Habilitation à Diriger des Recherches

Minimisation ℓ_1. Identifiabilité, Stabilité et Optimisation

Charles Dossal

Soutenue le 03 Décembre 2015

Devant le jury constitué de :

Mr Jean-François Aujol	Professeur	Université de Bordeaux
Mr Jérémie Bigot	Professeur	Université de Bordeaux
Mr Albert Cohen	Professeur	Université Paris 6
Mr Rémi Gribonval	Directeur de Recherche	INRIA Rennes
Mr Simon Masnou	Professeur	Université de Lyon
Mr Eric Moulines	Professeur	École Polytechnique

Table des Matières

0.1 Notations . . . 6
0.2 Brefs rappels d'analyse convexe . . . 6
0.2.1 Premières définitions . . . 6
0.2.2 Sous-différentielle . . . 6
0.2.3 Opérateur proximal . . . 7
0.2.4 Conjugaison de Fenchel, certificats duaux . . . 8
I Minimisation ℓ_1 . . . 11
1 Introduction . . . 13
2 Analyse convexe et géométrie . . . 17
2.1 Identifiabilité . . . 17
2.2 Stabilité . . . 18
2.3 Extension à d'autres régularisations . . . 20
3 Critères d'identifiabilité ℓ_1 . . . 23
3.1 Identifiabilité ℓ_1 synthèse . . . 23
3.2 Critère d'identifiabilité pour la minimisation ℓ_1 analyse . . . 26
4 Stabilité . . . 27
4.1 Les conditions de robustesse au bruit . . . 27
4.2 Utilisation de IC et ERC . . . 28
4.3 Utilisation des certificats duaux forts . . . 29
4.4 Stabilité pour la régularisation ℓ_1 analyse . . . 29
5 Calcul du degré de liberté . . . 31
5.1 Introduction . . . 31
5.2 DOF pour le LASSO . . . 32
5.3 Calcul du DOF, extension à d'autres régularisations . . . 33
5.4 Illustrations numériques . . . 34
6 Identifiabilité pour des modèles aléatoires . . . 39
7 Algorithmes pour la minimisation ℓ_1 . . . 41
7.1 Il existe une solution x^* telle que $(A_J^* A_J)^{-1}$ est inversible . . . 41
7.2 Algorithme pour déterminer si un vecteur est identifiable . . . 42
7.3 Algorithme de recherche de vecteurs parcimonieux non identifiables . . . 43
7.4 Algorithme pour estimer les constantes d'isométries restreintes . . . 44
7.5 Algorithme pour optimiser les bornes de robustesse au bruit . . . 45
II Convergence et stabilité de FISTA et autres sur-relaxations de Forward-Backward. . . . 49
8 Convergence des itérés de FISTA . . . 51
8.1 Introduction . . . 51
8.2 Algorithme Forward-Backward (FB) . . . 51
8.3 FISTA . . . 52
8.3.1 Définition et premières propriétés . . . 52
8.3.2 Convergence de la suite des itérés . . . 53
8.4 Illustration numérique . . . 55
9 Convergence et stabilité aux perturbations de sur-relaxations de FB . . . 57
9.1 Introduction . . . 57

9.2 Prox approché et état de l'art . . . 58
9.2.1 Définitions . . . 58
9.2.2 État de l'art . . . 59
9.3 Vitesse de convergence de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour FB inertiel perturbé . . . 60
9.4 Convergence des itérés pour FB inertiel perturbé . . . 62
9.5 Validation numérique . . . 62
III Perspectives . . . 65
10 Perspectives . . . 67
10.1 Utilisation des certificats duaux . . . 67
10.2 Algorithmes proximaux . . . 68
10.3 Minimisation ℓ_1 pour la détection d'anormalité. . . . 68
Ma bibliographie . . . 71
Références externes . . . 72

Introduction

Mes travaux et sujets d'intérêt peuvent être séparés en deux thématiques qui constituent les deux premières parties de cette habilitation à diriger des recherches. La troisième partie est quant à elle consacrée à mes perspectives de recherche.

La première et la plus conséquente traite de la minimisation ℓ_1 et de ses variantes pour les problèmes inverses. Les questions qui sont traitées sont essentiellement celles de conditions d'identifiabilité de vecteurs par minimisation ℓ_1 à partir de mesures linéaires partielles et bruitées, de la robustesse au bruit de mesures, des applications en statistique ou algorithmique de ces conditions. Dans cette partie les points de vue géométrique et analytique sont mis en regard pour donner une vision aussi complète que possible des différents résultats proposés.

La seconde partie concerne l'étude d'une famille d'algorithmes dits proximaux largement utilisés pour minimiser des fonctionnelles convexes non différentiables. Les algorithmes étudiés sont des variations inertielles de l'algorithme de splitting appelé Forward-Backward dont une version populaire et rapide est appelée FISTA. Dans cette partie nous proposons des analyses de convergence et de stabilité de cette famille d'algorithmes. Ces travaux sont parmi les plus récents et j'ai fait le choix de les présenter avec plus de détails.

0.1 Notations

Une notion qui va être centrale dans l'ensemble du document est celle du support d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$:

Définition 1. *Soit $x \in \mathbb{R}^n$ on note $Supp(x)$ ou $I(x)$ le support de x, c'est-à-dire l'ensemble des indices des composantes non nulles de x.*

S'il n'y a pas d'ambiguïté on utilisera la notation $I = I(x)$. Cette définition permet de définir la notion de parcimonie : on appelle parcimonie d'un vecteur la valeur de sa pseudo norme ℓ_0 :

$$\|x\|_0 := \{\text{Cardinal } i \text{ tels que } x(i) \neq 0\} \tag{1}$$

Nous aurons également besoin de la notion de la restriction x_I d'un vecteur x à son support. Le vecteur x_I est le vecteur de $\mathbb{R}^{|I|}$ dont les composantes sont les composantes non nulles de x.
On définit le signe $\text{sign}(x)$ d'un vecteur de la manière suivante :

$$\text{sign}(x) = \{\text{sign}(x)(i) = \text{sign}(x(i)) \text{ si } i \in Supp(x), \text{ sign}(x(i)) = 0 \text{ sinon}\}. \tag{2}$$

Nous utiliserons aussi les notions d'adjointe de matrice, de pseudo-inverse et de matrice extraite d'une matrice A :

Définition 2. *Soit A une matrice de $\mathbb{R}^{m\times n}$.*
- *On note A^* la matrice adjointe (ou transposée) de A.*
- *On note A^+ la pseudo-inverse de Moore-Penrose de A.*
- *Si I est un ensemble d'indices d'entiers inférieurs à n, on note A_I la matrice de $\mathbb{R}^{m\times|I|}$ dont les colonnes sont les colonnes extraites de A indicées par I.*

Si C est un ensemble on définit la fonction indicatrice de cet ensemble de la manière suivante :

Définition 3. *La fonction indicatrice d'un ensemble C est*

$$i_C(x) = 0 \text{ si } x \in C, \text{ et } i_C(x) = +\infty \text{ sinon.}$$

0.2 Brefs rappels d'analyse convexe

0.2.1 Premières définitions

Soit F est une fonction convexe définie d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Définition 4. *F est dite propre s'il existe $x \in \mathcal{H}$ tel que $F(x) < +\infty$.*

Définition 5. *F est dite semi continue inférieurement (sci) si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in \mathcal{H}$ tels que $F(x) \leqslant \alpha\}$ est un fermé.*

Remarque : La fonction indicatrice d'un convexe fermé non vide est convexe, sci et propre.

Définition 6. *F est dite coercive si $\lim_{\|x\|\to+\infty} F(x) = +\infty$.*

On peut remarquer qu'une fonction convexe, propre, sci et coercive admet au moins un minimiseur sur $\mathcal{H}$.
Cet ensemble de minimiseurs est un convexe et peut être réduit à un point.

0.2.2 Sous-différentielle

En tout point $x \in \mathcal{H}$ on peut définir l'ensemble suivant appelé sous-différentielle de F au point x et noté $\partial F(x)$:

$$\partial F(x) = \{u \in \mathcal{H} \text{ tels que } \forall y \in \mathcal{H}, F(y) \geqslant F(x) + \langle y - x, u\rangle\}. \tag{3}$$

Cet ensemble est convexe, peut être vide ou réduit à un point. L'application qui à x associe $\partial F(x)$ est monotone et maximale.
On peut donner deux exemples classiques de sous-différentielles :

— Si F est différentiable alors la sous-différentielle se réduit au gradient de F en x : $\partial F(x) = \{\nabla F(x)\}$.
— Si $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$ et F est la norme ℓ_1 alors

$$\partial \|\cdot\|_1 = \{u \text{ tels que } \|u\|_\infty \leqslant 1,\ u(i) = \text{sign}(x(i)),\ \text{si } i \in Supp(x)\}.$$

Un des grands intérêts de la sous différentielle est qu'elle permet de caractériser les minimiseurs d'une fonction convexe :

Théorème 1. *Si F est une fonction convexe alors les deux points suivants sont équivalents :*

1. *x est un minimiseur de F.*
2. $0 \in \partial F(x)$

De plus la sous-différentielle admet des propriétés d'additivité intéressantes :

Proposition 1. *Soit f et g deux fonctions convexes définies sur $\mathcal{H}$, on note $F = f + g$. Si f est différentiable sur $\mathcal{H}$ alors $\forall x \in \mathcal{H}$,*

$$\partial F(x) = \nabla f(x) + \partial g(x)$$

Sous les hypothèses de la proposition, un minimiseur de F est un point x tel que $-\nabla f(x) \in \partial g(x)$.
Pour illustrer cette propriété on peut donner un exemple utile pour la suite :
Si $F(x) = \frac{1}{2}\|y - Ax\|_2^2 + \lambda \|x\|_1$ alors

$$\partial F(x) = \{\, v \text{ tels que } v = A^*(Ax - y) + \lambda u \text{ avec } \|u\|_\infty \leqslant 1 \text{ et } u(i) = \text{sign}(x(i)) \text{ si } i \in Supp(x)\}.$$

Ainsi un vecteur $\tilde{x}$ est un minimiseur de F si et seulement si

$$\|A^*(y - A\tilde{x})\|_\infty \leqslant \lambda \text{ et } A_I^*(y - A\tilde{x}) = \lambda \text{sign}(\tilde{x}_I).$$

0.2.3 Opérateur proximal

Si F est une fonction convexe, sci et propre et $y \in \mathcal{H}$, la fonction Φ_y définie sur $\mathcal{H}$ par

$$\Phi_y(x) = \frac{1}{2}\|x - y\|_2^2 + F(x) \tag{4}$$

est une fonction strictement convexe, propre, sci et coercive, elle admet donc un unique minimiseur.

Définition 7. *On appelle opérateur de proximité ou opérateur proximal de F au point y et on note $prox_F(y)$ l'unique minimiseur de* (4).

Si F est différentiable, l'opérateur proximal de F au point y est le point x tel que $\nabla \Phi_y(x) = 0$.
Plus généralement $prox_F(y)$ est l'unique point $p \in \mathcal{H}$ tel que $0 \in \partial \Phi_y(p)$, ce qui peut se réécrire de la manière suivante : $prox_F(y)$ est l'unique point $p \in \mathcal{H}$ tel que

$$y - p \in \partial F(p) \tag{5}$$

L'opérateur proximal est un outil clé dans un grand nombre d'algorithmes d'optimisation de fonctions convexes, tels que l'algorithme Forward Backward et FISTA qui seront étudiés plus en détail dans la partie II de ce document.
On peut mentionner deux exemples simples d'opérateurs proximaux :

— Si F est la fonction indicatrice d'un convexe fermé non vide C, l'application prox_F est la projection orthogonale sur C.
— Si F est $\lambda \|\cdot\|_1$, l'application prox_F est le seuillage doux de seuil λ.

Une des propriétés essentielles de l'opérateur proximal est son caractère fermement non expansif :

Proposition 2. *Si f est une fonction convexe propre définie sur $\mathcal{H}$ alors les applications $prox_f$ et $Id - prox_f$ sont fermement non expansives, c'est-à-dire que pour tout $(x, y) \in \mathcal{H}^2$,*

$$\left\|prox_f(x) - prox_f(y)\right\|^2 + \left\|(x - prox_f(x)) - (y - prox_f(y))\right\|^2 \leqslant \|x - y\|^2 .$$

En particulier ces deux opérateurs sont non-expansifs (1-Lipschitz).

