SVE201 groupe 2A4 2007-2008

Corrigé du DS du 20 février 2008

$\boxed{1}$ Par la méthode du pivot de Gauss :

$$S \left\{ \begin{array}{rrrcll} x & +2y & +2z & = & 0 & (1) \\ 2x & +y & +2z & = & 1 & (2) \\ 2x & +2y & +z & = & 2 & (3) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrrcll} x & +2y & +2z & = & 0 & (1) \\ & -3y & -2z & = & 1 & (2)-2(1) \\ & -2y & -3z & = & 2 & (3)-2(1) \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrcll} x & +2y & +2z & = & 0 & (1) \\ & y & +\frac{2}{3}z & = & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}(2) \\ & y & +\frac{3}{2}z & = & -1 & -\frac{1}{2}(3) \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrcll} x & +2y & +2z & = & 0 & (1) \\ & y & +\frac{2}{3}z & = & -\frac{1}{3} & (2) \\ & & +\frac{5}{6}z & = & -\frac{2}{3} & (3)-(2) \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcll} x & = & -2y-2z & = \frac{6}{5} \\ y & = & -\frac{2}{3}z-\frac{1}{3} & = \frac{1}{5} \\ z & = & \frac{-4}{5} & \end{array} \right.$$

Le système S a une solution unique qui est $(\frac{6}{5}, \frac{1}{5}, \frac{-4}{5})$.

$\boxed{2}$

$$(S) \left\{ \begin{array}{lll} x+(m+1)y & =1 & (1) \\ mx+(m+4)y & =-2 & (2) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lll} x+(m+1)y & =1 & (1) \\ ((m+4)-m(m+1))y & =-2-m & (2)-m(1) \end{array} \right.$$

Le coefficient de y est $(m+4)-m(m+1) = 4-m^2 = (2-m)(2+m)$. Pour calculer y on veut diviser par ce coefficient, on doit donc discuter les cas $m \neq \pm 2$ et $m=2$, $m=-2$.

(1) Si $m \neq \pm 2$:

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{ll} x & = 1-(m+1)y = 1-\frac{m+1}{(m-2)} = \frac{-3}{(m-2)} \\ y & = \frac{-(m+2)}{(2-m)(2+m)} = \frac{1}{(m-2)} \end{array} \right.$$

Le système a une solution unique qui est $(\frac{-3}{m-2}, \frac{1}{m-2})$.

(2) Si $m=2$:

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{ll} x+3y & =1 \\ 0.y & =-4 \end{array} \right.$$

Le système n'a pas de solutions puisque l'équation $0.y=-4$ est impossible.

(3) Si $m=-2$:

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{ll} x-y & =1 \\ 0.y & =0 \end{array} \right.$$

Le système a une infinité de solutions qui sont $\{(x,y) : x-y=1, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$. Ce sont les coordonées des points de la droite d'équation $x-y=1$.

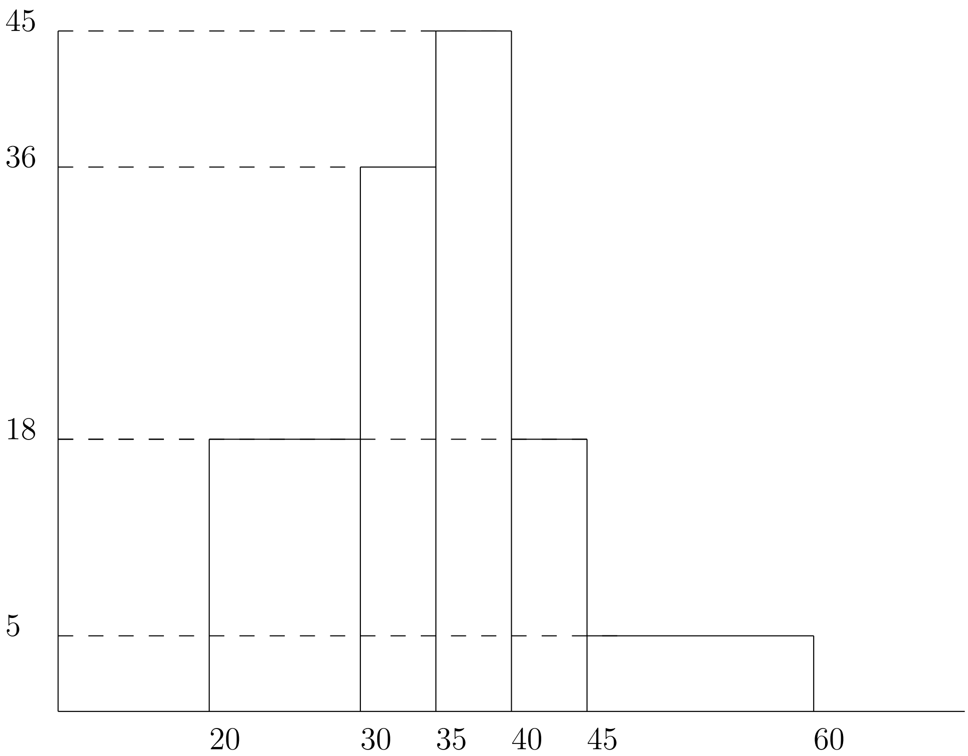
En résumé, on a, pour l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (S) :

