CPBX S2 Bio
Systèmes linéaires

1 Système linéaire

Définition 1. *Un* **système linéaire** *à n équations et p inconnues $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est la donnée de n équations qui s'écrivent :*

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p &= b_n
\end{aligned}$$

Où les a_{ij} et les b_i sont des réels (qui peuvent être nuls). Si certains de ces réels restent sous forme de lettre, sans valeur spécifiée, on dit que le système est un système **avec paramètre***.*
Une **solution** *du système est un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ pour lequel toutes les égalités sont vérifiées.*
Résoudre *le système c'est trouver* l'ensemble *des solutions du système. Ca peut être l'ensemble vide $\emptyset$.*
Si tous les coefficients du second membre $(b_1, \ldots, b_n)$ sont nuls, le système est **homogène***.*

TOUJOURS ECRIRE LES INCONNUES DANS LE MEME ORDRE SUR TOUTES LES LIGNES.

Un système linéaire aura toujours 0 solution ou 1 solution ou une infinité de solutions, jamais autre chose.
Le p-uplet $(0, 0, \ldots, 0)$ est TOUJOURS solution d'un système homogène. Donc un système homogène a 1 solution unique ou une infinité de solutions.
Exemples

2 Système linéaire échelonné

Définition 2. *Un* **système linéaire échelonné** *est un système tel que, si sur une ligne les coefficients de* $(x_1, \dots, x_k)$ *sont nuls, alors les coefficients de* $(x_1, \dots, x_{k+1})$ *seront nuls sur toutes les lignes suivantes. Autrement dit, si pour chaque ligne on considère le premier coefficient a non nul, l'indice de ce coefficient sera strictement croissant. Le système aura donc une forme "en escalier".*

On va voir qu'ils seront faciles à résoudre.

Exemple de forme échelonnée :

$$\begin{array}{lllll}
a_{11}x_1+ & a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & +\dots+a_{1p}x_p & & =b_1 \\
 & a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & +\dots+a_{2p}x_p & & =b_2 \\
 & & a_{34}x_4+\dots+a_{3p}x_p & & =b_3 \\
 & & \vdots & & \\
 & & & a_{rr}x_r+\dots+a_{rp}x_p & =b_r \\
 & & & 0 & =b_{r+1} \\
 & & & & \vdots \\
 & & & 0 & =b_n
\end{array}$$

Les inconnues correspondant aux "coins" de l'escalier sont les **variables principales**. Les autres sont appelées **variables secondaires**.
Dans l'exemple, x_1, x_2 et x_4 sont principales x_3 est secondaire.

On verra plus tard qu'il est important d'autoriser des ligne de la forme $0 = b_i$. Concrètement, si on a $0 = 0$ on peut enlever la ligne, si on a $5 = 0$ la solution est $\emptyset$... et le système est résolu.

On appellera aussi système **échelonné** un système qui est échelonné en changeant l'ordre des inconnues.
Exemples

3 Résolution d'un système linéaire échelonné

On commence par se débarasser des lignes de la forme $0 = b_i$. Eventuellement la solution est $\emptyset$ et c'est fini.
Sinon : s'il n'y a pas de variable secondaire, il y a *une solution unique* qu'on obtient "en remontant" en partant de la dernière équation.
S'il y a des variables secondaires. on exprime toutes les variables pivots en fonction des variables secondaires (en les faisant passer dans le membre de droite de l'équation), en remontant. Il y a alors une infinité de solutions.

Résoudre le système, dans ce cas, c'est donc écrire l'ensemble des solutions sous une forme paramétrique.

Exemples.

4 Résolution d'un système quelconque

Pour un système à 2 équations et 2 inconnues : méthode par substitution autorisée. Pas pour les autres (car long et source d'erreurs).

La méthode consistera à se ramener à un système échelonné équivalent.

Définition 3. *Deux systèmes sont* **équivalents** *s'ils ont le même ensemble de solutions.*

(donc il y a un signe $\Leftrightarrow$ entre les équations qui le constituent.)

Proposition 4. *Les opérations ci-dessous, appelées opérations élémentaires transforment un système en un système équivalent. Ce seront les seules autorisées.*

- *Multiplier une ligne par un réel* **non nul**
- *Remplacer la ligne L_i par une ligne de la forme $L_i + \alpha L_j$ où α est un réel quelconque et L_j est une autre ligne.*
- *Echanger deux lignes.*

Ces opérations sont les ingrédients de la **Méthode du pivot de Gauss** :

1. On choisit une ligne (qu'on met en premier), et une inconnue (qu'on mettra en premier, et qu'on appellera variable PIVOT), de telle sorte que le coefficient de cette inconnue dans cette ligne (appelé PIVOT) soit le plus "simple" possible (MAIS PAS NUL !). (L'idéal pour les calculs c'est 1). ON NE TOUCHERA PLUS CETTE LIGNE.
2. On se sert de cette ligne pour éliminer la variable pivot dans toutes les autres lignes (par des opérations du type $L_i + \alpha L_1$)
3. On a maintenant la première équation, et un sous-système qui ne comporte plus la variable pivot. On recommence avec ce sous-système et une nouvelle variable pivot.
4. A chaque fois, on a donc une inconnue qui disparaît dans une ligne et toutes les suivantes. On s'arrête quand le système est échelonné.

Exemples

5 Résolution d'un système avec paramètre(s)

Cela veut dire trouver en fonction du paramètre quelles sont les solutions du système. L'ensemble de solutions, et le nombre de solutions, peut dépendre du paramètre.
La méthode est la même que précédemment. Mais il faut faire attention à ce que les opérations soient autorisées, et par exemple à ne pas multiplier une ligne par 0, ou à ne pas diviser par 0.
Certaines valeurs du paramètre peuvent être à examiner à part.

Exemples