0.2.4 Conjugaison de Fenchel, certificats duaux

La notion de conjugaison est un des fondements de l'analyse convexe. Elle permet de caractériser une fonction par ses minorants affines. À toute fonction définie sur $\mathbb{R} \cup +\{\infty\}$ on peut associer sa conjuguée de Fenchel de la manière suivante :

Définition 8. *Si F est une fonction convexe, propre et sci on peut définir sa conjuguée, notée F^*, définie pour tout $u \in \mathcal{H}$ par*

$$F^*(u) = \sup_{x \in \mathcal{H}} \langle u, x \rangle - F(x).$$

On peut mentionner quelques exemples simples de conjuguées de Fenchel :
— Si F est une norme $\|\cdot\|_X$ alors F^* est la fonction indicatrice de la boule de la norme duale $\|\cdot\|_{X'}$.
— Ainsi si F est la norme ℓ_1, $F^* = i_{\mathcal{B}_\infty}$.
— Si F est la fonction indicatrice d'une boule unité pour la norme $\|\cdot\|_X$, F^* est la norme duale.
— Si $F(x) = \frac{1}{2}\|Ax - y\|_2^2$ alors

$$F^*(u) = \begin{cases} +\infty & \text{si } u \in KerA \\ \frac{1}{2}\left\|A^{+*}u\right\|_1^2 - \frac{1}{2}\left\|P_{(ImA)^\perp} y\right\|_2^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

— Si F est la fonction indicatrice de l'espace affine d'équation $y = Ax$ alors

$$F^*(u) = \begin{cases} +\infty & \text{si } u \in KerA \\ \langle A^+ y, u \rangle & \text{sinon.} \end{cases}$$

— Si $F(x) = \|D^* x\|_1$,

$$F^*(u) = i_{D\mathcal{B}_\infty}(u)$$

Si F est convexe, propre et sci, sa conjuguée F^* est une fonction convexe, propre et sci. Il existe de nombreux liens entre F et F^* [35].
On peut mentionner à titre d'exemples que si F est convexe, propre et sci alors
— $F^{**} = F$.
— $\text{prox}_F + \text{prox}_{F^*} = Id$ (identité de Moreau).
On peut noter que si $u \in \partial F(x)$ alors par définition de la conjuguée on a $F^*(u) = \langle u, x \rangle - F(x)$. De même si pour un u, le supremum dans la définition de F^* est atteint en un point x alors $u \in \partial F(x)$.
Ainsi si F est convexe, propre et sci on a équivalence entre les 3 points suivants :

1. $u \in \partial F(x)$,
2. $F^*(u) + F(x) = \langle u, x \rangle$ et
3. $x \in \partial F^*(u)$.

Parmi les multiples intérêts de la conjugaison, nous nous intéresserons particulièrement à la dualisation de problèmes d'optimisation.
Si on considère le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x \in \mathcal{H}} f(x) + g(x) \tag{P}$$

on peut lui associer le problème suivant :

$$-\min_{u \in \mathcal{H}} f^*(u) + g^*(-u) \tag{D}$$

appelé problème dual, relativement au premier que nous appellerons problème primal.
La théorie de la dualité assure que si f et g sont convexes, propres, sci et coercives alors les deux problèmes admettent la même valeur optimale et de plus si $\tilde{x}$ est un minimiseur de (P) et que $\tilde{u}$ est un optimiseur du problème dual alors $\tilde{u} \in \partial f(\tilde{x})$ et $\tilde{x} \in \partial f^*(\tilde{u})$.
Ainsi les minimiseurs des problèmes primaux et duaux sont liés.
Une manière indirecte de montrer que $\tilde{x}$ est un minimiseur de (P) est de déterminer une solution $\tilde{u}$ du problème dual et de montrer que $\tilde{u} \in \partial f(\tilde{x})$.

Définition 9. *On dira que $\tilde{u}$ est un certificat dual de $\tilde{x}$ pour le problème primal* (P) *si $\tilde{u}$ est une solution du problème dual* (D) *associé à* (P) *et que $\tilde{u} \in \partial f(\tilde{x})$.*

Pour donner un exemple de certificat dual qui nous sera utile pour la suite prenons le problème suivant :

$$\min_{x \in \mathcal{H}} \|x\|_1 \text{ sous la contrainte } Ax = y, \tag{6}$$

où y est un élément de $\mathcal{H}$. En posant $f = \|\cdot\|_1$ et $g = i_{Ax=y}$ on peut reformuler ce problème sous la forme (P), le problème dual associé est ainsi

$$-\min_{u \in \mathcal{H}} i_{\mathcal{B}_\infty}(u) + i_{Im\, A^*}(u) - \langle A^+ y, u \rangle.$$

Si l'on considère un vecteur quelconque $x^1 \in \mathcal{H}$ tel que $Ax^1 = y$ et $u \in Im(A^*)$ on a $\langle A^+ y, u \rangle = \langle x^1, u \rangle$. Ainsi le problème précédent peut se reformuler :

$$-\min_{u \in \mathcal{H}} i_{\mathcal{B}_\infty}(u) + i_{Im\, A^*}(u) + \langle x^1, u \rangle.$$

Ainsi quel que soit x^1, si on trouve un vecteur $\tilde{u} \in Im(A^*)$ tel que $\|\tilde{u}\|_\infty \leqslant 1$ et tel que $\langle x^1, \tilde{u} \rangle = \left\|x^1\right\|_1$ alors $\tilde{u}$ est un minimiseur du problème ci-dessus et donc du problème dual. Si pour un x^1, un tel vecteur $\tilde{u}$ existe alors x^1 est une solution du problème primal. On dira que $\tilde{u}$ est un certificat dual de x^1.

On utilisera aussi le terme de certificat dual pour qualifier tout vecteur $\eta \in \mathcal{H}$ tel que $u = A^*\eta$ vérifie les 3 points précédents, qui peuvent se résumer par le fait que $A^*\eta \in \partial \|\cdot\|_1 (x^0)$.

Première partie

Minimisation ℓ_1

Chapitre 1

Introduction

Un grand nombre de problèmes issus des sciences physiques, du traitement des signaux et des images ou des statistiques peuvent se modéliser sous la forme d'un problème linéaire

$$y = Ax^0 + b, \tag{1.1}$$

où $y \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur d'observations, A est un opérateur linéaire défini de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$, b est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ appelé bruit et $x^0 \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'intérêt.
On souhaite estimer x^0 connaissant y et A.
Nous nous intéresserons au cas où la matrice A n'est pas injective c'est-à-dire où le problème de l'estimation de x^0 est mal posé même en l'absence de bruit mais en connaissant un a priori sur x^0.
Cette information a priori peut permettre de palier le caractère incomplet et imprécis des observations y. Plus précisément, nous nous intéresserons au cas où l'information a priori sur x^0 peut être traduite par une parcimonie, c'est-à-dire au cas où le nombre de composantes non nulles de x^0 ou de D^*x^0, où D^* est une application linéaire, est nettement plus faible que la dimension n de x^0. La parcimonie se mesure par la pseudo norme ℓ_0 définie par

$$\|x\|_0 = \text{Card } \{i \text{ tels que } x(i) \neq 0\}. \tag{1.2}$$

Cette hypothèse de parcimonie peut en effet être exploitée pour construire un estimateur $\hat{x}$ de x^0 sous la forme d'un minimiseur d'une fonctionnelle J, somme d'un terme dit d'attache aux données $F(x, y)$ et d'un terme de régularisation $R(x)$ promouvant la parcimonie :

$$J(x) = F(x, y) + R(x). \tag{1.3}$$

Un choix naturel pour $R(x)$ pourrait être $\|x\|_0$, cependant une telle fonction R n'est pas convexe et le calcul effectif d'un minimiseur est un problème qui est NP complet dans le cas général. Il existe une grande variété d'algorithmes *greedy* tel le Matching Pursuit (MP) de Mallat and Zang [31] qui permettent de minimiser de manière approchée une fonctionnelle avec régularisation ℓ_0 mais nous nous intéresserons ici uniquement à des régularisations convexes.
Parmi les multiples choix de régularisations convexes approchant la régularisation ℓ_0, la régularisation ℓ_1 est la plus couramment utilisée. Un tel choix amène par exemple à estimer x^0 en résolvant le problème d'optimisation suivant

$$\hat{x} = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|y - Ax\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 , \tag{1.4}$$

correspondant au choix $F(x, y) = \frac{1}{2} \|y - Ax\|^2$ et $R(x) = \lambda \|x\|_1$.
L'étude de ce problème classique de minimisation, appelée Basis Pursuit (BP) ou LASSO en statistique est un thème central qui sera largement développé dans ce document. Le fait que les solutions d'un tel problème d'optimisation soient parcimonieuses est connu depuis au moins les années 70. Santosa et Symes [38] ont utilisé cette propension de la minimisation ℓ_1 à produire des solutions parcimonieuses pour des problèmes de déconvolution d'ondes acoustiques.
Dans les chapitres suivants nous expliquerons en détail pourquoi cette régularisation ℓ_1 permet d'obtenir

des solutions parcimonieuses.
Cependant, même en considérant une relaxation ℓ_1 de la norme ℓ_0, on peut s'intéresser à différents problèmes.
Ainsi si les observations ne sont pas bruitées i.e $y = Ax^0$, on peut esssayer de résoudre le problème contraint suivant

$$\arg\min_{Ax=y} \|x\|_1 , \tag{1.5}$$

qui peut se reformuler sous une forme non contrainte

$$\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|_1 + i_{Ax=y}, \tag{1.6}$$

où i_C désigne la fonction indicatrice de C valant 0 sur C et $+\infty$ en dehors.
Dans ce cas $F(x, y) = i_{Ax=y}$ et $R(x) = \|x\|_1$.
On peut également mentionner une autre forme de minimisation ℓ_1 qui sera traitée dans ce document :

$$\hat{x} = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|_1 + i_{\|Ax-y\|_2\leqslant\varepsilon}, \tag{1.7}$$

qui peut être utilisée quand on dispose d'une borne sur la norme ℓ_2 du bruit b.
Une présentation exhaustive du type de problèmes d'optimisation que l'on peut être à même de traiter est impossible, on peut mentionner pour terminer sur les estimateurs utilisant $R(x) = \lambda \|x\|_1$, le Dantzig Selector [15] qui estime x^0 par

$$\hat{x} = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|_1 + i_{\|A^*(Ax-y)\|_\infty\leqslant\tau}. \tag{1.8}$$

Quand x^0 n'est pas directement parcimonieux mais qu'il existe un opérateur D^*, défini de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^d$ tel que D^*x est parcimonieux, ce qui est un cas fréquent, on peut estimer x^0 en résolvant le problème suivant :

$$\hat{x} = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|y - Ax\|^2 + \lambda \|D^*x\|_1 . \tag{1.9}$$

Si l'opérateur D^* est inversible, ce problème est équivalent au BP par changement de variables. On effectue alors l'optimisation sur $z = D^*x$ et l'estimateur $\hat{z}$ obtenu permet de construire un estimateur $\hat{x} = (D^*)^{-1}\hat{z}$ de x^0. On peut interpréter les coefficients de $\hat{z}$ comme les coefficients de $\hat{x}$ dans une base. Le BP est ainsi considéré comme un problème ℓ_1 synthèse dans la mesure où l'on effectue la minimisation non pas sur l'objet lui même mais sur les coefficients z qui vont servir à synthétiser l'estimateur $\hat{x}$. Le problème (1.9) est appelé minimisation ℓ_1 analyse car la norme ℓ_1 est évaluée non sur x mais sur un ensemble de produits scalaires de x avec des vecteurs d'analyse $(d_i)_{i\leqslant d}$.
Les cas typiques où la minimisation analyse est équivalente à la minimisation synthèse sont les cas où D^* est une transformée orthogonale, en ondelettes ou en DCT. En revanche si D^* est un opérateur de gradient discret, ou une transformée redondante comme une transformée en ondelettes redondante ou une transformée en curvelets, la minimisation ℓ_1 analyse et la minimisation ℓ_1 synthèse ne sont pas équivalentes.
L'usage de l'une ou l'autre formulation dépend de l'a priori que l'on a sur le vecteur x^0 à estimer.

