Liste d'exercices n^o 2

Modules de type fini sur les anneaux prinicipaux

Exercice 1 *(facteurs directs)*

Soit M un A-module et soit N un sous-module de M. On dit que N est *facteur direct* de M s'il existe un sous-module P tel que $M = N \oplus P$.

1. Déterminer les facteurs directs du $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Z}$.
2. Si M/N est libre, prouver que N est facteur direct de M.
3. On suppose désormais que A est principal et on prend $M = A^n$ $(n \geq 1)$.
   (a) Montrer que N est facteur direct de M si et seulement si M/N est sans torsion.
   (b) Donner un critère portant sur une base de M adaptée à N pour que N soit facteur direct de M.
   (c) Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in M = A^n$. Montrer qu'il existe une A-base de M commençant par x si et seulement si $\mathrm{pgcd}(x_1, \dots, x_n) = 1$.

Exercice 2

Construire une matrice de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$ dont la première colonne est x dans les cas suivants :

1. $n = 2$, $x = (1, 2)$; $x = (24, 47)$; $x = (a, b)$ avec $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$.

2. $n = 3$, $x = (6, 11, 5)$; $x = (6, 10, 15)$.

Exercice 3 *(modules indécomposables)*

Un A-module M est *indécomposable* si $M \neq \{0\}$ et si les seuls facteurs directs de M sont $\{0\}$ et M. Soit A un anneau principal.

1. Prouver que le A-module A est indécomposable.

2. Si $p \in A$ est un élément irréductible, montrer que le A-module A/p^nA $(n \geq 1)$ est indécomposable.

3. Montrer que tout A-module de type fini indécomposable est isomorphe à A ou à A/p^nA $(n \geq 1$, p irréductible$)$.

4. Montrer que le $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Q}$ est indécomposable.

Exercice 4 *(base adaptée)*

Dans cet exercice on considère des $\mathbf{Z}$-sous-modules de $\mathbf{Z}^3$ engendrés par un ensemble de vecteurs $v_1, \dots, v_k$ de $\mathbf{Z}^3$. On demande de construire dans chaque cas une base adaptée de $\mathbf{Z}^3$ relativement à ces sous-modules, puis de déterminer les facteurs invariants du quotient de $\mathbf{Z}^3$ par ces sous-modules.

1. $v_1 = (2, 0, 4), v_2 = (2, 1, -1), v_3 = (2, -1, 5)$,

2. $v_1 = (2, 6, -8), v_2 = (4, -4, 12)$,

3. $v_1 = (2, 5, 5), v_2 = (1, 5, 5), v_3 = (1, 0, 5), v_4 = (1, 5, 0)$.

Exercice 5 *(facteurs invariants)*

Calculez les facteurs invariants du quotient de ces $\mathbf{Z}$-modules (pour ceux qui ont du courage calculez une base adaptée) :

1. $L = \{(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3 \mid x \equiv y \bmod 2, y \equiv z \bmod 3\} \subset \mathbf{Z}^3$.

2. $L = \{(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3 \mid 3x + 5y + 7z = 0\} \subset \mathbf{Z}^3$.

3. $D_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{Z}^n \mid x_1 + \cdots + x_n \equiv 0 \bmod 2\} \subset \mathbf{Z}^n$.

4. $D_n \subset D_n^{\#} := \{y \in \mathbf{Z}^n \mid \langle x, y\rangle \in \mathbf{Z} \text{ pour tout } x \in D_n\}$ où $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Exercice 6

Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}^n)$ $(n \geq 1)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est facteur direct.

2. Prouver que $f(\mathbf{Z}^n)$ est d'indice fini si et seulement si f est injectif, et que dans cas l'indice de $f(\mathbf{Z}^n)$ dans $\mathbf{Z}^n$ vaut $|\det(f)|$ [considérer une base de $\mathbf{Z}^n$ adaptée à $f(\mathbf{Z}^n)$].

