Université Bordeaux 1

Séries de Fourier.

1. Intégrale de Dirichlet :
   Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale $D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.
   (a) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que l'intégrale $\int_0^A \frac{\sin x}{x} dx$ admet une limite finie quand A tend vers $+\infty$.
   (b) $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}]$ on définit $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$. Montrer que g est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et prolongeable par continuité en 0.
   (c) On pose
   $$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx.$$
   Montrer que J_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Calculer $J_n - J_{n-1}$ et en déduire la valeur de J_n.
   (e) On pose
   $$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x} dx.$$
   Montrer que K_n est bien définie et que
   $$K_n = \int_0^{\frac{(n+1)\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt.$$
   (f) En déduire que $\lim_{n\to\infty} K_n = D$.
   (g) Montrer que $\lim_{n\to\infty} J_n - K_n = 0$ et conclure.
2. Phénomène de Gibbs :
   On considère la fonction f impaire 1−périodique définit sur $]0, 1/2[$ par $f(x) = 1 - 2x$.
   (a) Montrer que les sommes partielles de Fourier d'ordre impaires $S_{2p+1}(f)$ associées à f sont données par :
   $$S_{2p+1}(f)(t) = \sum_{k=1}^{p} \frac{2}{\pi(2k+1)} \sin(2(2k+1)\pi)$$
   (b) Déterminer la limite de cette somme quand p tend vers $+\infty$ quand $t \in \mathbb{R}$.
   (c) On note $t_p = \frac{1}{2(2p+1)}$. Exprimer la valeur de $S_{2p+1}(t_p)$.
   (d) En utilisant le fait que pour toute fonction f continue sur $[0, 1]$, $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(k/N) = \int_0^1 f(t)dt$, donner la limite de $S_{2p+1}(t_p)$ quand p tend vers $+\infty$.
   (e) On définit la suite $u_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.
   (f) Montrer $u_1 > \pi/2$.
   (g) En déduire que $\lim_{N\to\infty} \max_{t\in]0,1/2[} S_N(t) > \frac{\pi}{2}$.
   (h) Le fait que ce maximum ne tendent pas vers 1 mais vers une valeur strictement supérieur est appelé phéniomène de Gibbs. Un tel phénomène a lieu à chaque discontinuité d'un signal.
   (i) A l'aide des codes présentés dans la première feuille de TD, donner un exemple numérique de ce phénomène.

3. Inégalité de Wirtinger :
   Soit f une fonction 1-périodique de classe C^1 telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0$. Montrer que
$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt \leqslant \int_0^1 |f'(t)|^2 dt,$$
   et caractériser le cas d'égalité.
4. Décroissance de l'erreur d'approximation linéaire.
   (a) Soit f une fonction C^1 1-périodique. Etablir une relation entre $c_n(f)$ et $c_n(f')$.
   (b) Montrer que cette relation est encore vrai si f est continue et C^1 par morceaux.
   (c) En déduire une relation entre $c_n(f^k)$ et $c_n(f)$ si f est C^{k-1} et C^k par morceaux.
   (d) Montrer que si f est C^{k-1} et C^k par morceaux, qu'il existe C tel que $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, $|c_n(f)| \leqslant \frac{C}{n^k}$.
   (e) A l'aide d'une comparaison série-intégrale montrer qu'il existe α et M tels que
$$\|f - S_n(f)\|_2^2 \leqslant \frac{M}{n^\alpha}$$
   $S_n(f)$ est appelée approximation linéaire de f, c'est une projection orthogonale de f sur un sous espace vectoriel et $f - S_n(f)$ est appelée erreur d'approximation liénaire. Nous avons démontré que plus une fonction est régulière, plus l'erreur d'approximation linéaire tend vers 0 rapidement.
   (f) Réciproquement montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, si f est une fonction telle qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ et $\delta > 1$ tels que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|c_n(f)| \leqslant \frac{C}{n^{k+\delta}}$ alors f est de classe C^k.
   (g) Pour différents exemples de vecteurs, visaliser la décroisance du logarithme des codefficients de Fourier discret. On choisira des vecteurs obtenu par dsicrétisations de fonctions de différentes régularités. Peut on étbalir un lien entre la décroissance des ces coefficients et la régularité des fonctions sous-jacentes.
   (h) La fonction $t \mapsto t$ est C^∞, comment décroissent les coeffcients de Fourier discrets du vecteur suivant ?
   `t=[1:1024].`
   Expliquer le résultat.
5. Soit f la fonction 1-périodique éfinie sur $[-1/2, 1/2]$ par $f(x) = \frac{1}{4} - x^2$.
   (a) Montrer que $a_0(f) = \frac{1}{6}$ et que pour tout $n > 0$, $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi^2 n^2}$.
   (b) En déduire que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{4} - x^2 = \frac{1}{12} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi^2 n^2} \cos(2\pi n x).$$
   (c) En déduire les trois sommes suivantes :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$
6. Soit f la fonction $1 - \textit{priodique}$ définie sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ par $f(x) = e^{2\pi x}$.
   (a) Calculer les coefficients $c_n(f)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