Une autre forme de parcimonie que l'on peut vouloir promouvoir est la parcimonie structurée ou parcimonie par blocs.
Dans de nombreux problèmes, on sait que x^0 a peu de composantes non nulles et on sait en plus que ces composantes sont regroupées spatialement dans des blocs. C'est-à-dire que l'on peut partitionner les composantes de x en des blocs x_b, $x = (x_{b_1}, x_{b_2}, \cdots, x_{b_p})$ éventuellement de tailles différentes. Cet a priori sur x^0 peut se traduire quantitativement par le fait qu'une norme par blocs de x^0 est faible. On peut alors choisir une régularisation spécifique :

$$R(x) = \sum_{b\in\mathcal{B}} \|x_b\|_2 . \tag{1.10}$$

Une telle norme est appelée norme $\ell_1 - \ell_2$ et promeut la parcimonie par blocs. Nous verrons que les outils développés pour étudier ces différents problèmes s'étendent à des régularisations plus générales.

L'hypothèse de parcimonie n'est pas la seule qui puisse conduire à ces problèmes d'optimisation, on peut aussi être amené à étudier ces mêmes problèmes de minimisation dans d'autres cadres. Nous pouvons citer par exemple le cadre de la sélection de modèles ou l'estimation bayésienne. Si on se place dans un cadre bayésien, le bruit b et le vecteur x^0 sont des réalisations de processus aléatoires indépendants. On peut alors chercher l'estimateur de maximum de vraisemblance qui maximise la densité de probabilité a posteriori étant données les observations. Cet estimateur de maximum de vraisemblance sera solution d'un problème d'optimisation de type BP si le bruit b est gaussien et le vecteur x^0 suit une loi laplacienne. De même dans le cadre de la sélection de modèles, on peut chercher à pénaliser un modèle en fonction de sa norme ℓ_1 ce qui aboutit également à un problème d'optimisation sous la forme LASSO ou BP.

Une fois qu'une fonctionnelle est choisie pour estimer x^0, plusieurs questions se posent.

— À quelles conditions sur x^0, x^0 est-il une solution de (1.5) si $y = Ax^0$?
— À quelles conditions sur x^0, x^0 est-il l'unique solution de (1.5) si $y = Ax^0$?
Nous dirons, dans ce cas que x^0 est identifiable par minimisation ℓ_1.
— Si tel est le cas, que se passe t-il quand $y = Ax^0 + b$? Peut-on avoir un contrôle sur $x^0 - x^*$ où x^* est un minimiseur de (1.4) ou (1.7) ?
— Peut-on avoir un contrôle sur le support de x^* ?
— Si on utilise la formulation (1.4), comment choisir la valeur du paramètre λ de manière à avoir la meilleure estimation possible ?
— Comment les réponses à ces questions s'étendent à la régularisation ℓ_1 analyse et des régularisations plus variées ?

La théorie de l'échantillonnage compressé (CS pour Compressive Sensing) a apporté des premières réponses à ces questions. Les performances d'un décodeur géneral ont été étudiées par Cohen et al. [16] et en particulier sous la condition que A vérifie des hypothèses d'isométries restreintes (RIP pour Restricted Isometry Properties) par Candès, Romberg et Tao dans une série d'articles dont on peut citer [9, 10].
L'utilisation des épaisseurs gaussiennes (voir Rudelson et al. et Chandrasekaran et al. [36, 43]) est venue compléter ces premiers résultats pour expliquer de manière plus extensive les performances de la minimisation ℓ_1 pour la reconstruction de signaux à partir de mesures aléatoires. Les travaux qui sont présentés ici n'utilisent pas cette hypothèse RIP mais se focalisent sur des propriétés locales, c'est-à-dire sur des conditions dépendant d'un vecteur x^0 donné. Ils s'inscrivent dans la continuité des travaux de Fuchs, [25, 26] de Tropp [41] et de Grasmair et al. [27]. En effet une approche globale, considérant l'ensemble des vecteurs ayant une parcimonie plus petite qu'une borne donnée peut être inefficace dans certaines situations comme en déconvolution.
En effet dans le cas de la déconvolution sparse-spike 1D, où l'opérateur A est un opérateur de convolution 1D, ce n'est pas toujours une hypothèse de parcimonie qui va assurer la reconstruction d'un vecteur x^0 mais la distance entre deux spikes au moins quand le signe des spikes est inconnu. Cette propriété a été observée (par D. et al.) dans [DM05] en 2005, et depuis dans de nombreux travaux parmi lesquels on peut citer Candès et al. [14] et Duval et al. [23]. Quand les spikes sont tous supposés de même signe, le problème est différent, Candès et al. [14] ont proposé une solution élégante en construisant explicitement des certificats duaux associés à des trains de spikes de même signe. Ainsi on peut établir des conditions de reconstruction qui ne font pas intervenir uniquement la parcimonie. Nous verrons que ces conditions de reconstruction font appel à des certificats duaux.
Le plan de cette première partie est le suivant : dans le chapitre 2, nous expliquerons dans quelle mesure toutes ces questions peuvent être abordées par la géométrie et par l'analyse convexe. Ce double point de vue est essentiel pour comprendre les différents résultats et algorithmes contenus dans cette première partie. Dans le chapitre 3, nous présenterons les différentes conditions d'identifiabilité ℓ_1 puis dans le chapitre 4 nous donnerons les différents résultats de stabilité associés à ces conditions, c'est-à-dire dans quelles mesures les solutions des différents problèmes de minimisation sont sensibles au bruit b. Le chapitre 5 est dédié au calcul du degré de liberté (DOF) de l'estimateur obtenu par minimisation ℓ_1, nous donnerons une définition de ce degré de liberté et expliquerons comment ce degré de liberté permet d'estimer une valeur optimale du paramètre λ. Dans le chapitre 6, nous verrons comment ces conditions d'identifiabilité peuvent être utilisées dans le cadre de matrices aléatoires ou de signaux aléatoires et de matrices déterministes pour montrer que des signaux suffisamment parcimonieux sont identifiables par minimisation ℓ_1. Le chapitre 7 qui clôt cette première partie traite des différents algorithmes développés pour estimer les conditions d'identifiablité et de robustesse.

Chapitre 2

Analyse convexe et géométrie

Pour mieux comprendre les résultats et les idées qui guident les démonstrations des résultats principaux de cette première partie il est important de regarder les problèmes à la lumière de l'analyse convexe et de la géométrie. La géométrie permet de se forger une intuition, de construire des algorithmes et de trouver des cas limites ou pathologiques pour mieux comprendre les hypothèses indispensables aux théorèmes. L'analyse convexe permet d'utiliser un cadre général pour traiter les différents problèmes considérés et de rédiger les démonstrations.

2.1 Identifiabilité

Étant donnés un opérateur linéaire A défini de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et y un vecteur de R^m, considérons une norme $\|\cdot\|_X$ quelconque sur $\mathbb{R}^n$ et le problème d'optimisation suivant :

$$\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|_X \text{ sous la contrainte } Ax = y. \tag{2.1}$$

On se pose la question de savoir à quelle condition x^0 est un minimiseur de (2.1). Il existe une réponse totalement géométrique :

Théorème 2. *Un vecteur $x^0 \in \mathbb{R}^n$ est une solution de (2.1) si et seulement si $Ax^0 = y$ et si Ax^0 appartient à la frontière de l'image de la boule $\mathcal{B}_X(\|x^0\|_X)$ pour la norme X centrée en 0 et de rayon $\|x^0\|_X$ par l'opérateur A.*

Pour être totalement précis, le terme frontière désigne la frontière relativement à l'image de A et pas la frontière dans R^m. Si l'opérateur A n'est pas surjectif, pour tout $z \in \mathcal{B}_X(\|x^0\|_X)$, Az est sur la frontière de l'image de la boule relativement à $\mathbb{R}^n$.
En fait on peut énoncer un théorème encore plus général en remplaçant la norme par la jauge d'un convexe quelconque, non nécessairement symétrique.
Le fait que Ax_0 appartienne à la frontière peut également être traduit par le fait qu'il existe un hyperplan tangent à $A\mathcal{B}_X(\|x^0\|_X)$ passant par Ax^0. L'existence d'un tel hyperplan a une traduction directe en terme d'analyse convexe.

Si on spécifie le problème pour la norme ℓ_1,

$$\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|_1 \text{ sous la contrainte } Ax = y, \tag{2.2}$$

l'image de la boule unité est le polytope centro-symétrique P de $\mathbb{R}^m$ dont les sommets sont $(\pm a_i)_{i\leqslant n}$ où les $(a_i)_{i\leqslant n}$ désignent les colonnes de la matrice A. À un vecteur $x^0 \in \mathbb{R}^n$ on peut associer une face de la boule unité de R^n.

Définition 10. *La face $F(x^0)$ associée au vecteur x^0 est l'ensemble des combinaisons convexes des $(sign(x^0(i))a_i)_{i\in I}$ où I désigne le support de x^0.*

Le fait que la norme ℓ_1 ne soit pas strictement convexe permet d'établir la proposition suivante :

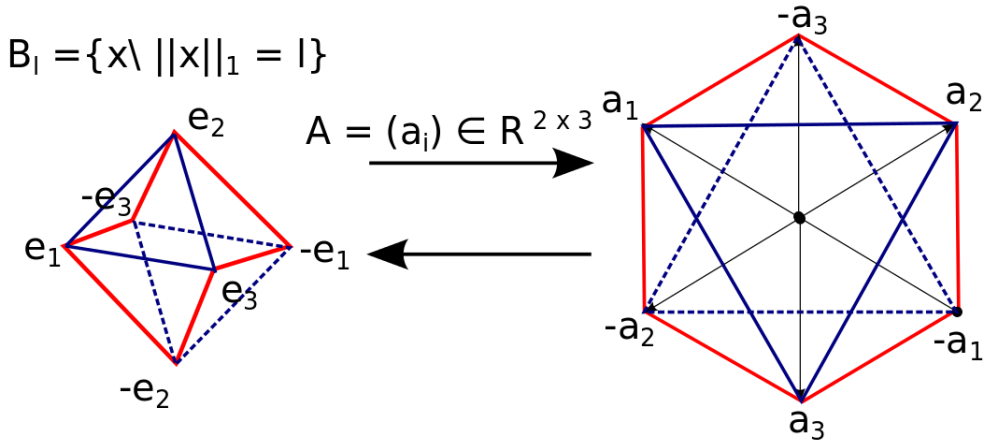


FIGURE 2.1 – À gauche la boule ℓ_1 de $\mathbb{R}^3$ et à droite son image par A qui est un polytope P, enveloppe convexe des colonnes $(a_i)_{i\in\{1,2,3\}}$ de A. En rouge les faces dont les images sont extérieures à P et en bleu les autres faces.

Proposition 3. *Si x^0 est un vecteur tel que $\left\|x^0\right\|_1 = 1$ alors Ax^0 appartient à la frontière du polytope P notée ∂P si et seulement s'il en est de même pour toute la face $F(x^0)$.*

Ainsi x^0 est un minimiseur de (2.1) pour la norme ℓ_1 si et seulement si l'image de la face associée à x^0 est une face extérieure du polytope, voire figure 2.1 et 2.1. Cette propriété indique au passage que le fait pour une vecteur x^0 d'être un minimiseur de (2.2) pour $y = Ax^0$ est une propriété qui ne dépend que du support et du signe des composantes de x_0 mais pas de la valeur exacte de celles-ci.

Cette appartenance à la frontière relative de la boule qui est équivalente à l'existence d'un plan tangent au point Ax^0 peut aussi être vue de manière analytique. En effet, nous avons vu dans la première partie du document consacrée aux certificats duaux qu'un vecteur x^0 était une solution de 2.2 si et seulement s'il existait un certificat dual. L'existence d'un certificat dual dans ce cas, se traduit par l'existence d'un vecteur η tel que $A^*\eta \in \partial \left\|\cdot\right\|_1 (x^0)$. Une traduction géométrique de cette propriété est que l'hyperplan $\mathcal{H}_\eta$ d'équation $\langle \eta, u\rangle = 1$ est tangent au polytope P et passe par le point Ax^0. Ainsi à chaque plan tangent on peut associer un certificat dual η.
Nous verrons lors du chapitre dédié à l'identifiabilité ℓ_1 que la question de l'unicité de la solution du problème (2.2) ou des autres problèmes faisant intervenir la norme ℓ_1 peut aussi être résolue géométriquement ou analytiquement. La condition d'identifiabilité proposée par Fuchs dans [25] s'interprète également géométriquement, voir figure 2.3.

