# CPBX S2 Bio
# Espace vectoriel, sous-espace vectoriel

## 1 Espace vectoriel

C'est une notion abstraite, mais qui permettra de traiter de la même manière plein de problèmes qui se ramènent en fait à faire les mêmes calculs.

### 1.1 Définitions

Soit $E$ un ensemble muni de deux opérations :

- Une opération interne, l'addition (**donc on peut additionner deux éléments de $E$ et obtenir un élément de $E$**)
- Une opération externe, la multiplication par un réel (**donc on peut multiplier un élément de $E$ par un réel et obtenir un vecteur**)

$E$ muni de ces opérations est un **espace vectoriel sur** $\mathbb{R}$ si ces opérations vérifient :

1. $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in E^2, \vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ (commutativité de l'addition)
2. $\forall(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \in E^3, (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (associativité de l'addition)
3. L'addition admet un élément neutre $0_E$ (appelé **vecteur nul**, noté parfois $\vec{0}$) : $\forall\vec{u} \in E, \vec{u}+0_E = 0_E+\vec{u} = \vec{u}$
4. Tout vecteur admet un opposé : $\forall\vec{u} \in E$, il existe un vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u} = 0_E$. $\vec{v}$ est noté $-\vec{u}$.
5. $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in E^2, \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$,
    - $1\vec{u} = \vec{u}$
    - $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$
    - $(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$
    - $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$

Autres règles de calcul qui s'en déduisent :

- $\forall\vec{u} \in E, (-1)\vec{u} = -\vec{u}$
- On peut définir aussi une soustraction : $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in E^2, \vec{u}-\vec{v} = \vec{u}+(-\vec{v})$
- Alors $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in E^2$, $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha(\vec{u}-\vec{v}) = \alpha\vec{u}-\alpha\vec{v}$ et $(\alpha-\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u}-\beta\vec{v}$

Les éléments de $E$ sont appelé **vecteurs**.

## 1.2 Exemples d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

- $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ où $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des $n$ uplets de réels $(x_1, \ldots, x_n)$.
- L'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des applications d'un ensemble $A$ dans $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des polynômes.

On travaillera donc directement avec des ensembles de vecteurs, il n'y aura pas de "points". Si $(\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p})$ sont $p$ vecteurs de $E$, on appelle **combinaison linéaire** des vecteurs $(\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p})$ tout vecteur de la forme $\lambda_1\vec{u_1} + \lambda_2\vec{u_2} + \cdots + \lambda_p\vec{u_p}$, où $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ sont $p$ réels (qui peuvent être nuls !)

Propriété à avoir en tête :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u} \in E,\ \ \alpha\vec{u} = 0_E \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \vec{u} = 0_E$$

A priori, on ne s'intéresse pas à la multiplication de deux vecteurs entre eux. Parfois elle est possible (ensemble de fonctions), parfois non ($\mathbb{R}^2$).

# 2 Sous-espace vectoriel (SEV)

Les sous-espaces vectoriels seront la généralisation des droites et des plans de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

## 2.1 Définition

**Définition 1.** *Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $E$ est une partie $F$ non vide de $E$ stable par addition et multiplication par un réel : la somme de deux vecteurs de $F$ donne un vecteur de $F$ et la multiplication d'un vecteur de $F$ par un réel donne un vecteur de $F$.*

On peut remarquer que si $F$ est un sous-espace vectoriel, et si $\vec{u}$ est un vecteur de $F$, $0.\vec{u} = \vec{0}$ appartient à $F$.
Donc pour vérifier qu'une partie $F$ d'un espace vectoriel $E$ est un sous-espace vectoriel, on montre les trois propriétés :

- $\vec{0} \in F$
- $\forall \vec{u} \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda\vec{u} \in F$
- $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in F^2, \vec{u} + \vec{v} \in F$

Remarque : si $\vec{0} \notin G$, $G$ n'est pas un SEV...

Exemples : les droites de $\mathbb{R}^2$ passant par l'origine, les plans et les droites de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine...

De manière générale, l'ensemble des solutions d'un système linéaire **homogène** d'inconnues $(x_1, \ldots, x_n)$ sera un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

**Proposition 2.** *Si $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $E$, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.*

Démonstration

En règle générale, si $F$ et $G$ sont 2 SEV, ce n'est pas le cas de $F \cup G$.

## 2.2 Sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs : $Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$

**Définition 3.** *Si $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ sont $p$ vecteurs d'un espace vectoriel $E$,* **sous-espace vectoriel engendré par** *$(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ et on note $Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles de $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$.*

$$Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}) = \{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{u_i}, \lambda_i \in \mathbb{R}^p\}$$

**Exemples, remarques et propriétés**

- Si $\vec{u} \in E$, $Vect(\vec{u}) = \lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}$ se note aussi $\mathbb{R}\vec{u}$. On l'appellera **droite vectorielle**.
- Dans l'ensemble des fonctions, $Vect\{1, X, X^2\}$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
- $Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}, \vec{0}) = Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$.
- On ne change pas le sous-espace engendré en ajoutant une combinaison linéaire à la famille de vecteurs : c'est-à-dire :
  $Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}, \sum_{i=1}^{p} \mu_i \vec{u_i}) = Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$.