Convergence uniforme et courbes de Bézier

C. Dossal

Décembre 2011

1 Polynômes de Bernstein et approximation uniforme.

Les polynômes de Bernstein sont définis de la manière suivante :

$$P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n. \tag{1}$$

1. Montrer que la famille $(P_{n,k})_{k\leqslant n}$ forme une base de l'espace vectoriel des polynômes de de degré inférieur ou égal à n.
2. Montrer que $P_{n,k} \geqslant 0$ sur $[0,1]$.
3. Montrer que $\sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) = 1$.
4. Montrer que $\sum_{k=0}^n kP_{n,k}(x) = nx$.
5. Montrer que $\sum_{k=0}^n k(k-1)P_{n,k}(x) = n(n-1)x$.
6. En utilisant le fait que $(nx-k)^2 = k(k-1)-(2nx-1)k+n^2x^2$ montrer que $\sum_{k=0}^n (nx-k)^2 P_{n,k}(x) = nx(1-x)$.
   Le polynôme de Bernstein d'ordre n associé à $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est égal à
   $$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x). \tag{2}$$
7. Calculer le polynôme de Bernstein associé à la fonction f définie par $f(x) = x^2$. Existe t-il n tel que $B_n(f) = f$?
8. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $\delta > 0$, on a
   $$f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{|x-k/n|\leqslant\delta} (f(x) - f(\frac{k}{n}))P_{n,k}(x) + \sum_{|x-k/n|>\delta} (f(x) - f(\frac{k}{n}))P_{n,k}(x). \tag{3}$$
   où les sommes sont faites sur les k variant de 0 à n.
9. En remarquant que toute fonction continue sur $[0,1]$ est uniformément continue et en utilisant les questions précédentes. Montrer que $B_n(f)$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
10. A l'aide la fonction suivante, afficher le nième polynôme de Bernstein associé à la fonction $f(x) = x^2$ pour différentes valeur de n. Essayez avec $f(x) = \sin(6\pi x)$ et $g(x) = \frac{1}{(10x-5)^2+1}$.

```
function B=Bernstein(f,N)
t=[0:1/(N-1):1];
B=0*t;
n=length(f)-1;
for k=0:n
   B=B+f(k+1)*t.^(k).*(1-t).^(n-k)*gamma(n+1)/(gamma(n-k+1)*gamma(k+1));
end
close all;
plot(t,B);
hold on;
t2=[0:n]/n;
plot(t2,f,'ro');
hold off;
```

2 Courbes de Bezier

1. A l'aide la fonction suivante, réaliser la courbe de Bézier associée aux points $x_0 = (0,0), x_1 = (0,1), x_2 = (1,1)$ et $x_3 = (1,0)$ sur 1000 points.

```
function C=CourbeBezier(A,N)
t=[0:1/(N-1):1];
C=zeros(2,N)
n=size(A,1)-1;
for k=0:n
   C(1,:)=B(1,:)+A(k+1,1)*t.^(k).*(1-t).^(n-k)*gamma(n+1)/(gamma(n-k+1)*gamma(k+1));
   C(2,:)=B(2,:)+A(k+1,2)*t.^(k).*(1-t).^(n-k)*gamma(n+1)/(gamma(n-k+1)*gamma(k+1));
end
close all;
plot(C(1,:),C(2,:));
hold on;
plot(A(:,1),A(:,2),'ro');
hold off;
```

Pour quelles valeurs de k la courbe de Bezier passe t-elle par x_k ?
Dans la suite on va essayer de tracer une courbe de Bézier qui approche en un point une courbe $\mathscr{C}^1$ donnée. On va pour cela calculer le développement de Taylor des deux paramétrisations (en abscisse et en ordonnée) de la courbe $\mathscr{C}^1$ pour le tronquer à l'ordre souhaité. On utilise ensuite l'algorithme de Casteljau pour déterminer les points de contrôle A_i de la courbe de Bézier.

2. On considère la paramétrisation du cercle $\mathscr{C}^1$ unité suivante :

$$x_1(t) = cos(2\pi t), \qquad y_1(t) = sin(2\pi t), \quad t \in [0,1]$$

3. Tracer $\mathscr{C}^1$.
4. Déterminer l'équation de la courbe paramétrique polynomiale de degré 4, notée $\mathscr{C}$ qui approche $\mathscr{C}^1$ au voisinage de $t=0$.
Si on note $x(t)$ (resp $y(t)$) la paramétisation de $\mathscr{C}$ selon les abscisses (resp les ordonnées), justifier qu'il existe 5 points $(A_i)_{0\leqslant i\leqslant 4}$ de $\mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n} P_{n,i}(t) A_i, \tag{4}$$

5. Réécrire la relation du cours

$$\begin{pmatrix} x^{(k)}(t) \\ y^{(k)}(t) \end{pmatrix} = D^k C_A(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} P_{n-k,i}(t) \Delta^k A_i, \tag{5}$$

dans ce cas.

6. Montrer qu'alors pour tout $k \leqslant 4$

$$D^k C_A(0) = \frac{4!}{(4-k)!} \Delta^k A_0.$$

On définit la suite de vecteurs $(E_i)_{i\leqslant 4}$ de $\mathbb{R}^2$ par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{4} E_i t^i.$$

Montrer que

$$\Delta^i A_0 = \frac{i!(4-i)!}{4!} E_i$$

7. Calculer les valeurs de $\Delta^k A_0$ pour la courbe $\mathscr{C}$, pour $k \in \{0,1,2,3,4\}$
8. Ecrire une fonction matlab

```
function A=DeltaP(DA)
```

qui prend en entrée un vecteur d'une cooordonnée (abscisse ou ordonnée) de $\Delta^k A_0$ et qui renvoie le vecteur des coordonnées correspondantes des points A_k associés.

9. Ecrire une fonction matlab PointsControle

```
P=PointsControle(x,y)
```

qui prend en entrée deux polynômes x et y de degré n et qui renvoie les $n+1$ points de contrôle associés.

10. Calculer les points de contrôle associés à $\mathscr{C}$.
Les valeurs que vous devez trouver sont les suivantes :

```
A =

    1.0000    1.0000   -2.2899   -8.8696   46.2002
         0    1.5708    3.1416   -5.6230  -35.0585
```

11. Tracer sur une même figure, le cercle unité $\mathscr{C}^1$, les points de contrôle et la courbe $\mathscr{C}$.