2.2 Stabilité

Si les données observées y sont entachées de bruit $y = Ax^0 + b$, pour estimer x^0 on n'effectuera pas une minimisation ℓ_1 exacte mais on préfèrera estimer x^0 par une solution de

$$\min_{x\in\mathcal{H}} \|x\|_1 \text{ sous la contrainte } \|Ax - y\|_2 \leqslant \varepsilon \tag{2.3}$$

si on sait par exemple que $\|b\|_2 \leqslant \varepsilon$ ou par une solution de

$$\min_{x\in\mathcal{H}} \frac{1}{2}\|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \tag{2.4}$$

avec un choix de λ dépendant de ε ou de la variance du bruit si b est la réalisation d'un processus gaussien blanc et dont les composantes sont iid.

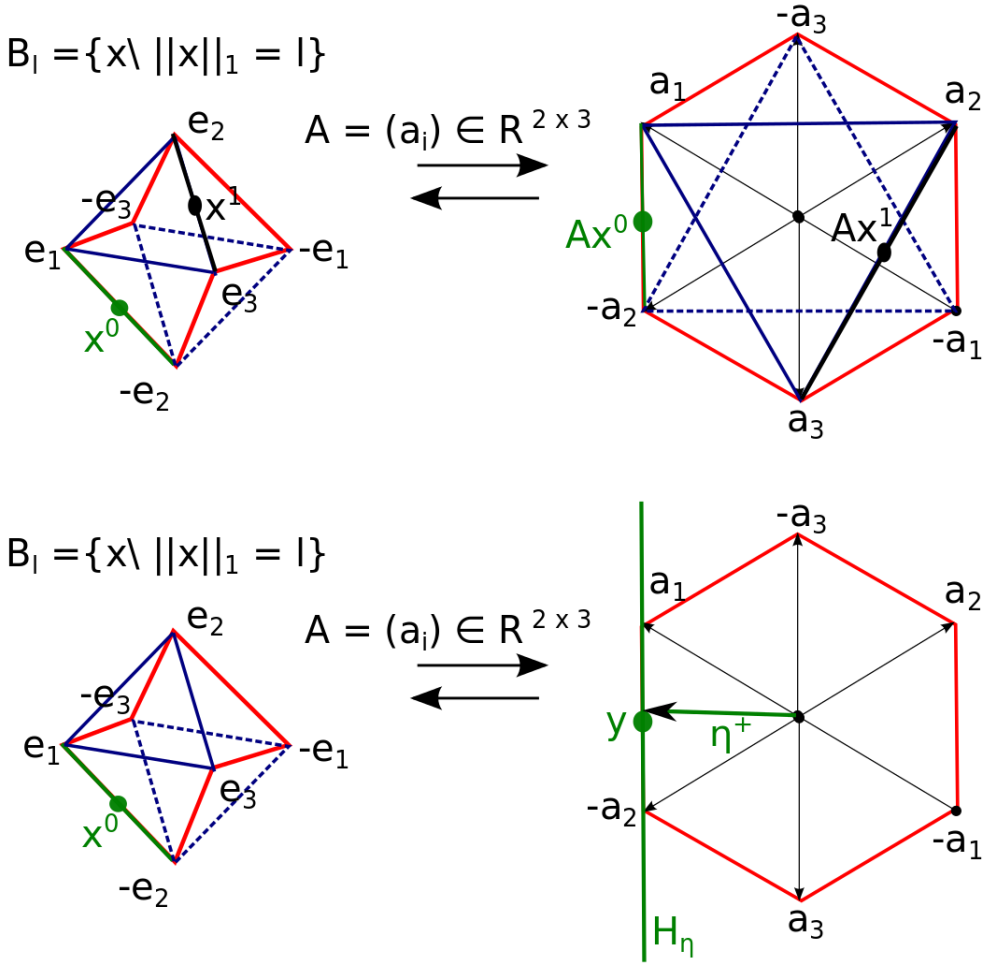


FIGURE 2.2 – Figure du haut : à gauche la boule $\mathcal{B}_{\ell_1}$ de $\mathbb{R}^3$ et un point $x_0 \in \partial\mathcal{B}_{\ell_1}$ et à droite leur image par A. Le point $Ax_0 \in \partial P$ donc x_0 est identifiable par minimisation ℓ_1. Figure du bas : caractérisation de l'identifiabilité par un certificat dual. Il existe un hyperplan H_η qui est ici une droite, d'équation $\langle \eta, u \rangle = 1$ tangente au polytope P et qui passe par $y = Ax_0$. Cette existence et le fait que l'hyperplan n'intersecte que l'image de la face associée à x_0 assurent que le vecteur x_0 est identifiable.

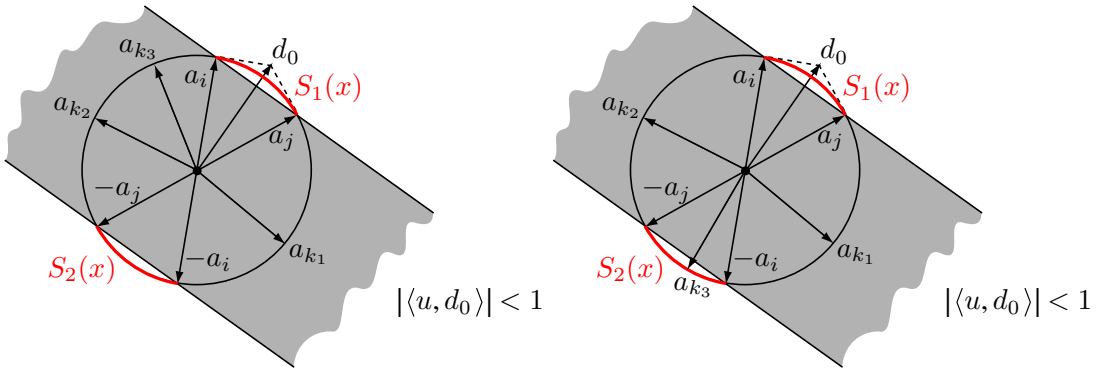


FIGURE 2.3 – Image de gauche : exemple d'un vecteur x de support $I = \{i, j\}$ tel que $d_0 = d(x)$ est un certificat dual. Image de droite : exemple d'un vecteur x de support $I = \{i, j\}$ tel que $d_0 = d(x)$ n'est pas un certificat dual car a_{k_3} n'appartient pas à la bande définie par les deux hyperplans associés à x.

Même si x^0 est identifiable, la question de savoir comment varie la solution de (2.3) ou (2.4) quand ε tend vers 0 se pose. Nous considèrerons deux notions de stabilité :

— la première au sens ℓ_2 c'est-à-dire comment peut on contrôler $\left\|\hat{x} - x^0\right\|_2$, où $\hat{x}$ est une solution de (2.3) ou (2.4).

— La seconde au sens du support, c'est à dire sous quelles conditions sur x^0 et ε le support de $\hat{x}$ est le même que celui de x^0.

Géométriquement, la représentation du problème (2.3) est simple : $A\tilde{x}$ correspond au point de tangence entre une sphère de rayon ε centrée en y et un polytope P_1 image par A d'une boule ℓ_1.
Dans [27], Grasmair et al. montrent qu'il est possible de contrôler l'erreur $\left\|\hat{x} - x^0\right\|_2$ par un terme de la forme $C(\eta)\varepsilon$ où $C(\eta)$ est une fonction d'un certificat dual η associé à x^0. Dans [NDTB14], avec mes co-auteurs, nous proposons une interprétation géométrique de cette borne et montrons qu'elle dépend d'une distance d'un point à un polytope. Cette interprétation géométrique permet de déterminer le certificat η donnant la valeur optimale de $C(\eta)$, voir chapitre 4.
La question de la stabilité du support de $\hat{x}$ pour des petites valeurs de ε peut aussi s'interpréter à la fois géométriquement et analytiquement. D'un point de vue analytique, si l'on considère le problème (2.4), le simple fait d'écrire que 0 appartient à la sous-différentielle de F au point $\tilde{x}$ permet de montrer que si l'on note J le support de $\tilde{x}$, $\tilde{x}$ vérifie l'équation implicite :

$$\tilde{x}_J = A_J^+ y - \lambda (A_J^* A_J)^{-1} \mathrm{sign}(\tilde{x}_J).$$

Pour que $J = I$ où I est le support de x^0 pour ε suffisamment petit, il est nécessaire et suffisant que $d(x^0) = A_I^{+*}\mathrm{sign}(x_I^0)$ soit un certificat dual associé à x^0 et que $\left\|A_{I^c}^t d(x_0)\right\|_\infty < 1$.
Une traduction géométrique de cette propriété est que tous les points $\pm(a_i)_{i \notin I}$ soient inclus dans la bande ouverte définie par les deux hyperplans d'équation $\langle d(x_0), u\rangle = 1$ et $\langle d(x_0), u\rangle = -1$, voir figure 2.3.

2.3 Extension à d'autres régularisations

Le problème d'optimisation (2.1) peut être vu comme un problème de calcul de jauge. Ainsi la solution de ce problème correspond à la valeur de la jauge de l'image de la boule unité $\mathcal{B}_X$ par l'opérateur A au point y. Dans le cas du problème de minimisation ℓ_1 synthèse, l'image de cette boule est le polytope centro-symétrique, enveloppe convexe des $\pm a_i$ où les $(a_i)_{i \leqslant m}$ sont les colonnes de la matrice A, mais c'est un cas particulier.
On peut considérer des régularisations plus variées associées à un convexe fermé quelconque. Si C est un

tel convexe fermé on peut remplacer la norme ℓ_1 par la jauge de C définie sur $\mathcal{H}$ par

$$J_C(y) = \inf\{\lambda \text{ tel que } y \in \lambda C\}.$$

Une régularisation analyse de la forme $\|D^*x\|_1$, sous l'hypothèse où D est injectif correspond à la jauge d'un polyèdre :

$$\|D^*x\|_1 = \min\{\lambda > 0 \text{ tels que } x \in \lambda (D^*)^+ \mathcal{B}_{\ell_1}\}. \tag{2.5}$$

Une régularisation $\ell_1 - \ell_2$ correspond à la jauge d'un convexe non polyédral dès que la taille des blocs dépasse 1.
Dans ce cas, on peut exprimer les conditions d'identifiabilité sous forme analytique : existence d'un certificat dual. On est alors amené à utiliser la conjuguée de la jauge d'un convexe qui n'est autre que la fonction indicatrice du polaire C^0 de C. Il s'agit alors de chercher une solution du problème dual suivant

$$-\min_{u \in \mathcal{H}} i_{C^0}(u) + i_{Im(A^*)}(u) - \langle A^+ y, u \rangle,$$

ce qui se traduit géométriquement par trouver un hyperplan tangent au point y à l'image de λC par l'opérateur A où $\lambda = J_{AC}(y)$ est la jauge du convexe AC image de C par A au point y.

Si l'on s'intéresse au problème de la stabilité pour une régularisation plus générale que ℓ_1 synthèse, on peut regarder le problème d'un point de vue analytique. Les théorèmes de stabilité ℓ_2 de Grasmair et al. comme la proposition 3.12 de [27] font intervenir des certificats duaux qui sont associés de manière bijective à des hyperplans tangents au polytope image de la boule ℓ_1 par l'opérateur A au point y. Les constantes apparaissant dans cette proposition peuvent s'interpréter comme des distances entre un plan et un polytope (voir Nicodeme et al. [NDTB14] et le Chapitre 4). Dans le cas d'une régularisation par une jauge quelconque, on peut utiliser la même approche géométrique et les constantes qui interviennent correspondent cette fois à des distances entre un hyperplan, toujours associé à un certificat dual et à des points extrémaux d'un convexe qui peut ne pas être un polytope si la régularisation n'est pas associée à une jauge polyédrale.