$$\begin{cases} m \neq 2, m \neq -2 & \mathcal{S} = \{(\frac{-3}{m-2}, \frac{1}{m-2})\} & \text{solution unique} \\ m = -2 & \mathcal{S} = \{(x,y) : x - y = 1, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} & \text{infinité de solutions} \\ m = 2 & \mathcal{S} = \emptyset & \text{pas de solutions} \end{cases}$$

$\boxed{3}$

1. On calcule
$$A^2 = \begin{pmatrix} 18 & 9 & 9 \\ 9 & 18 & 9 \\ 9 & 9 & 18 \end{pmatrix}$$
puis
$$A^2 - 9A + 18I = \begin{pmatrix} 18 & 9 & 9 \\ 9 & 18 & 9 \\ 9 & 9 & 18 \end{pmatrix} - 9 \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + 18 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$
2. On a $A^2 - 9A = -18I$ donc $A(A - 9I) = -18I$ soit $A\big(\frac{(A-9I)}{-18}\big) = I$. **Erreur fréquente : quand on met en facteur A dans $A^2 - 9A$, on ne trouve pas $A(A - 9)$ mais $A(A - 9I)$ où I est la matrice identité.. en effet elle vérifie $AI = IA = A$.**
Donc A est inversible d'inverse $\frac{1}{18}(9I - A)$. On calcule
$$\frac{1}{18}(9I - A) = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$\boxed{4}$



1.

2. La moyenne m se calcule avec la formule
$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i\overline{\xi_i}$$
où n est l'effectif total, ici $n = 36 + 36 + 45 + 18 + 15 = 150$, et $\overline{\xi_i} = \frac{1}{2}(\xi_{i-1} + \xi_i)$ est le milieu des classes.
$$m = \frac{1}{150}(36(25) + 36(32.5) + 45(37.5) + 18(42.5) + 15(17.5)) \approx 35.4$$
L'écart-type σ se calcule avec la formule
$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i(m - \overline{\xi_i})^2$$
soit
$$\sigma^2 = \frac{1}{150}(36(25-35.4)^2 + 36(32.5-35.4)^2 + 45(37.5-35.4)^2 + 18(42.5-35.4)^2 + 15(17.5-35.4)^2) \approx 64.59$$
et $\sigma \approx \sqrt{64.59} \approx 8.036$

3. On calcule les effectifs cumulés. $N_1 = 36$, $N_2 = 72$, $N_3 = 117$. Comme $N_2 < 150/2$ et $N_3 > 150/2$, on sait que $q_2 \in [35, 40[$. On a la formule
$$\frac{q_2 - \xi_2}{\xi_3 - \xi_2} = \frac{n/2 - N_2}{N_3 - N_2}$$
soit
$$q_2 = \xi_2 + (\xi_3 - \xi_2)(\frac{n/2 - N_2}{N_3 - N_2}) = 35 + (40-35)(\frac{75-72}{45}) \approx 35.33$$

$\boxed{5}$

1. Soit X la variable aléatoire mesurant la taille des hommes de ce pays. D'après le texte, X suit une loi normale de moyenne 173 cm et d'écart-type 6 cm. Soit $Y = \frac{X-173}{6}$. On sait que Y suit une loi normale centrée réduite. On a
$$X \geq 180 \Longleftrightarrow Y \geq \frac{180-173}{6} \approx 1.16$$
donc
$$P(X \geq 180) = P(Y \geq 1.16) = 1 - P(Y < 1.16).$$
D'après la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, $P(Y < 1.16) = 0.877$ donc $P(X \geq 180) = 1 - 0.877 = 0.123$.

2. On cherche x tel que $P(X \geq x) = 0.25$. On se ramène à Y qui est centrée réduite :
$$P(X \geq x) = 0.25 \Longleftrightarrow P(Y \geq \frac{x-173}{6}) = 0.25$$
De plus $P(Y \geq \frac{x-173}{6}) = 0.25$ équivaut à $P(|Y| \geq \frac{x-173}{6}) = 0.5$. On trouve dans la table de dépassement de l'écart absolu de la loi normale centrée réduite $\frac{x-173}{6} = 0.674$ soit $x = 173 + 6(0.674) \approx 177$.

3. On cherche y tel que $P(|X - 173| \leq y) = 0.95$. Cela équivaut à $P(|X - 173| > y) = 0.05$ soit $P(|\frac{X-173}{6}| > \frac{y}{6}) = 0.05$. On trouve dans la table de dépassement de l'écart absolu de la loi normale centrée réduite $\frac{y}{6} = 1.96$ soit $y \approx 11.76$.