Année universitaire 2015-2016
Licence 1 de mathématiques
Test sur les nombres réels et complexes

Exercice 1
(3 points)
Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ solutions de

$$(8 - 6i) = (a + ib)^2 \tag{1}$$

Solution
On observe que $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$. En identifiant les parties réelles et imaginaires des deux membres de (1) on observe que

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = & 8 \\ 2ab & = & -6 \end{cases}$$

On trouve alors deux couples de solutions dites évidentes : $a = -3$ et $b = 1$ d'une part et $a = 3$ et $b = -1$ d'autre part.

Remarques :

— On pouvait aussi utiliser la valeur du module, en effet $|8 - 6i| = 10$ et donc $|a + ib|^2 = 10$ ce qui implique que $a^2 + b^2 = 10$. Si on utilise cette information conjointement avec le fait que $a^2 - b^2 = 8$, on en déduit que $a^2 = 9$ et $b^2 = 1$. On utilise ensuite le fait que $ab = -3$ pour déterminer l'ensemble des solutions.

Exercice 2
(5 points)
Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$z^2 - (1 + 3i)z = 4 - 3i \tag{2}$$

On cherche à résoudre une équation de la forme $P(z) = 0$ où P est le polynome de degré 2 défini de la manière suivante : $P(z) = z^2 - (1 + 3i)z - 4 + 3i$.
On calcule alors le discriminant Δ de P qui vaut $\Delta = 8 - 6i$. Les solutions z_1 et z_2 de l'équation (2) sont donc de la forme

$$z_1 = \frac{-b + \delta_1}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b + \delta_2}{2a}$$

où $\delta_1 = -3+i$ et $\delta_2 = 3-i$ d'après l'exercice précédent, avec $a = 1$ et $b = -1-3i$.
Ce qui donne $z_1 = -1 + 2i$ et $z_2 = 2 + i$.

Exercice 3
(5 points) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(z + 4)^6 = 1 + i \tag{3}$$

On pose d'abord $Z = z + 4 = re^{i\theta}$ ce qui implique que $Z^6 = r^6 e^{6i\Theta}$. On observe que $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$. En identifiant les modules et les arguments des deux membres de l'égalité (3) on observe que

$$\begin{cases} r^6 &= 2^{\frac{1}{2}} \\ 6\theta &= \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ pour } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

et ainsi

$$\begin{cases} r &= 2^{\frac{1}{12}} \\ \theta &= \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{3} \text{ pour } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation

$$Z^6 = 1 + i$$

est

$$\tilde{S} = \{2^{\frac{1}{12}}e^{i\frac{\pi}{24}},\, 2^{\frac{1}{12}}e^{i\frac{9\pi}{24}},\, 2^{\frac{1}{12}}e^{i\frac{17\pi}{24}},\, 2^{\frac{1}{12}}e^{i\frac{25\pi}{24}},\, 2^{\frac{1}{12}}e^{i\frac{33\pi}{24}},\, 2^{\frac{1}{12}}e^{i\frac{41\pi}{24}}\},$$

ces 6 solutions correspondant aux choix $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ qui fournissent 6 solutions distinctes. On en déduit que l'ensemble des solutions de (3) est

$$S = \{2^{\frac{1}{12}}e^{i\frac{\pi}{24}} - 4,\, 2^{\frac{1}{12}}e^{i\frac{9\pi}{24}} - 4,\, 2^{\frac{1}{12}}e^{i\frac{17\pi}{24}} - 4,\, 2^{\frac{1}{12}}e^{i\frac{25\pi}{24}} - 4,\, 2^{\frac{1}{12}}e^{i\frac{33\pi}{24}} - 4,\, 2^{\frac{1}{12}}e^{i\frac{41\pi}{24}} - 4\}$$

Exercice 4

(7 points)
Justifier que l'ensemble A suivant admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

$$A = \{z_n = \frac{1}{n^2},\, n \in \mathbb{N}^*\} \tag{4}$$

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant 1$ donc l'ensemble A est majoré par 1, il admet donc une borne supérieure et minoré par 0 donc il admet une borne inférieure.
Comme $1 = \frac{1}{1^2}$, $1 \in A$ et donc 1 est le plus grand élément de A. C'est donc la borne supérieure.
Montrons maintenant que 0 est la borne inférieure de A.
Comme nous savons que c'est un minorant, il suffit de montrer que c'est le plus grand minorant, c'est-à-dire de montrer que pour tout $m > 0$, m n'est pas un minorant de A.
Soit $m > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $mn^2 > 1$ (car $\mathbb{R}$ est archimédien) et donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n^2} < m$ et il existe donc $a = \frac{1}{n^2} \in A$ tel que $a < m$ et donc m n'est pas un minorant de A. Ce qui implique que 0 est bien la borne inférieure de A.

Remarques :

— Le fait que $\mathbb{N}^*$ n'est pas borné, n'implique rien sur le fait que A soit borné.

— L'ensemble A n'est égal à l'ensemble $]0,1]$ mais on a $A \subset]0,1]$. En effet, on peut noter que $\frac{1}{2} \notin A$.

— Il est possible de montrer que 0 est une borne inférieure en indiquant que $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$ mais il faut en plus indiquer que 0 est un minorant. En effet, la borne inférieure d'un ensemble A est le seul minorant qui est aussi une limite d'une suite d'éléments de A. Mais il le fait d'êyre une limite de suite ne suffit pas, il faut aussi indiquer que 0 est un minorant.

— Regarder la limite de la suite z_n quand n tend vers 0 n'a pas de sens, pas plus que la limite de z_n quand n tend vers $-\infty$. C'est la limite d'une suite indicée par $\mathbb{N}^*$, pas d'une fonction, la seule limite à considérer est celle en $+\infty$.