Chapitre 3

Critères d'identifiabilité ℓ_1

3.1 Identifiabilité ℓ_1 synthèse

Étant donnée une matrice A, on veut déterminer des conditions nécessaires et ou suffisantes sur un vecteur x^0 assurant qu'il est minimiseur du problème suivant :

$$\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|_1 \text{ sous la contrainte } y = Ax \tag{3.1}$$

avec $y = Ax^0$. Nous dirons qu'un vecteur x^0 est identifiable par minimisation ℓ_1 ou identifiable quand il n'y aura pas d'ambiguïté si x^0 est l'unique solution du problème précédent.
Dans le chapitre consacré aux notations nous avons vu qu'une manière de voir le problème précédent était de le réécrire sous la forme non contrainte en faisant passer la contrainte dans une fonction indicatrice :

$$\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|_1 + i_{Ax=y}(x). \tag{3.2}$$

Ensuite, on peut caractériser les minimiseurs de ce problème comme l'ensemble des x^* tels que 0 appartient à la sous différentielle de la fonction F définie par $F(x) = \|x\|_1 + i_{Ax=y}(x)$, au point x^0. Cette caractérisation peut s'écrire également :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}^m \text{tel que } A_I^*\eta = \text{sign}(x_I^0) \text{ et } \|A^*\eta\|_\infty \leqslant 1.$$

Le vecteur $A^*\eta$ est appelé certificat dual associé à x^0. Dans le chapitre 2 nous avons observé que cette caractérisation était équivalente au fait que $\frac{x^0}{\|x^0\|_1} \in \partial P$ où ∂P désigne la frontière du polytope P, image de la boule ℓ_1 de $\mathbb{R}^n$ par l'opérateur A.
On peut noter au passage que le point de vue géométrique qui consiste à dire qu'un vecteur est minimiseur de (3.2) si et seulement s'il est associé à une face extérieure du polytope $A\mathcal{B}_{\ell_1}$ est à la base de toute la série de travaux de D. Donoho [19, 21, 22, 20] sur les polytopes neighborly qui a permis d'établir très tôt les transitions de phases de la minimisation ℓ_1 dans le cadre de matrices et de projections aléatoires. Cependant ces résultats très fins de nature topologique (nombre de k-faces du simplexe dont l'image est une k-face) ne permettent pas de comprendre ce qui se passe en présence de bruit contrairement à la théorie du Compressive Sensing (CS) développée en parallèle par Candès et Tao [10, 12, 13]. L'avantage de l'approche géométrique de Donoho par rapport à celle de Candès et Tao est qu'elle donne les transitions de phase réellement observées en pratique, sans bruit et que les rapports entre les parcimonies limites obtenues par RIP et celles obtenues par une approche topologique sont supérieurs à 15 en 2015. Le point de vue des épaisseurs gaussiennes [36, 43] permet quant à lui de mieux comprendre le comportement des algorithmes entre les deux régimes.

L'existence d'un tel vecteur η que nous appellerons aussi par abus de langage *certificat dual* caractérise le fait d'être minimiseur mais ne dit rien sur l'unicité. Pour assurer l'unicité, il faut l'existence d'un certificat dual fort :

Définition 11. *On dit que η est un certificat dual fort associé à x^0 s'il vérifie les conditions suivantes :*

1. $A_I^*\eta = sign(x_I^0)$,
2. $\forall j \notin I, |\langle a_j, \eta\rangle| < 1$ *et*
3. *La matrice* $A_I^*A_I$ *est inversible (ou de manière équivalente quand* $rang(A_I) = |I|$ *c'est-à-dire quand le rang de* A_I *est maximal).*

On a ainsi la proposition suivante :

Proposition 4. *x^0 est identifiable, si et seulement s'il existe un certificat dual fort η associé à x^0.*

Dans de nombreux cas pratiques, l'existence d'un tel certificat n'est pas facile à mettre en évidence. On peut alors utiliser la notion de pré-certificat qui est un candidat naturel pour être un certificat.

Définition 12. *On appelle pré-certificat associé à x^0 tout vecteur η tel que $A_I^*\eta = sign(x_I^0)$.*

Un pré-certificat très utile et très utilisé est le certificat de norme minimale défini quand la matrice $A_I^*A_I$ est inversible par

$$d(x^0) = A_I(A_I^*A_I)^{-1}\text{sign}(x_I^0). \tag{3.3}$$

Ce pré-certificat a l'avantage d'être explicite et permet de définir le critère d'identifiabilité IC (pour Identifiability Coefficient) suivant :

$$IC(x^0) = \max_{j\notin I} |\langle a_j, d(x^0)\rangle|. \tag{3.4}$$

En effet si $IC(x^0) < 1$ alors $d(x^0)$ est un certificat fort et x^0 est identifiable. La condition $IC(x^0) < 1$ est ainsi une condition suffisante pour assurer l'identifiabilité d'un vecteur. Cette condition a été utilisée par Fuchs dans [25] pour étudier la solution du problème relaxé associé : le Basis Pursuit. En effet, un calcul élémentaire montre que si $IC(x^0) < 1$ alors le problème

$$\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|Ax - y\| + \lambda\|x\|_1$$

avec $y = Ax^0$ admet pour unique solution le vecteur $\tilde{x}$ supporté sur I et défini par
$\tilde{x}_I = x_I^0 - \lambda(A_I^*A_I)^{-1}\text{sign}(x_I^0)$ si λ est suffisamment petit.
L'objet de [Dos11] était de faire un lien entre la condition proposée par Fuchs et une CNS d'identifiabilité, que je n'avais pas formulée en terme de certificat dual, la première version de ce papier ayant été écrite en 2007.
Dans cet article, je montre quelques points qui semblent avec le recul assez élémentaires :

- si les colonnes de la matrice sont en *position générale* (c'est à dire qu'aucun k-uplet de points $(\pm a_i)_{i\leqslant n}$ n'appartient au même espace affine de dimension $k-2$) alors pour tout y le problème de minimisation (3.2) admet une solution unique.
- Presque toute matrice A vérifie cette hypothèse de position générale.
- Si cette condition n'est pas vérifiée, il peut exister des situations où le problème (3.2) admet plusieurs solutions mais pour tout y il existe une solution x^* de (3.2) de support I telle que $rang(A_I) = |I|$, et il est proposé un algorithme pour trouver une telle solution à partir d'une solution quelconque. Cet algorithme sera particulièrement utile pour la généralisation des résultats à des régularisations polyédrales quelconques.
- Si la condition de position générale est vérifiée, l'ensemble des vecteurs identifiables est exactement la fermeture topologique des vecteurs vérifiant $IC < 1$.

On peut interpréter cette dernière remarque de la manière suivante : si un vecteur est identifiable alors il existe une manière de lui ajouter des composantes de telle sorte qu'il vérifie $IC < 1$. On en déduit un algorithme rapide pour déterminer si un vecteur est identifiable proposé dans [DP07a] en ajoutant des composantes à un vecteur de manière à faire diminuer la valeur de IC. Cet algorithme peut aussi s'interpréter géométriquement comme la recherche d'un hyperplan tangent au polytope P, image de la boule ℓ_1 par l'opérateur A au point $A\frac{x^0}{\|x^0\|_1}$ en cherchant des faces d'appui de petite dimension.

Une interprétation géométrique de cette dernière propriété est que toute $k-$face extérieure d'un polytope est une sous-face d'une face associée à un critère IC strictement inférieur à 1. Géométriquement c'est assez évident dans la mesure où les $k-$faces de dimension maximale du polytope $P = A\mathcal{B}_{\ell_1}$ sont

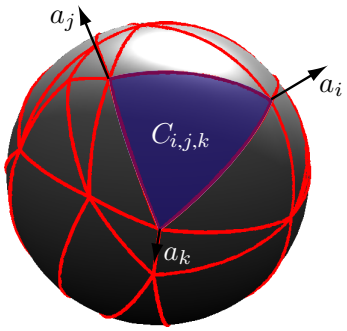


FIGURE 3.1 – Triangulation de Delaunay associée à une matrice A de taille $n \times 3$ de vecteurs normés. Les vecteurs identifiables sont ceux associés à des sous-faces de la triangulation de Delaunay. Toutes les 2-faces sont associées à des vecteurs x tels que $IC(x) < 1$ si les points a_i sont en position générale.

associées à des $IC \leqslant 1$ de manière générale et $IC < 1$ si les colonnes de A sont en position générale. Si toutes les colonnes (a_i) de A sont normées dans $\mathbb{R}^3$ alors la dernière propriété assure que toute face extérieure de P est une sous-face d'une triangulation de Delaunay.

On peut noter également que l'existence d'une solution associée à une matrice $(A_I^* A_I)$ inversible n'est pas anecdotique. En effet cette matrice est très importante dans le calcul du degré de liberté de l'estimateur associé, voir le chapitre afférent. L'inversibilité de cette matrice permet d'exprimer localement la solution du Basis Pursuit quand y varie de manière infinitésimale. L'algorithme proposé dans [Dos11] s'adapte au cas polyédral mais pas à une régularisation quelconque, ce qui pose des problèmes techniques pour l'extension des résultats valables en ℓ_1 synthèse.

Du critère IC qui dépend du support et du signe de x^0 on peut construire une condition suffisante d'identifiabilité ne dépendant que du support. Dans [41], Tropp introduit l'Exact Recovery Coefficient (ERC) que l'on peut définir de la manière suivante :

$$ERC(I) = \max_{j \notin I} \left\| (A_I^* A_I)^{-1} A_I^* a_j \right\|_1 . \tag{3.5}$$

On peut remarquer que l'ERC est lié au critère IC par la relation suivante :

$$ERC(I) = \sup_{x_0 \text{ tels que } I(x_0)=I} IC(x^0).$$

Ainsi si $ERC(I) < 1$ alors tout vecteur à support dans I est identifiable. Ce critère ERC a aussi des propriétés intéressantes en ce qui concerne la robustesse aux perturbations.
J'ai utilisé ce critère dans ma thèse [Dos05] et dans [DM05] pour justifier que des vecteurs parcimonieux dont les composantes sont suffisamment espacées sont reconstructibles par minimisation ℓ_1 dans un problème de déconvolution.
Les critères IC et ERC ont aussi été utilisés dans [BDP+13] pour déterminer les parcimonies limites qui assurent l'identifiabilité par minimisation ℓ_1 dans le cadre d'un opérateur déterministe (de Radon dans l'article mais la méthode est générale).
L'importance du vecteur $d(x^0)$ pour caractériser l'identifiabilité a été également soulignée dans [DPF10]. C'est en effet en cherchant des vecteurs tels que $\left\| d(x^0) \right\|_2$ est maximal pour une parcimonie donnée qu'on arrive à trouver des vecteurs relativement parcimonieux et qui ne sont pas identifiables même pour des matrices aléatoires. Cette méthode permet d'approcher les bornes théoriques calculées par Donoho [19].
La condition $IC < 1$ a aussi été utilisé par Candès et al [7], par Wainwright [44] et par D. et al [DT13] dans des cadres aléatoires, pour justifier l'identifiabilité de vecteurs parcimonieux.

Il existe bien d'autres critère d'identifiabilité ℓ_1 comme celui élémentaire basé sur la cohérence de la matrice A ou celui proposé par Gribonval et Nielsen [28] pour un vecteur donné, mais j'ai focalisé mes travaux sur des critères locaux, qui me semblaient calculables et suffisamment peu pessimistes pour

pouvoir être utiles.

3.2 Critère d'identifiabilité pour la minimisation ℓ_1 analyse

Quelle que soit la régularisation considérée R, il est toujours possible de donner des conditions suffisantes et/ou nécessaires assurant l'identifiabilité d'un vecteur x^0 c'est-à-dire le fait qu'il soit l'unique solution de

$$\arg\min_x R(x) + i_{Ax=Ax^0}(x). \tag{3.6}$$

En effet, on peut toujours formuler sous une forme ou une autre le fait que 0 appartient à la sous différentielle de la fonction ci-dessus au point x^0. C'est ce que nous faisons pour la minimisation ℓ_1 classique ou dite à la synthèse quand nous disons qu'un vecteur est identifiable si et seulement s'il existe un certificat dual fort associé à x^0.
Toutefois certaines conditions plus explicites peuvent être utiles comme l'ERC ou le critère IC qui peuvent se calculer en un temps nettement plus rapide que de résoudre un problème d'optimisation convexe.
Une des contributions principales de [VPDF13] a été de généraliser à la régularisation ℓ_1 analyse, les deux critères précédents c'est-à-dire de proposer des critères calculables relativement rapidement assurant l'identifiabilité pour une régularisation analyse.

Ainsi si l'on considère un opérateur D de $\mathbb{R}^P$ dans $\mathbb{R}^N$, on peut définir la notion de $D-$support d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^N$ comme l'ensemble I tel que $I = supp(D^*x)$ et le $D-$cosupport qui est le complémentaire de I que l'on note J.

