SVE201 groupe 2A2 2007-2008

Corrigé du DS du 22 février 2008

$\boxed{1}$

$$(S)\left\{\begin{array}{lll} mx+y & =0 & (1)\\ 2mx+(m+1)y & =m & (2)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} mx+y & =0 & (1)\\ (m-1)y & =m & (2)-2(1)\end{array}\right.$$

Pour calculer y on veut diviser par $(m-1)$. On doit donc discuter les cas $m=1$ et $m\neq 1$.

(1) Si $m \neq 1$:

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ll} mx & =-y=\frac{-m}{m-1}\\ y & =\frac{m}{m-1}\end{array}\right.$$

Pour calculer x on veut diviser par m. On doit donc discuter les cas $m=0$ et $m\neq 0$.

(1.1) Si $m\neq 0$:

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ll} x & =\frac{-1}{m-1}\\ y & =\frac{m}{m-1}\end{array}\right.$$

Le système a une solution unique qui est $(\frac{-1}{m-1},\frac{m}{m-1})$.

(1.2) Si $m=0$:

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ll} 0.x & =0\\ y & =0\end{array}\right.$$

Le système a une infinité de solutions qui sont $\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}$. Ce sont les coordonées des points de la droite d'équation $y=0$.

(2) Si $m=1$:

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ll} x+y & =0\\ 0.y & =1\end{array}\right.$$

Le système n'a pas de solutions puisque l'équation $0.y=1$ est impossible.

En résumé, on a, pour l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (S) :

$$\left\{\begin{array}{lll} m\neq 1, m\neq 0 & \mathcal{S}=\{(\frac{-1}{m-1},\frac{m}{m-1})\} & \text{solution unique}\\ m=0 & \mathcal{S}=\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\} & \text{infinité de solutions}\\ m=1 & \mathcal{S}=\emptyset & \text{pas de solutions}\end{array}\right.$$

$\boxed{2}$

1. On calcule

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

puis

$$A^2+A-2I=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}=0.$$

2. On a $A^2+A=2I$ donc $A(A+I)=2I$ soit $A\frac{(A+I)}{2}=I$. **Erreur fréquente : quand on met en facteur A dans A^2+A, on ne trouve pas $A(A+1)$ mais $A(A+I)$ où I est la matrice identité.. en effet elle vérifie $AI=IA=A$.**
Donc A est inversible d'inverse $\frac{(A+I)}{2}$. On calcule

$$\frac{(A+I)}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$

3. (a)
$$S\Longleftrightarrow A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\\8\end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{aligned}S\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}&=A^{-1}\begin{pmatrix}4\\-2\\8\end{pmatrix}\\ \Longleftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-2\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Le système S a une solution unique qui est $(-3,5,1)$.

(c) Par la méthode du pivot de Gauss :

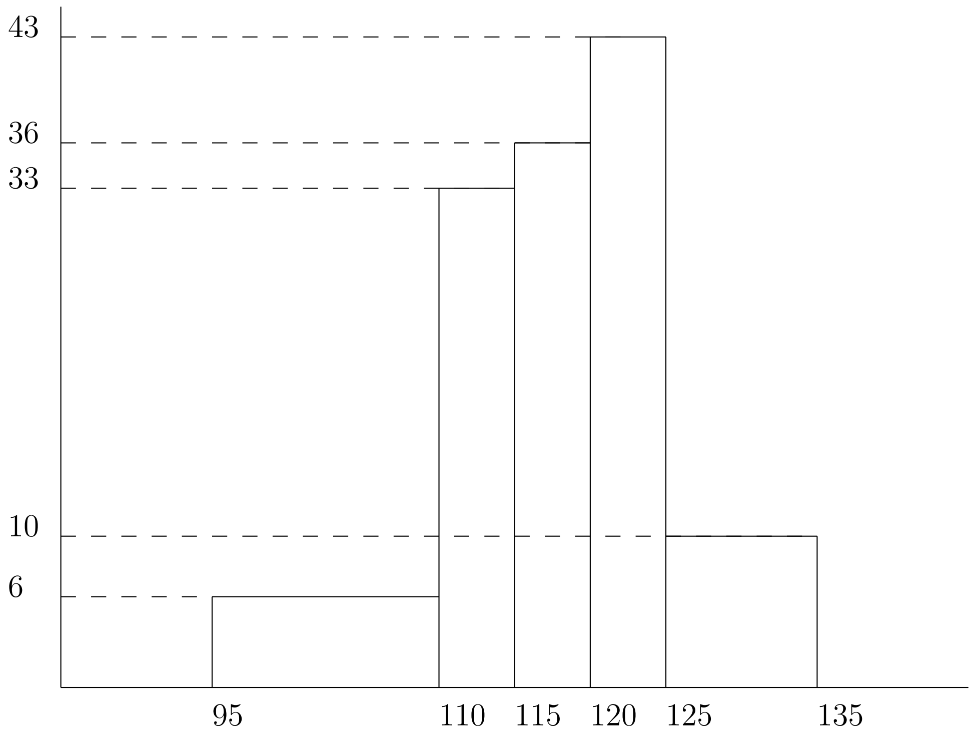
$$S\left\{\begin{array}{rrrcrl} & y & -z & = & 4 & (1)\\ x & & +z & = & -2 & (2)\\ -x & +y & & = & 8 & (3)\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & & +z & = & -2 & (2)\\ & y & -z & = & 4 & (1)\\ -x & +y & & = & 8 & (3)\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & & +z & = & -2 & (1)\\ & y & -z & = & 4 & (2)\\ & y & +z & = & 6 & (3)+(1)\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & & +z & = & -2 & (1)\\ & y & -z & = & 4 & (2)\\ & & 2z & = & 2 & (3)-(2)\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll} x & = & -z-2 & =-3\\ y & = & z+4 & =5\\ z & = & 1 & \end{array}\right.$$

