Université Bordeaux

Exercices : Feuille 1

1) Parmi les ensembles suivants, déterminer ceux qui sont des espaces vectoriels :

1. $\{(x,y,z)$ tels que $x-y+2z=0\}$
2. $\{(x,y,z)$ tels que $3x-4y+z=2\}$
3. $\{(x,y,z)$ tels que $xy-z=0\}$
4. L'ensemble des suites complexes dont les termes d'indices impairs sont nuls.
5. L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \geqslant 3$, $u_n = 3u_{n-1}+4u_{n-2}-u_{n-3}$.
6. L'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont positifs ou nuls.
7. L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f(1)=0$.
8. L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0)=1$.
9. L'ensemble des fonctions f telles qu'il existe a et b réels tels que
$$f(t) = \begin{cases} a & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}[\\ b & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
10. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante :
$$y' + ty = \frac{1}{t^2+1}$$
11. L'ensemble des fonctions définies par
$$f(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$$
telles que $\lambda - 3\mu = 0$.
12. L'ensemble des fonctions affines par morceaux sur $[-1,1]$.
13. L'ensemble des polynômes de degré exactement égal à 3.
14. L'ensemble $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$.
15. L'ensemble vide $\emptyset$.

---

2) Dans les exemples présentés dans l'exercices précédents, proposer quand c'est possible un sous-espace vectoriel strict non trivial de l'espace vectoriel. C'est à dire un sous-espace vectoriel F différent de l'espace lui même et différent de $\{0\}$.

---

3)

1. Justifier que l'ensemble des fonctions à valeurs réelles, continues sur $\mathbb{R}$ et nulle sur l'intervalle $[0,1]$ est un espace vectoriel.
2. En déterminer un sous-espace vectoriel strict non trivial.

---

4)

1. Justifier que l'ensemble des polynôme de degré inférieurs oux égaux à 3 $\mathbb{R}_3[X]$ est un espace vectoriel.
2. Proposer 2 sous espaces vectoriels stricts non triviaux de $\mathbb{R}_3[X]$.

---

5) Dans chacun des cas préciser si les familles $(e_i)_i \in I$ de $\mathbb{R}^2$ sont libres, génératrices de $\mathbb{R}^3$ et forment une base de $\mathbb{R}^2$.

1. $e_1 = (0,1), e_2 = (1,1)$,
2. $e_1 = (0,1), e_2 = (0,2), e_3 = (0,-1)$,
3. $e_1 = (1,2), e_2 = (-1,1), e_3 = (3,3)$

---

6) Même exercice dans $R_3[X]$, où on note par abus de langage $u = aX^2 + bX + c$ l'application qui à X associe $aX^2 + bX + c$

1. $e_1 = X, e_2 = X + 1$,
2. $e_1 = 2X, e_2 = 3X + 4, e_3 = -1$,
3. $e_1 = X^3, e_2 = X^2, e_3 = 2X, e_4 = 6$

---

7)

1. Déterminer la dimension et une base de l'ensemble des fonctions affines sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que l'ensemble des fonctions continues, nulles en dehors de l'intervalle $[0,1]$, affine sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ et affine sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$ est un espace vectoriel.
3. En donner la dimension et une base.
4. Donner la dimension de l'espace des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 0$ et en proposer une base.
5. On fixe $j \in \mathbb{N}$. Donner la dimension de l'espace des fonctions constantes par morceaux sur les intervalles de la forme $[k2^{-j}(k+1)2^{-j}[$ pour k entier variant de 0 à $2^j - 1$ et valant 0 en dehors de l'intervalle $[0,1]$.