(b) En déduire la valeur des sommes suivante :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

(c) Ecrire une fonction matlab calculant la valeur de la limite et des sommes partielles pour les deux sommes ci dessus.

7. Résolution d'équation différentielle.
On considère l'équation différentielle suivante :

$$y^{(2)} + 4\pi^2 y = |\cos(2\pi t)| \tag{1}$$

On cherche l'ensemble des solutions réelles de (1).
On rappelle que toutes les solutions de (1) sont définies sur $\mathbb{R}$, car $|\cos 2\pi t|$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension 2 et toute solution peut s'écrire $y(t) = a\cos(2\pi t) + b\sin(2\pi t) + y_0$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et où y_0 est une solution particulière. Comme la fonction $f : t \mapsto |\cos(2\pi t)|$ est une fonction 1-périodique continue et C^1 par morceaux on peut chercher une solution particulière sous la forme d'une fonction développable en série de Fourier.

(a) En calculant les coefficents de Fourier de f, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|\cos(2\pi t)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2-1} \cos(4\pi p t).$$

Si y est solution de (1), 1-périodique et de classe C^2 alors y et $y^{(2)} + y$ sont développables en séries de Fourier et $y^{(2)} + y = |cos(2\pi t)|$.

(b) Montrer que si y est une telle solution alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad 4\pi^2(1-p^2)b_p(y) = b_p(f) \text{ et } 4\pi^2(1-p^2)a_p(y) = a_p(f).$$

(c) En déduire que le développement en série de Fourier φ de y s'écrit nécessairement :

$$\varphi(t) = a\cos(2\pi t) + b\sin(2\pi t) + \frac{1}{2\pi^3} + \frac{1}{\pi^3} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(4p^2-1)^2} \cos(4\pi p t).$$

Pour montrer que $y = \varphi$ il reste à montrer que la fonction ϕ ainsi définie par une série trigonométrique est bien continue et deux fois dérivable.

(d) On note $u_p(t) = \frac{(-1)^p}{(4p^2-1)^2} \cos(4\pi t)$.
Justifier que $\forall p \in \mathbb{N}$, u_p est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

(e) Montrer que les séries

$$\sum_{p=1}^{\infty} \|u_p\|_\infty, \quad \sum_{p=1}^{\infty} \|u'_p\|_\infty, \quad \sum_{p=1}^{\infty} \|u_p^{(2)}\|_\infty \tag{2}$$

sont convergentes. On dit que les séries de fonctions $\sum_{p=1}^{\infty} u_p$, $\sum_{p=1}^{\infty} u'_p$, $\sum_{p=1}^{\infty} u_p^{(2)}$ sont normalement convergente. On en déduit que φ est deux fois dérivable et $y(t) = \varphi(t)$.
Ainsi l'ensemble des solutions de (1) est de la forme :

$$y(t) = a\cos(2\pi t) + b\sin(2\pi t) + \frac{1}{2\pi^3} + \frac{1}{\pi^3} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(4p^2-1)^2} \cos(4\pi p t).$$

où $(a,b) \in \mathbb{R}$.