Analyse fonctionnelle TD 4

C. Dossal

Février 2012.

1 Applications linéaires continues

1. Calculer les normes des opérateurs :
   (a) $E = l_\infty$; S est l'opérateur de E dans E défini par : $(S(u))_0 = 0,\ (S(u))_{n+1} = u_n$.
   (b) $E = C([0,1]),\ \forall f \in E,\ Tf(x) = f(x)g(x),\ où\ g \in C([0,1])$.
   (c) $E = C([0,1]), \forall f \in E, l(f) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ où g est une fonction de $C([0,1]$ qui ne s'annule qu'au point $\frac{1}{2}$.
   (d) $E = l_2, \forall u \in l_2, l(u) = \sum_{n\geq 0} a_n u_n$, où (a_n) est une suite de l_2.
   (e) $E = l_1, \forall u \in l_1,\ l(u) = \sum_{n\geq 0} a_n u_n$ où (a_n) est une suite de l_∞.
2. Soit l_∞ l'espace des suites réelles bornées. Soit A l'opérateur de l_∞ dans l_∞ défini par : $A(u) = (u_1, \frac{u_2}{2}, ...\frac{u_n}{n}, ...)$.. Montrer que :
   (a) A est injectif, continu, $\|A\| = 1$, non surjectif.
   (b) A^{-1} non continu.
3. Soit H la fonction définie sur $[-1,1]$ $H(t) = \chi_{]0,1]}(t) - \chi_{[-1,0[}(t)$.
   On pose $E = \{f = u + \lambda H,\ u \in C([-1,+1];\mathbb{R}),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ et on munit E de la norme $\|.\|_1$.
   (a) Montrer que $u_n = \arctan nt$ est une suite E qui converge vers $\frac{\pi}{2}H$.
   (b) Soit $f \in E$; montrer qu'il existe λ unique tel que $f - \lambda H \in C([-1,+1];\mathbb{R})$.
   On pose $l(f) = \lambda$. Montrer que l est linéaire, mais pas continue.
4. Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_1$ et φ l'application de E dans E définie par :$\forall t \in [0,1],\ \varphi(u(t)) = tu(t)$.
   (a) Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\|\varphi\|_{\mathscr{L}(E,F)} = 1$.
   (b) Montrer qu'il n'existe pas de $u \neq 0$ tel que $\|\varphi(u)\|_1 = \|u\|_1$.
5. Soit $E = \{u = (u_n)/ \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| < +\infty\} = l_1$, muni de la norme $\|u\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$. Soit $a = (a_1, a_2, ...a_n, ...)$ une suite bornée non nulle. Pour $u \in E$, on note $l(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n a_n$.
   (a) Montrer que l est une forme linéaire continue.
   (b) Soit $H = Ker\ l,\ b_n = \frac{a_n}{n^2}$.
   Montrer que toute suite u de E peut s'écrire $u = \lambda b + v,\ \lambda \in \mathbb{R}, v \in H$ et que cette décomposition est unique.
   (c) Soit $W = \{u \in E / \sum_{n=1}^{+\infty} n|u_n| < +\infty\}$. Si $u \in E$, on pose : $u^{(k)} = (u_1, u_2, ...u_k, 0, ...0...)$.
   Montrer que $u^{(k)}$ converge vers u dans $(E, \|.\|_1)$. W est-il fermé dans E ?.
   (d) Soit $v \in E \backslash W$ et $E_1 = W \oplus \mathbb{R}v$. Pour $u = w + \lambda v$ dans E_1, on définit l par $l(u) = \lambda$. Montrer que l est une forme linéaire sur E_1.

- Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=N+1}^{+\infty} |v_k| \leqslant \frac{1}{n}$.
- Pour tout $n \in N$, on définit W^n la suite telle que $W_k^n = -nV_k$ si $k \leqslant N$ et $W_k^0 = 0$ sinon et on note $u^n = w^n + nv$.En utilisant les suites u^n, montrer que la forme linéaire l n'est pas continue.

6. Soit $E = C^1([0,1])$ et $F = C^0([0,1])$. E et F sont munis de la norme de la convergence uniforme. Montrer que l'application $\varphi : E \to F,\ f \longmapsto f'$ n'est pas continue.
7. Soit $E = L^1(\mathbb{R})$ et $H = \left\{ f \in E / \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x} f(x)dx \right\}$.
   Montrer que H est un hyperplan fermé et trouver un supplémentaire.
8. Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Pour $f \in E$, on pose $(Tf)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt,\ x \in [0,1]$.
   (a) Montrer que T est un opérateur linéaire continu dans E et que :
   $$\forall f \in E,$$
   (b) Calculer la norme de T^n. En déduire que la suite $I + T + T^2 + ...T^n$ est convergente dans $\mathscr{L}(E)$.
   (c) Résoudre $Tf = f + g$, où g est une fonction continue donnée.
9. Soit E un espace vectoriel normé et soit f une forme linéaire sur E non nulle.
   Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) f est continue.
   (b) $Ker(f)$ est fermé.
   (c) $Ker(f)$ n'est pas dense dans E.
   (d) f est bornée sur un voisinage de 0.
10. Soit $E = C([0,1];\mathbb{R})$ muni des normes $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$ et $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.
    Soit $u :\ E \to E$ définie par $u(f)(x) = \int_0^x t f(t)dt$.
    (a) Montrer que $u \in \mathscr{L}(E)$, lorsque est muni de la norme $\|.\|_1$ ou de la norme $\|.\|_\infty$.
    (b) Montrer que $u :\ (E,\ \|.\|_\infty) \to (E, \|.\|_1)$ est continue.
    (c) Déterminer la norme de u associée .
11. Soit $E = \{f \in C^1([0,1];\mathbb{R}) /\ f(0) = 0\}$ et $\|f\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(t)|$. On définit $u :\ E \to \mathbb{R}$ par $u(f) = \int_0^1 f(t)dt$.
    (a) Montrer que $\|.\|$ est une norme sur E.
    (b) Montrer que $u :\ (E,\ \|.\|) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue. Préciser sa norme.
    (c) Déterminer les éléments de f vérifiant : $|u(f)| = \|f\|/2$.
12. On munit $\mathbb{C}[X]$ de la norme $\left\|\sum_{i=0}^n a_i X^i\right\| = \max\limits_{0\leq i\leq n} |a_i|$. Soit $x_0 \in \mathbb{C}$. L'application $\varphi_{x_0} :\ \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi_{x_0}(P) = P(x_0)$ est-elle continue ?