$\boxed{3}$



1.
2. La moyenne m se calcule avec la formule

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i \overline{\xi_i}$$

où n est l'effectif total, ici $n = 18 + 33 + 36 + 43 + 20 = 150$, et $\overline{\xi_i} = \frac{1}{2}(\xi_{i-1} + \xi_i)$ est le milieu des classes.

$$m = \frac{1}{150}(18(102.5) + 33(112.5) + 36(117.5) + 43(122.5) + 20(130) \approx 117.7$$

L'écart-type σ se calcule avec la formule

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i (m - \overline{\xi_i})^2$$

soit

$$\sigma^2 = \frac{1}{150}(18(102.5 - 117.7)^2 + 33(112.5 - 117.7)^2 + 36(117.5 - 117.7)^2 + 43(122.5 - 117.7)^2 + 20(130 - 117.7)^2) \approx 60.46$$

et $\sigma \approx \sqrt{60.46} \approx 7.77$.

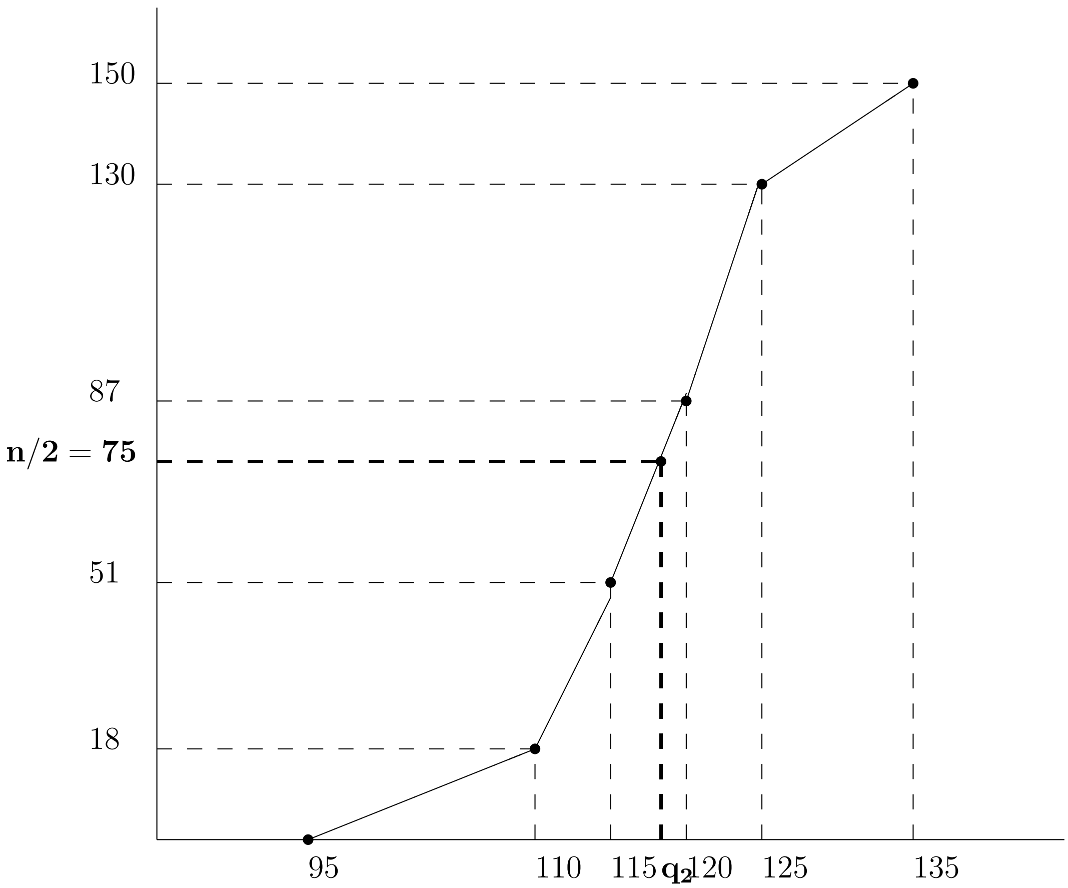
3. On calcule les effectifs cumulés. $N_1 = 18$, $N_2 = 18 + 33 = 51$, $N_3 = 18 + 33 + 36 = 87$. Comme $N_2 < 150/2$ et $N_3 > 150/2$, on sait que $q_2 \in [115, 120[$. On a la formule

$$\frac{q_2 - \xi_2}{\xi_3 - \xi_2} = \frac{n/2 - N_2}{N_3 - N_2}$$

soit

$$q_2 = \xi_2 + (\xi_3 - \xi_2)\Big(\frac{n/2 - N_2}{N_3 - N_2}\Big)$$

4.



$\boxed{4}$

1. $P(1.1 \leq X \leq 2.2) = P(X \leq 2.2) - P(X \leq 1.1) = 0.9861 - 0.8643 = 0.1218$ d'après la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
2. $P(X > x) = 0.3$ équivaut à $P(|X| > x) = 0.6$. On trouve dans la table de dépassement de l'écart absolu de la loi normale centrée réduite $x = 0.524$.
3. On pose $X = \frac{Y-2}{5}$ qui suit la loi normale centrée réduite. On a

$$Y > y \iff X > \frac{y-2}{5}$$

donc

$$P(Y > y) = 0.3 \iff P(X > \frac{y-2}{5}) = 0.3$$

D'après la question précédente, puisque X est centrée réduite, $\frac{y-2}{5} = 0.524$ soit $y = 2 + 5(0.524) \approx 4.62$.