CPBX S2 Bio
Partie génératrice, partie libre, base

1 Partie génératrice

Définition 1. *p vecteurs $(\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p})$ éléments d'un SEV F de E forment une* **partie génératrice** *de F si tout élément de F peut s'écrire comme combinaison linéaire de $(\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p})$. Autrement dit, on a*

$$F = Vect(\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p})$$

.

Parfois on ne précise pas le SEV F, c'est qu'il s'agit de E tout entier.

On dit que E est **de type fini** si E admet une partie génératrice finie.
L'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas de type fini.
Tous les espaces vectoriels qu'on regardera par la suite seront de type fini.

Proposition 2. *Toute famille de vecteurs d'un SEV F qui contient une famille génératrice de F est une famille génératrice de F.*

Demonstration :

2 Partie libre

C'est la généralisation du concept de "non colinéaire" ou "non coplanaire".

Définition 3. *p vecteurs $(\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p})$ de E forment une* **partie libre** *de E (on dit aussi "***sont linéairement indépendants***") si*

$$\lambda_1\vec{u_1} + \ldots + \lambda_p\vec{u_p} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$$

Dit autrement, la seule combinaison linéaire de $(\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p})$ qui soit nulle est celle qui correspond au choix $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$

Au contraire, s'il existe p réels NON TOUS NULS tels que $\lambda_1\vec{u_1} + \ldots + \lambda_p\vec{u_p} = \vec{0}$, on dit que la famille $(\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p})$ est **liée** *(ou encore. que les vecteurs sont "***linéairement dépendants***").*

Remarques :

- On a toujours $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0 \Rightarrow \lambda_1\vec{u_1} + \ldots + \lambda_p\vec{u_p} = \vec{0}$
- Si $p = 1$, la famille $(\vec{u_1})$ est libre si et seulement si $\vec{u_1} \neq \vec{0}$.

Proposition 4. *Soit $p \geq 2$. La famille $(\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p})$ est* **liée** *si et seulement si l'un (au moins) des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres.*

Demonstration

Remarques :

- Si $p = 2$, la famille $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ est libre si et seulement si $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires.
- Dans $\mathbb{R}^3$, si $p = 3$, la famille $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ est libre si et seulement si $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$ ne sont pas coplanaires.

Proposition 5.

- *Toute famille incluse dans une partie libre est libre.*
- *Toute famille contenant une partie liée est liée.*
- *Toute famille contenant $\vec{0}$ est liée.*

Demonstration.

Résultat utile :

Proposition 6. *Si $(\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p})$ est libre et si $(\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p}, \vec{u_{p+1}})$ est liée, alors u_{p+1} est CL de $(\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p})$.*

3 Base

Définition 7. *Une famille* $(\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p})$ *d'éléments d'un SEV* F *de* E *est une* **base** *de* F *si c'est une famille libre et génératrice de* F*.*

Exemples :

- $((1,0),(0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. $((1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,1))$ est une base de $\mathbb{R}^n$: c'est la **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.
- $(1, X, X^2)$ est une base de l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
- On admettra que $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base de l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n (appelée **base canonique**).

Proposition 8. *p vecteurs* $(\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p})$ *éléments d'un SEV* F *de* E *forment une* **base** *de* F *si et seulement si tout vecteur* $\vec{v}$ *de* F *peut s'écrire* **de manière unique** *comme combinaison linéaire de* $(\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p})$*.*
L'unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *tel que* $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u_i}$ *est alors appelé* **coordonnées de** $\vec{v}$ **dans la base** $(\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p})$.

Démonstration

3.1 Obtention de bases

A : A partir d'une partie génératrice

Proposition 9. *Soit E un espace vectoriel de type fini différent de $\{vec0\}$ et G une famille génératrice finie de E.*
Alors il existe une base B de E contenue dans G.

Démonstration :

On pose $G = (\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p})$. Si G est libre, c'est une base et on a terminé. Sinon, c'est une famille liée, donc l'un des vecteurs $\vec{v_i}$ est CL des autres. Donc $E = Vect(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}) = Vect((\vec{v_1}, \dots, \hat{v_i}, \dots, \vec{v_p})$ où $\hat{v_i}$ signifie qu'on a enlevé le vecteur v_i. La famille G privée de v_i est donc génératrice. On a donc obtenu une famille génératrice strictement plus petite que celle de départ.
On continue le procédé : on ne peut pas arriver à une famille génératrice vide, donc c'est qu'on s'arrête avant, et donc qu'on a trouvé une base.

B. A partir d'une famille libre : Thèorème de la base incomplète

Proposition 10. *Soit E un espace vectoriel de type fini, $B = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ une base de E et $L = (\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ une famille libre de E. Alors on peut rajouter à la famille $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ 0 ou des vecteurs de la base B pour obtenir une base de E de la forme $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}, (\vec{e_j})_{j \in J})$*

Démonstration :

Si $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ est génératrice, c'est une base et il n'y a rien à faire.
Sinon :

- Si $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}, \vec{e_1})$ est libre : on pose $L_1 = (\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}, \vec{e_1})$ et on a obtenu une nouvelle famille libre plus grosse.
- Si $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}, \vec{e_1})$ n'est pas libre, cela signifie que $\vec{e_1}$ est CL de $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$. On a donc $Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}, \vec{e_1}) = Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$.. On pose alors $L_1 = (\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$

Dans les deux cas, on a obtenu une famille libre L_1 telle que $Vect(L_1) = Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}, \vec{e_1})$.
Si L_1 est génératrice, c'est une base et on a terminé.

Sinon : on recommence avec $\vec{e_2}$:

- Si $(L_1, \vec{e_2})$ est libre : on pose $L_2 = (L_1, \vec{e_2})$ et on a obtenu une nouvelle famille libre plus grosse.
- Si $(L_1, \vec{e_2})$ n'est pas libre, cela signifie que $\vec{e_2}$ est CL de la famille L_1. On a donc $Vect(L_1, \vec{e_2}) = Vect(L_1)$.. On pose alors $L_2 = L_1$

On a après cette étape une famille libre L_2 telle que $Vect(L_2) = Vect(L_1, \vec{e_2}) = Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
On recommence, en obtenant une famille libre à chaque fois.
Si à un moment on a obtenu une famille génératrice, c'est terminé. Sinon, on a à la fin $Vect(L_n) = Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}) = E$. Donc L_n est libre et génératrice.

4 Dimension

On peut démontrer le résultat suivant, qui sert de définition :

Proposition 11. *Soit E un espace vectoriel de type fini. Alors toutes les bases de E possèdent le même nombre de vecteurs : on l'appelle* **dimension** *de E.*

Ainsi, $dim(\mathbb{R}^2) = 2$, et $dim(\mathbb{R}^n) = n$.
La dimension de l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n est $n + 1$.
Par convention, $dim(\{\vec{0}\} = 0$
La proposition ci-dessous est très utile :

Proposition 12. *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors :*

- *Toute partie libre a un nombre d'éléments inférieur ou égal à n.*
- *Dit autrement, toute partie de strictement plus de n éléments est liée.*
- *Toute partie génératrice a au moins n éléments.*
- *Dit autrement, toute partie de strictement moins de n éléments N'EST PAS génératrice.*
- *Toute partie libre de E ayant exactement n éléments est une base de E.*

On dit parfois qu'une base est une partie libre maximale, ou une partie génératrice minimale.