm{Ann}(E)$.

**Exercice 8** *(torsion)*

Soit $M$ un $A$-module. On note $T(M)$ l'ensemble des $x \in M$ tels qu'il existe $a \in A \setminus \{0\}$ vérifiant $ax = 0$. Pour tout $a \in A$, on pose également $M(a) = \{x \in M; ax = 0\}$.

**1.** Vérifier que $M(a)$ est un sous-module de $M$. Prouver que si deux modules $M$ et $N$ sont isomorphes, alors $M(a)$ et $N(a)$ sont isomorphes. En déduire que les $\mathbf{Z}$-modules $\mathbf{Z}/24\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ ne sont pas isomorphes.

**2.** Si $A$ est intègre, prouver que $T(M)$ est un sous-module de $M$. Si de plus $M$ est libre, déterminer $T(M)$.

**3.** $T(M)$ est-il un sous-module pour $A = \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ et $M = A$ ? Pour $A = \mathbf{Z}$ et $M = \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ ?

**4.** Si $A$ est intègre, montrer que si $M \simeq N$, alors $T(M) \simeq T(N)$.

**5.** Soient $(M_i)_{i\in I}$ une famille de $A$-modules. Montrez que $(\oplus_{i\in I} M_i)(a) = \oplus_{i\in I} M_i(a)$ et, pour $A$-intègre, que $T(\oplus_{i\in I} M_i) = \oplus_{i\in I} T(M_i)$.

**6.** Comparer $T(\prod_{n=2}^{\infty} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ avec $\prod_{n=2}^{\infty} T(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, où $A = \mathbf{Z}$.

**Exercice 9** *(Dualité)*

Soient $M$ et $N$ deux $A$-modules, et soit $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ l'ensemble des morphismes de $A$-modules de $M$ dans $N$. On pose $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$.

**1.** Définir une structure naturelle de $A$-module sur $\mathrm{Hom}_A(M, N)$.

**2.** Prouver que les $A$-modules $M$ et $\mathrm{Hom}_A(A, M)$ sont isomorphes.

**3.** On suppose $A$ intègre. Montrer que, si $M$ est un module de torsion (c'est-à-dire si $T(M) = M$), alors $M^* = \{0\}$. Décrire le dual du $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

**4.** Construire un morphisme naturel de $A$-module $\varphi : M \to (M^*)^*$.

**5.** Dans cette question, on suppose que $M$ et $N$ sont libres de type fini, de rang respectifs $n$ et $k$.

**5-a.** Si $e_1, \dots, e_n$ est une base de $M$, montrer que $e_1^*, \dots, e_n^*$ définis par: $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ définissent une base de $M^*$. En déduire un isomorphisme de $M$ sur $M^*$.

**5-b.** Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme.

**5-c.** Plus généralement, montrer que $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ est libre de type fini, et en donner une base. Quel est son rang ?

**6.** Soit $\Lambda$ un ensemble quelconque. On considère les $A$-modules $A^\Lambda$ et $A^{(\Lambda)}$ définis en cours.

**6-a.** Définir une application bilinéaire naturelle $( \, , \, ) : A^\Lambda \times A^{(\Lambda)} \to A$.

**6-b.** Montrer que $( \, , \, )$ induit un isomorphisme de $A$-modules de $A^\Lambda$ sur $(A^{(\Lambda)})^*$.

**6-c.** Montrer que $( \, , \, )$ induit un morphisme injectif de $A$-modules de $A^{(\Lambda)}$ dans $(A^\Lambda)^*$.

**Exercice 10**

Soit $M$ un module et soit $N$ un sous-module de $M$. Donner un exemple avec

**1.** $M$ libre et $N$ non libre,

**2.** $M$ de type fini et $N$ non de type fini.

[on pourra prendre un anneau de polynômes $A$ et $M = A$]

**Exercice 11**

Montrer que le $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Q}$ n'est pas de type fini.

**Exercice 12**

**1.** Montrer que l'anneau $\mathbf{R}[X, Y]/(1 - XY)$ possède une structure naturelle de $\mathbf{R}[X]$-module.

**2.** Montrer que ce module est isomorphe à $\mathbf{R}[X, 1/X] \subset \mathbf{R}(X)$.

**3.** Ce $\mathbf{R}[X]$-module est-il de type fini ? est-il libre ?

**Exercice 13**

Les modules suivants sont-ils noethériens ?

**1.** Un module de type fini sur un anneau $A$

**2.** le $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Z}[X]$,

**3.** le $\mathbf{k}[X]$-module $\mathbf{k}[X]/(P)$ où $P \in \mathbf{k}[X]$ ($\mathbf{k}$ corps commutatif).

**Exercice 14** *(Théorème de Hilbert)*

Dans cet exercice on démontre le théorème suivant dû à Hilbert:

**Théorème:** Si $A$ est un anneau noethérien, alors $A[X]$ est noethérien.

Noter en particulier qu'une conséquence immédiate de ce théorème est que l'anneau des polynômes à plusieurs variables $\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ est noethérien.

Soit donc $A$ un anneau noethérien, et $I$ un idéal de $A[X]$. Si $P = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 \in A[X]$, avec $a_n \neq 0$, on dit que $a_n$ est son *coefficient dominant* et on note $a_n = \mathrm{cd}(P)$. On pose $\mathrm{cd}(0) = 0$.

**1.** Soit $J_n = \{\mathrm{cd}(P) \mid P \in I \text{ et } \deg(P) \leq n\}$. Montrez que $(J_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante d'idéaux de $A$ et en déduire qu'il existe $d$ tel que $J_n = J_d$ pour tout $n \geq d$.

**2.** Justifiez l'existence de $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in J_d$ tels que $J_d = A\alpha_1 + \cdots + A\alpha_r$. Soit $P_i \in I$ tels que $\alpha_i = \mathrm{cd}(P_i)$.

**3.** Justifiez l'existence de $Q_1, \dots Q_s \in I$ tels que $I \cap A[X]_{<d} = AQ_1 + \cdots + AQ_r$.

**4.** Montrez que $I$ est engendré comme $A[X]$ module par $P_1, \dots, P_r, Q_1, \dots, Q_s$ et conclure.

**Exercice 15**

**1.** Soit $M$ un $A$-module noethérien et soit $u \in \mathrm{End}_A(M)$ surjectif. Prouver que $u$ est un isomorphisme [considérer la suite $\mathrm{Ker}(u^n)$].

**2.** Donner un exemple d'endomorphisme surjectif mais non injectif [on pourra considérer le $A$-module libre $A^{(\mathbf{N})}$].