Si on définit le problème d'optimisation suivant :

$$\arg\min_x \|D^*x\|_1 \text{ sous la contrainte } Ax = Ax^0, \tag{3.7}$$

on peut définir pour tout vecteur $s \in \{-1, 0, 1\}^P$ qui peut être vu comme un cosupport signé, une quantité $IC(s)$ qui dépend de A et de D qui assure que tout vecteur x^0 tel que $IC(\text{sign}(D^*x^0)) < 1$ est l'unique solution du problème d'optimisation ci-dessus. La formule exacte de IC nécessite d'introduire plusieurs définitions techniques et n'a pas un intérêt majeur, je renvoie le lecteur à [VPDF13] pour les formules exactes. Ce qu'il faut retenir c'est que cette condition $IC(s) < 1$ dans le cas où l'opérateur $D = Id$ est exactement la même que celle énoncée dans le cas synthèse par Fuchs [25]. Ce critère comme dans le cas de la minimisation ℓ_1 synthèse ne dépend que du $(D-)$support signé et pas de l'amplitude exacte des coefficients de D^*x^0. Comme pour la synthèse ce critère permet de donner des conditions de stabilité locale de la solution, voir [25] ou le chapitre sur la stabilité pour plus de détails.

De même qu'on a pu construire l'ERC à partir de IC en synthèse, on peut définir également une quantité analogue à l'ERC en analyse que nous avons appelée RC. Cette quantité qui généralise l'ERC ne dépend que du $D-$support de x^0 et permet de définir une condition suffisante d'identifiabilité par minimisation ℓ_1 analyse. Comme pour l'ERC nous avons proposé dans [VPDF13] des résultats théoriques de robustesse au bruit sous l'hypothèse $RC(I) < 1$ ainsi que des calculs effectifs des quantités IC et RC pour dans des cas classiques par exemple pour déterminer si des vecteurs sont identifiables par régularisation TV.

Chapitre 4

Stabilité

Dès que l'on veut aborder des problèmes pratiques se pose la question de la robustesse aux perturbations. Cette question de robustesse ou de consistance peut prendre plusieurs formes. Si on considère que

$$y = Ax^0 + b, \tag{4.1}$$

où b est un bruit déterministe ou aléatoire, que peut-on dire de la solution du BP ?

$$\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|y - Ax\|^2 + \lambda \|x\|_1 , \tag{4.2}$$

ou du problème contraint suivant ?

$$\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|_1 + i_{\|Ax-y\|\leqslant\varepsilon}(x), \tag{4.3}$$

dans le cas où x^0 est supposé identifiable ou pas ?
Peut-on donner une borne sur $\left\|x^0 - x^*\right\|_2$ où x^* est une solution de l'un ou l'autre problème ? Peut-on avoir un contrôle sur le support des solutions x^* ? Comment choisir λ ou ε en fonction du bruit ? Que se passe-t-il si x^0 n'est pas exactement identifiable mais est proche d'un vecteur identifiable ?
Cette dernière question est importante en pratique dans la mesure où les signaux réels ne sont que très rarement exactement parcimonieux et identifiables. La plupart des conditions d'identifiabilité nécessite un minimum de parcimonie et il peut être utile de proposer des théorèmes qui autorisent un défaut de parcimonie. C'est un des points forts de la théorie du CS qui permet de prendre en compte un défaut de parcimonie ℓ_1 qui est appelé compressibilité.

4.1 Les conditions de robustesse au bruit

Un état de l'art complet de la question est hors de portée. Notons dans un premier temps que l'approche CS utilisant des hypothèses d'isométries restreintes (RIP) proposées par Candès, Tao et Romberg (voir par exemple [10]) permet de prendre en compte des perturbations sur les mesures contrairement à l'approche de Donoho qui est essentiellement topologique. Ces hypothèses assurent que l'opérateur A agit sur les vecteurs parcimonieux presque comme une isométrie. Le défaut d'isométrie est mesuré par des constantes d'isométries restreintes. Dans le chapitre 7 je détaille l'approche par RIP et propose un algorithme d'estimation pratique de ces constantes. Une caractéristique principale de cette approche par RIP est qu'elle est globale, uniforme sur la parcimonie. Le problème est qu'elle ne permet pas de traiter une grande variété d'opérateurs A, de plus ces hypothèses RIP sont très restrictives comme nous verrons et difficilement vérifiables. Elles sont essentiellement applicables pour les matrices aléatoires. On peut noter cependant qu'une approche sans RIP du CS, reposant sur les certificats duaux a également été proposée plus tard par Candès et al. [8]. Une autre approche utilisant les épaisseurs gaussiennes a été proposée par Rudelson et al. [36] et Chandrasekaran et al. [43] et donne des résultats d'identifiabilité et de robustesse très fins dans le cadre des matrices gaussiennes. Ils permettent d'aller plus loin en terme de parcimonie par rapport à l'approche RIP et permettent une robustesse au bruit contrairement à une

approche topologique pure.

Remarque
Je profite de ce document pour faire remarquer au lecteur un point étonnant concernant la robustesse au bruit de la minimisation ℓ_1 utilisant des hypothèses sur les constantes d'isométries restreintes.

Toutes les preuves que j'ai pu lire, à l'instar de celle proposée par Candès et al. dans [10], découpent la différence $h = x^0 - x^*$ entre le vecteur original x^0 et le vecteur optimisant la fonctionnelle ℓ_1 en tranche de supports disjoints T_j et disjoints du support de x^0. Dans ces démonstrations les auteurs utilisent les constantes d'isométries restreintes pour contrôler les normes de $\left\|h_{T_j}\right\|$ restreintes à ces supports T_j. Or Wainwright [44] d'une part et D. et al. [DCPF12] ont montré qu'en deçà d'une parcimonie de $\frac{m}{2\ln n}$, avec grande probabilité pour une vecteur x^0 fixé, le support de x^0 et celui de x^* coïncident. Or une telle borne est en pratique nettement plus élevée que celle que l'on peut atteindre par RIP quand $n \leqslant 10^9$. Autrement dit si on se restreint aux bornes induites par le RIP que l'on peut trouver dans [4] pour évoquer les plus récentes alors en pratique on a presque toujours égalité des supports de x^0 et x^*, ce qui est un peu frustrant quand on voit que l'essentiel des preuves consiste à contrôler finement la restriction de h au complémentaire du support de x^0 h_{I^c}. C'est sans doute le prix à payer pour obtenir des bornes uniformes sur le cardinal du support.

Si on s'intéresse à des conditions locales, c'est-à-dire ne portant pas directement sur la parcimonie mais sur les conditions dépendant du support et du signe d'un vecteur donné x^0 on peut dégager trois résultats de stabilité importants :

- Si $ERC(I) < 1$ alors pour tout x_0 à support dans I et pour λ suffisamment grand, relativement à la norme du bruit b, la solution x^* de (4.2) est unique et son support est inclus dans I. De plus on peut contrôler $\left\|x^* - x^0\right\|$ à partir de $ERC(I)$ et de la matrice $(A_I^* A_I)^{-1}$, voir la proposition 3.1 de [BDP+13] et pour des résultats plus complets sur l'ERC l'article de Tropp [41]. La condition $ERC < 1$ assure une sorte d'étanchéité entre le support I et son complémentaire. Notons au passage que cette condition assure également la convergence vers x^0 d'algorithmes greedy comme Matching Pursuit (MP) et Orthogonal Matching Pursuit (OMP), voir Tropp [40].
- Si $IC(x^0) < 1$ alors on a stabilité du support et du signe de BP (c'est-à-dire que la solution de (4.2) est unique et a même support que celle de x^0) à petit bruit, c'est-à-dire si le bruit est suffisamment faible par rapport à la plus petite composante de x^0. Dans ce cas on a même une formulation explicite de la solution. La démonstration initiale se trouve dans Fuchs [26]. Il suffit d'écrire le fait que 0 appartient à la sous-différentielle de la fonction au point x^* de support I défini sur I par $x_I^* = x^0 + (A_I^* A_I)^{-1} A_I^t b - \lambda (A_I^* A_I)^{-1} \text{sign}(x_I^0)$.
  Cette propriété a été largement utilisée par la suite, par exemple par Candès et al. [7], par Wainwright [44] et par D. et al. [DT13] dans un cadre aléatoire.
- L'existence d'un certificat dual fort η permet une robustesse ℓ_2, pour les deux problèmes (4.2) et (4.3), c'est-à-dire que pour chacun des problèmes, si $\|b\| \leqslant \varepsilon$, toute solution de x_1^* de (4.3) et x_2^* de (4.2) pour un choix explicite de λ en fonction ε vérifie

  $$\left\|x_i^* - x^0\right\| \leqslant C_1(\eta)\varepsilon$$

  pour $i \in \{1, 2\}$, voir Grasmair et al. [27]. On peut noter toutefois que la borne $C(\eta)\varepsilon$ n'est pas aussi satisfaisante que celles que l'on peut obtenir en CS classique car le terme $C(\eta)$ est au moins de l'ordre de $\sqrt{\|x^0\|_0}$. Pour établir ces résultats les auteurs utilisent des contrôles sur la divergence de Bregman. On peut noter également qu'avec cette approche on obtient également des contrôles intéressants de $\left\|x_i^* - x^0\right\|_1$. Un autre élément important à souligner est que la borne est en fait valable pour tout vecteur admissible, c'est-à-dire dans le cas du problème (4.3) pour tout vecteur $\tilde{x}$ tel que $\|\tilde{x}\|_1 \leqslant \left\|x^0\right\|_1$ vérifiant $\|y - A\tilde{x}\| \leqslant \varepsilon$ et pas uniquement pour le minimiseur de (4.3).

4.2 Utilisation de IC et ERC

Dans les deux papiers [DCPF12] et [DT13] mes co-auteurs et moi-même avons utilisé la condition suffisante d'identifiabilité $IC(x^0) < 1$ pour démontrer que des vecteurs suffisamment parcimonieux étaient identifiables dans des contextes aléatoires, ces deux travaux sont décrits de manières plus détaillées dans

le chapitre 6.
Dans [BDP+13] nous proposons de chercher les vecteurs, pour une parcimonie donnée, dont les valeurs de IC et de ERC sont les plus grandes de manière à estimer la robustesse au bruit que l'on peut espérer dans le pire des cas pour un opérateur A fixé et pour une parcimonie S fixée. Les tests numériques montrent qu'optimiser ces quantités permet bien de trouver des vecteurs pour lesquels la robustesse au bruit est moins bonne que pour les autres vecteurs. Ce sont de bons indicateurs de la capacité locale de la régularisation ℓ_1 à stabiliser l'inversion d'un problème mal posé.

4.3 Utilisation des certificats duaux forts

Un des principaux résultats de Grasmair et al. [27], légèrement optimisé par D. et al. [DT13] assure que toute solution x^* de (4.3) vérifie :

$$\left\|x^* - x^0\right\| \leqslant C(\eta)\varepsilon, \tag{4.4}$$

avec

$$C(\eta) = 2\left(\left\|A_I^+\right\|_{2,2}\left(\left\|A_I^+\right\|_{2,2}\|A_J\|_{1,2}+1\right)Q(\eta)\right) \text{ où } Q(\eta) = \frac{\|\eta\|_2}{1-\|A_J^*\eta\|_\infty} \tag{4.5}$$

si η est un certificat dual fort associé à x^0 (voir définition 11) et où les normes d'opérateurs $\|\cdot\|_{p,q}$ sont les normes d'opérateurs $\ell_p - \ell_q$.
Cette borne est obtenue en bornant la divergence de Bregman. Il semble qu'elle ne soit pas très optimiste mais elle permet quand même de donner une borne sur l'erreur commise par un problème d'optimisation prenant en compte du bruit à partir d'un certificat dual du problème non bruité.
Dans [DT13], nous avons utilisé cette propriété dans un cadre de modèle de signaux aléatoires ainsi que le pré-certificat $d(x^0)$ pour compléter les travaux de Candès et al. [7] sur la robustesse au bruit de la minimisation ℓ_1. Ces résultats seront détaillés dans le chapitre 6.

La question que nous avons abordée dans [NDTB14] est celle de l'optimisation de cette borne par rapport à η. C'est-à-dire trouver un certificat dual fort η qui rend cette borne minimale pour un x^0 donné. Comme une partie de la borne ne dépend que du support I du vecteur x^0, l'optimisation de $C(\eta)$ est équivalente à la minimisation de $Q(\eta)$.
La convexité de $\eta \mapsto Q(\eta)$ n'est pas claire et son optimisation non triviale. On peut cependant résoudre ce problème géométriquement. En effet on peut montrer que $\frac{1}{Q(\eta)}$ correspond à la distance entre l'hyperplan $\mathcal{H}_\eta$ défini par $\langle \eta, u\rangle = 1$ et le polytope enveloppe convexe des points $(\pm a_j)_{j\notin I}$. On peut même réduire le problème de calcul de cette distance en projetant sur un sous espace adéquat :

Théorème 3. *Si on définit $\mathcal{L}(x^0) = Aff(\{sign(x_i^0 a_i) : i \in I)\})$, $K = \mathcal{L}(x^0)^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{L}(x^0)$, $\tilde{P}_J$ la projection orthogonale sur K du polytope enveloppe convexe des $(\pm a_j)_{j\notin I}$ et $d(x^0)^+ = \frac{d(x^0)}{\left\|d(x^0)\right\|_2^2}$ alors*

$$\min_\eta Q(\eta) = \frac{1}{\mathcal{D}(d(x^0)^+, \tilde{P}_J)}, \tag{4.6}$$

où $\mathcal{D}$ désigne la distance euclidienne.