Exercice 7

Donner les diviseurs élémentaires puis les facteurs invariants des groupes abéliens suivants :

1. $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ $(n \geq 1)$ **2.** $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/18\mathbf{Z}$. **3.** $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/b\mathbf{Z}$ où $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$.

Exercice 8

Décrire à isomorphisme près les groupes abéliens d'ordre n dans les cas suivants (en précisant pour chaque classe d'isomorphisme les facteurs invariants associés) :

1. $n = p^2$, $n = pq$ (p, q premiers distincts) **2.** $n = 18$ **3.** $n = 2700$.

Exercice 9 *(Décomposition primaire)*

1. Soit A un anneau principal et soit $\mathcal{P}$ un système de représentants des irréductibles de A modulo les unités de A. Soit K le corps des fractions de A. Prouver que le A-module K/A est de torsion et donner sa décomposition primaire [pour $p \in \mathcal{P}$, on pourra considérer $A[1/p] = \{a/p^n \mid a \in A,\ n \geq 0\}$].

Exercice 10

Soit $n \leq 3$. Prouver que deux matrices $A, B \in M_n(\mathbf{k})$ sont semblables si et seulement si $\chi_A = \chi_B$ et $\mu_A = \mu_B$. Qu'en est-il si $n = 4$?

Exercice 11

Donner les invariants de similitude (i.e. les facteurs invariants du $\mathbf{C}[X]$-module associé) d'un endomorphisme diagonalisable dont le polynôme caractéristique vaut $(X-1)(X+1)^3(X-2)^2$.

Exercice 12 *(Extrait du DS 2017/2018)*

Donner les invariants de similitude de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 *(Facteurs invariants de la matrice $M - X\,\mathrm{Id}$)*

Soit E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension n, soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Soit $u \in \mathrm{End}(E)$ et soit M la matrice de u dans la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Dans cet exercice, on montre que les facteurs invariants de u sont exactement les facteurs invariants de la matrice $M - X\,\mathrm{Id}_n$. En particulier, cela donne via l'algorithme de réduction vu en cours une méthode algorithmique pour calculer les facteurs invariants de u, ainsi qu'une base pour la forme canonique rationnelle (respectivement, le cas échéant, de Jordan) de u.

On note $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ la base canonique de $\mathbf{k}[X]^n$ et on définit un endomorphisme de $\mathbf{k}[X]$-modules $f : \mathbf{k}[X]^n \to E$ en posant : $f(\epsilon_i) = e_i$ pour $1 \leq i \leq n$. On va montrer d'abord que $\mathrm{Ker}\, f$ est le sous-module de $\mathbf{k}[X]^n$ engendré par les colonnes de $M - X\,\mathrm{Id}_n$.

1. Soit, pour $1 \leq i \leq n$, $C_i = \sum_{k=1}^n M_{k,i}\epsilon_k - X\epsilon_i$. Montrez que $C_i \in \mathrm{Ker}\, f$. En déduire que $N := \mathbf{k}[X]C_1 + \cdots + \mathbf{k}[X]C_n \subset \mathrm{Ker}\, f$.

2. Montrez que pour tout $P(X) \in \mathbf{k}[X]$, pour tout $1 \leq i \leq n$, $P(X)\epsilon_i \in (\mathbf{k}\epsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{k}\epsilon_n) + N$ (indication : le vérifier pour $P = 1$, puis pour $P = X$, etc..)

3. En utilisant la question précédente montrez que $\mathrm{Ker}\, f \subset N$.

4. En déduire que les facteurs invariants de u sont les facteurs invariants de N et donc de la matrice $M - X\,\mathrm{Id}_n$.

5. Soit $E = \mathbf{k}^3$ et $u \in \mathrm{End}(\mathbf{k}^3)$ de matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculez une base adaptée du sous-module de $\mathbf{k}[X]^3$ engendré par les colonnes de $M - X\,\mathrm{Id}$. En déduire les facteurs invariants de u ainsi qu'une base dans laquelle la matrice de u est sous forme canonique rationnelle.

6. Montrez que u est diagonalisable et calculez une base de diagonalisation.