On est alors amené à calculer la distance d'un point à un polytope. Ainsi tout algorithme de projection d'un point sur un convexe ou un polytope permet de calculer effectivement la valeur optimale de $Q(\eta)$.

Dans l'article, outre un algorithme de projection classique, nous proposons un algorithme greedy qui construit un certificat dual optimisant la valeur de $Q(\eta)$ à partir du pré-certificat $d(x^0)$, en faisant diminuer la valeur de $Q(\eta)$ à chaque étape. L'algorithme est détaillé dans le chapitre 7.

4.4 Stabilité pour la régularisation ℓ_1 analyse

Dans [VPDF13] nous avons proposé une généralisation des quantités IC et ERC qui permet d'établir des critères d'identifiabilité ℓ_1 pour la régularisation ℓ_1 analyse utilisant la notion de $D-$support. Comme

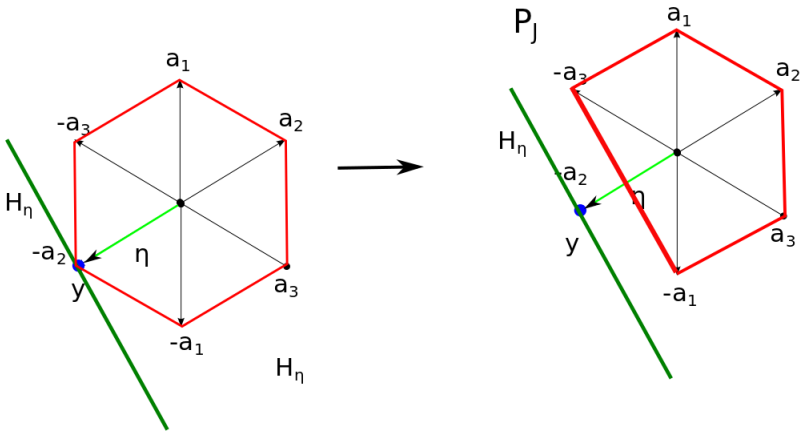


FIGURE 4.1 – Illustration du théorème 3. La robustesse ℓ_2 de la minimisation ℓ_1 au niveau d'un vecteur x^0 d'image $y = Ax^0$ est contrôlée par la distance entre un hyperplan H_η et un polytope tronquée $\tilde{P}_J$. L'optimum est atteint en calculant la distance d'un point à ce polytope tronqué.

pour le cas synthèse, $IC(s)$ se définit à partir d'un support signé et permet d'obtenir des résultats de robustesse au bruit, c'est-à-dire d'assurer que le problème d'optimisation

$$\arg\min_x \frac{1}{2} \left\| Ax^0 + b - Ax \right\|^2 + \lambda \left\| D^* x \right\|_1 \tag{4.7}$$

admet bien une unique solution x^* si le bruit b est suffisamment petit, si λ est bien choisi et que cette solution est proche de x^0 si $IC(sign(D^* x^0)) < 1$.
L'approche est similaire au cas de la minimisation ℓ_1 synthèse, on montre que la solution du problème ci-dessus est explicite et partage le même $D-$support que x^0. Nous proposons également des bornes d'erreur ℓ_2.

Chapitre 5

Calcul du degré de liberté

5.1 Introduction

Dans un problème de débruitage classique où l'on dispose d'une version bruitée y d'un vecteur x^0

$$y = x^0 + b, \tag{5.1}$$

où b est une réalisation d'un bruit blanc gaussien dont les composantes sont iid et de variance connue σ^2 on peut proposer des estimateurs $\tilde{x}$ de x^0. La qualité d'un estimateur $\tilde{x}$ peut se mesurer par le risque moyen R défini par

$$R = \mathbb{E}(\left\|x^0 - \tilde{x}\right\|^2). \tag{5.2}$$

Si on cherche le meilleur estimateur $\tilde{x}$ parmi une classe d'estimateurs dépendant d'un paramètre λ, on voudrait pouvoir atteindre l'estimateur $\tilde{x}(\lambda)$ qui minimise le risque R. Malheureusement le risque R dépend de x^0 qui n'est a priori pas connu. Ainsi la fonction qui à un estimateur $\tilde{x}$ associe son risque $R(\tilde{x})$ n'est pas accessible.

On peut cependant, dans certains cas, établir un estimateur $\hat{R}(\tilde{x})$ du risque $R(\tilde{x})$ ne nécessitant pas la connaissance de x^0. Si cet estimateur du risque est suffisamment précis, par exemple sans biais et avec une variance faible, on peut essayer d'estimer x^0 par l'estimateur $\tilde{x}$ qui minimise dans une classe donnée, la valeur de $\hat{R}$.

Si $y \in \mathbb{R}^n$, on peut remarquer que

$$\mathbb{E}(\left\|x^0 - \tilde{x}\right\|^2) = \mathbb{E}(\|y - \tilde{x}\|^2) - n\sigma^2 + 2\mathbb{E}(\langle b, \tilde{x}\rangle). \tag{5.3}$$

Définition 13. *On définit le degré de liberté (dof) d'un estimateur $\tilde{x}$ par la quantité suivante (Efron 1986)*

$$df(\tilde{x}) = \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}(\langle b, \tilde{x}\rangle) = \sum_{i=1}^{n} \frac{cov(y_i, \tilde{x}_i)}{\sigma^2}. \tag{5.4}$$

Ainsi si l'on est capable d'estimer le degré de liberté de $\tilde{x}$ on est capable d'estimer le risque R de cet estimateur.

Ce degré de liberté peut avoir une interprétation géométrique simple. Dans le cas d'un seuillage doux dans une base orthonormée, ce degré de liberté est égal au nombre de composantes non nulles de l'estimateur $\tilde{x}$. Ce nombre entier correspond aussi à la dimension de l'espace affine sur lequel varie localement l'estimateur $\tilde{x}$ quand on fait varier les observations y de manière infinitésimale. D'une manière générale, le degré de liberté n'est pas un entier mais dans le cas où l'estimateur est une fonction localement affine, il est égal à la dimension de l'espace affine sur lequel varie localement $\tilde{x}$.

Un cadre classique où il est possible d'estimer ce degré de liberté relativement simplement est celui où $\tilde{x}$ s'exprime comme une fonction $f(y)$ où f est faiblement différentiable par rapport à y. Ce cadre couvre par exemple les estimateurs linéaires, les seuillages doux dans des bases orthonormées mais pas les seuillages durs qui ne sont pas faiblement différentiables.

Dans ce cas, la fonction f est différentiable presque partout et on a le lemme de Stein :

Lemme 1.

$$\mathbb{E}\langle b, \tilde{x}\rangle = \sigma^2 \mathbb{E}\left(tr\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \sigma^2 \mathbb{E}(div(f(y))). \tag{5.5}$$

Ainsi si f est faiblement différentiable par rapport à y on peut estimer le risque d'un estimateur par le Stein Unbiased Risk Estimator, dit le SURE défini par

$$SURE = \|y - \tilde{x}\|^2 - n\sigma^2 + 2\sigma^2 tr\frac{\partial f(y)}{\partial y}, \tag{5.6}$$

qui est ainsi un estimateur non biaisé du risque R.

Ce chapitre se divise en deux parties. Dans un premier temps, nous étudions le degré de liberté de l'estimateur de prédiction associé au LASSO (ou au Basis Pursuit) qui permet d'estimer le SURE d'un tel estimateur et ainsi de proposer une règle pour fixer une valeur de λ optimale en un certain sens. Dans un second temps nous proposons d'étendre ces résultats à un estimateur obtenu par une minimisation ℓ_1 analyse. Nous introduirons au passage la notion de GSURE (Generalized Stein Unbiased Risk Estimator) permettant de calculer un risque plus général qu'un risque d'estimation et nous verrons comment la même approche permet de traiter des régularisations encore plus générales que la minimisation ℓ_1 analyse.

5.2 DOF pour le LASSO

Dans les chapitres précédents nous avons vu qu'il était possible d'estimer un vecteur x^0 à partir de mesures linéaires partielles et bruitées $y = Ax^0 + b = \mu^0 + b$ par le minimiseur $\tilde{x}(\lambda)$ défini de la manière suivante

$$\tilde{x}(\lambda) = \arg\min_x \frac{1}{2}\|y - Ax\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 . \tag{5.7}$$

Nous avons vu que sous un certain nombre d'hypothèses sur le triplet (A, x^0, b) on pouvait définir un réel λ tel que $\tilde{x}(\lambda)$ est proche de x^0. Le choix de λ est un problème en soi et peut dépendre des propriétés souhaitées de l'estimateur $\tilde{x}(\lambda)$. Ainsi on peut s'intéresser au contrôle du support de $\tilde{x}(\lambda)$ par rapport à celui de x^0 comme nous l'avons fait dans [VPDF13] ou en norme ℓ_1 ou ℓ_2 comme l'ont fait Grasmair et al. [27] et D. et al. [DT13] si on fait des hypothèses de contrôle ℓ_2 sur b.

La question à laquelle nous nous intéressons ici est de proposer une règle pour fixer le paramètre λ sous l'hypothèse que b est un bruit blanc, gaussien et de variance σ^2 connue de manière à s'approcher autant que possible du minimiseur du risque de prédiction $\mathbb{E}(\left\|\mu^0 - A\tilde{x}(\lambda)\right\|_2^2)$. Cette espérance prise sur b s'interprète comme le risque moyen de prédiction de l'estimateur $\tilde{\mu} = A\tilde{x}$.
On peut noter dès à présent que si aucune hypothèse n'est faite sur x^0 et A, $x(\lambda)$ n'est pas nécessairement défini de manière unique. En effet le LASSO peut admettre plusieurs solutions. Cela étant toutes les solutions du LASSO admettent la même image par A et ainsi pour un λ donné le vecteur $A\tilde{x}(\lambda)$ est défini de manière unique.

Comme il l'a été rappelé dans la section précédente, une manière de choisir λ est de déterminer la valeur de λ qui minimise le SURE défini par (5.6) c'est-à-dire de déterminer la valeur de λ telle que le SURE associé à l'estimateur $\mu(\lambda) = A\tilde{x}(\lambda)$ où $\tilde{x}(\lambda)$ est défini par (5.9) est minimal. Cette section reprend essentiellement les résultats développés dans [DKF$^+$13].

Le résultat principal de [DKF$^+$13], Théorème 1 et Corollaire 1, montre que le LASSO produit un estimateur $\mu(\lambda) = A\tilde{x}(\lambda)$ faiblement différentiable dont le degré de liberté est égal au minimum des tailles des supports des solutions $\tilde{x}(\lambda)$ de (5.9). De ce résultat on déduit le calcul du SURE et d'un λ optimal au sens du SURE.

Les deux difficultés qu'il faut lever pour arriver à un tel résultat sont les suivantes :

1. Montrer que pour tout λ la fonction $y \mapsto \mu(\lambda, y)$ est faiblement différentiable.
2. Estimer la valeur du DOF quand le LASSO admet plusieurs solutions.

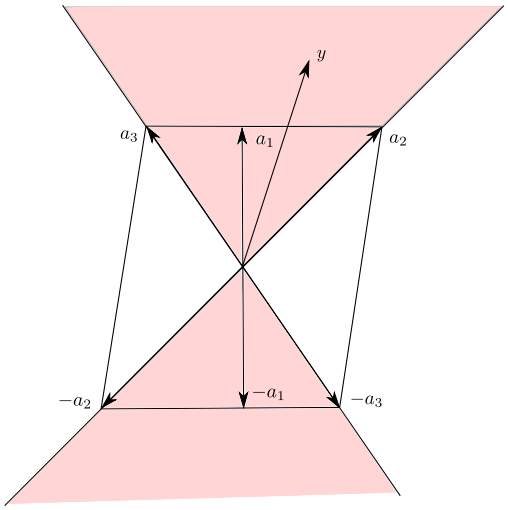


FIGURE 5.1 – Exemple de matrice A pour laquelle l'ensemble des points y pour lesquels 0 est sur le bord relatif de la sous différentielle de la fonction au point $\tilde{x}$ n'est pas de mesure nulle (cône coloré). Ce genre de configuration n'a lieu que si les colonnes de la matrice A sont des positions spécifiques, ici les colonnes a_i sont alignées. Pour tout point y à l'intérieur du cône coloré, il existe une infinité de solutions du LASSO qui n'ont pas toutes le même support, ce qui soulève quelques difficultés pour l'analyse théorique.

D'un point de vue formel le calcul du degré de liberté est assez simple. En effet la solution du LASSO vérifie une relation implicite

$$\tilde{x}_I(\lambda) = A_I^+ y - \lambda (A_I^* A_I)^{-1} \text{sign}(\tilde{x}_I) \text{ et } \tilde{x}_{I^c}(\lambda) = 0, \tag{5.8}$$

où I désigne le support de $\tilde{x}(\lambda)$.
Ainsi $\tilde{x}$ varie localement sur une espace affine dont la dimension est celle du cardinal de I. Pour autant quand on regarde les choses de plus près, certains problèmes apparaissent. La matrice $(A_I^* A_I)$ peut ne pas être inversible. On peut même avoir des solutions du LASSO avec des supports de cardinaux différents. De plus le degré de liberté peut ne pas être défini aux endroits où le support peut varier. Or la manière la plus simple d'établir que l'estimateur est faiblement différentiable est de montrer que l'ensemble des y au voisinage desquels la solution n'est pas localement affine est de mesure nulle. Ce point qui semble être un détail, n'est pas si simple et demande beaucoup d'attention même pour le LASSO. Pour les points y tels que 0 appartient à l'intérieur relatif de la sous différentielle de la fonction au point $\tilde{x}$, il n'y a pas de problèmes majeurs, en revanche il existe des matrices A pour lesquelles l'ensemble des points y pour lesquels 0 est sur le bord relatif de la sous différentielle de la fonction au point $\tilde{x}$ n'est pas de mesure nulle (voir figure 5.1). Dans ces situations là, il faut regarder de près comment la solution du LASSO varie localement.

Il faut également être vigilent quand on veut le généraliser à des régularisations comme la minimisation ℓ_1 analyse [VDP+13] ou des régularisations non polyédrales [VPF+13].

Un autre point délicat à régler est celui de l'existence d'une solution associée à une matrice $(A_I^* A_I)$ inversible, qui permet d'écrire une formule explicite de la solution locale du LASSO. Dans le cas du LASSO , une telle solution existe comme je l'avais montré par exemple dans [Dos11] via un algorithme constructif. Ici encore la généralisation à d'autres régularisations nécessite un peu de travail.

5.3 Calcul du DOF, extension à d'autres régularisations

Le premier travail d'extension du calcul du DOF à d'autres régularisations concerne la régularisation analyse [VDP+13]. Dans cet article nous étudions ainsi le DOF de l'estimateur $\tilde{\mu} = A\tilde{x}(\lambda)$ où $\tilde{x}(\lambda)$ est

un minimiseur de

$$\tilde{x}(\lambda) = \arg\min_x \frac{1}{2} \|y - Ax\|_2^2 + \lambda \|D^* x\|_1 , \tag{5.9}$$

toujours dans le but d'estimer le meilleur paramètre de régularisation λ au sens du SURE.

Dans le théorème 1, nous proposons une extension de l'équation implicite (5.8) et dans le théorème 2, nous proposons une formule pour le DOF dans ce nouveau cadre. Comme dans le cas du LASSO la difficulté ne réside pas dans la formule du DOF mais bien dans les conditions d'application des formules et en particulier dans le fait de montrer que l'estimateur est différentiable presque partout et ce quelle que soit la matrice A.

Une autre extension proposée dans cet article consiste à regarder d'autres risques que le risque de prédiction $\mathbb{E}(\left\|\mu^0 - \tilde{\mu}\right\|^2)$ (où $\mu^0 = Ax^0$) de la forme $\mathbb{E}(\left\|B\mu^0 - B\tilde{\mu}\right\|^2)$ où B est un opérateur linéaire. On définit ainsi le Generalized Stein Unbiased Risk Estimator (GSURE) de la manière suivante

$$GSURE^B(\tilde{x}(\lambda)) = \|B(y - \tilde{\mu}(\lambda))\|^2 - \sigma^2 tr(B^*B) + 2\sigma^2 \hat{df}^B(y), \tag{5.10}$$

où

$$\hat{df}^B(y) = tr\left(B \frac{\partial \tilde{\mu}(y)}{\partial y} B^*\right), \tag{5.11}$$

et on montre dans le théorème 3 que ce GSURE est un estimateur sans biais de $\mathbb{E}(\left\|B\mu^0 - B\tilde{\mu}\right\|^2)$. Si on choisit $B = Id$ on retrouve le résultat sur le SURE, mais on peut utiliser cette méthode pour d'autres choix de B. Par exemple si A est injective, on peut choisir $B = A^+$ la pseudo inverse de Moore-Penrose de A. Des illustrations numériques du calcul du GSURE et de l'estimation de paramètres pour $B = \Pi$ le projecteur orthogonal sur $Im(A^*)$ sont proposées dans les figures 5.2 et 5.3.

L'approche proposée pour le LASSO et la minimisation ℓ_1 analyse peut être étendue à d'autres régularisations comme par exemple à la minimisation dite $\ell_1 - \ell_2$ ou ℓ_1 par blocs, voir [VPF+13], qui n'est pas une régularisation polyédrale. Nous y proposons un calcul du DOF et du SURE dans ce cas. Cette fois-ci le DOF n'est pas toujours un nombre entier et les formules implicites et conditions d'inversions locales sont encore un peu plus complexes.
Le caractère non polyédral de la régularisation nécessite quelques ajustements dans les preuves en particulier pour montrer l'existence d'une solution associée à une matrice de rang maximal et pour justifier que l'ensemble des y pour lesquels le DOF n'est pas défini est de mesure nulle. Cet ensemble n'est en effet pas inclus dans une union fini d'hyperplans comme c'est le cas pour les régularisations polyédrales, mais il est défini comme le bord d'un ensemble suffisamment régulier. Ce sont dans ces derniers points que réside la difficulté du calcul du DOF pour les estimateurs utilisant une régularisation par norme nucléaire.

5.4 Illustrations numériques

Déconvolution par régularisation en ondelettes. Dans ce premier exemple, extrait de [DVP+12c], on veut estimer à l'aide du GSURE le meilleur paramètre de régularisation pour effectuer une déconvolution en minimisant une fonctionnelle de la forme

$$F(x) = \frac{1}{2} \|y - h \star x\|^2 + \lambda \|D^* x\|_1 , \tag{5.12}$$

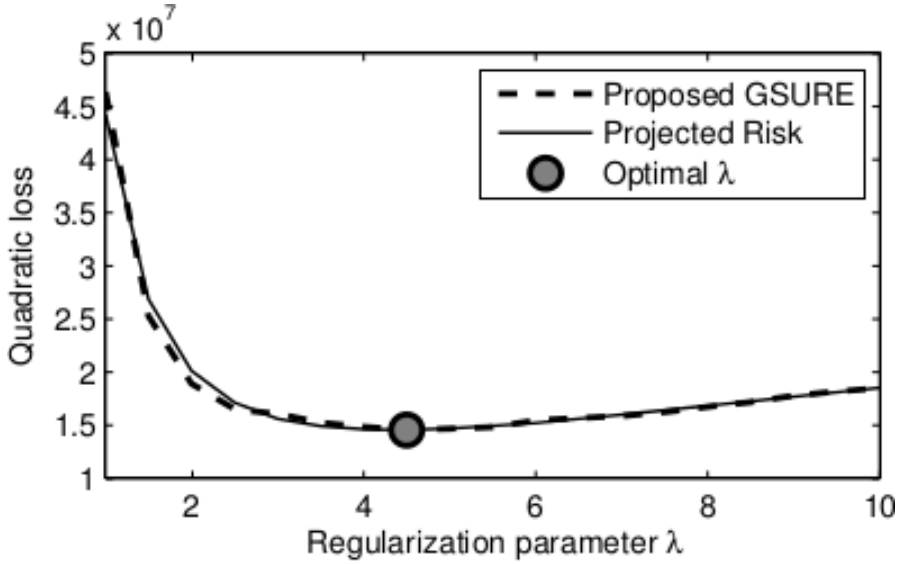
où D^* est une transformée en ondelettes orthogonale. On calcule le GSURE par rapport à la projection sur l'orthogonal du noyau de convolution h qui est ici un noyau à support compact proche d'une gaussienne, voir figure 5.2.

Régularisation par variation totale Dans ce second exemple, également extrait de [DVP+12c], on considère un opérateur A qui est un opérateur de mesures partielles aléatoires en DCT (50% des

coefficients conservés) et un opérateur D^* qui est l'opérateur de gradient discret ∇. On estime ainsi l'image à reconstruire en minimisant une fonctionnelle de la forme

$$F(x) = \frac{1}{2} \|y - Ax\|^2 + \lambda \|\nabla x\|_1 . \tag{5.13}$$

Le GSURE est calculé comme dans le cas précédent sur l'orthogonal du noyau du projecteur aléatoire A, voir figure 5.3.

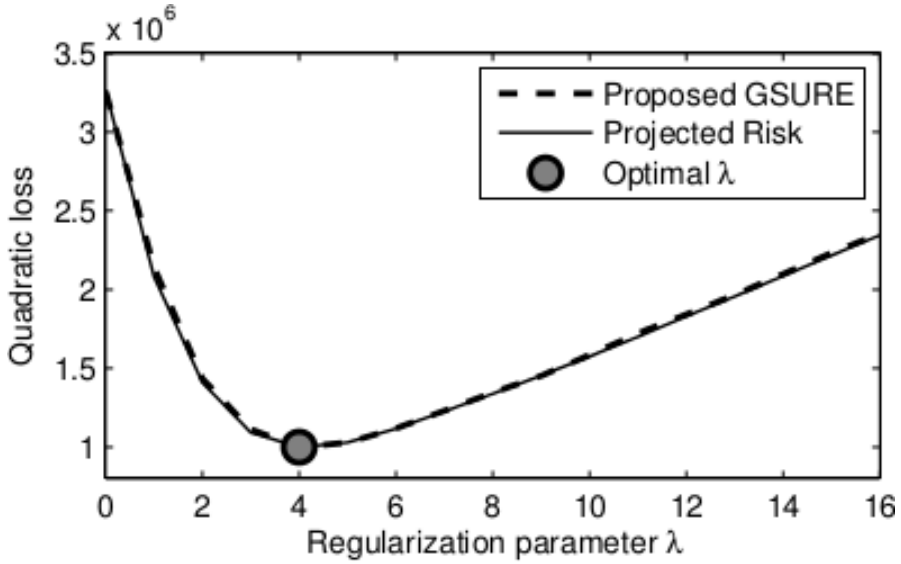


(a)

(b) y

(c) $\mu(y)$ at the optimal λ

FIGURE 5.2 – Déconvolution (flou gaussien) avec régularisation en ondelettes. (a) Risque projeté et *GSURE*. (b) y. (c) $\mu(y)$ pour la valeur de λ optimale.



(a)

(b) $\mu_0(y)$

(c) $\mu(y)$ at the optimal λ

FIGURE 5.3 – Reconstruction par variation totale à partir de mesures de DCT partielles. (a) Risque projeté et *GSURE* estimé. (b) $\mu_0(y)$. (c) $\mu(y)$ pour la valeur de λ optimale.

Chapitre 6

Identifiabilité pour des modèles aléatoires

Le fait que la minimisation ℓ_1 permette de reconstruire des vecteurs parcimonieux pour des problèmes linéaires inverses mal posés est connu depuis longtemps. Elle a par exemple été utilisée par Santosa et al. [38] pour l'inversion sismique. La compréhension de la performance de la minimisation ℓ_1 pour réaliser de telles inversions est encore incomplète dans nombre de situations. D'un point de vue optimisation la réponse est claire : un vecteur x^0 est solution du problème

$$\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|_1 + i_{y=Ax}(x) \tag{6.1}$$

pour $y = Ax^0$ si et seulement s'il existe un vecteur $\eta \in Im(A)$ tel que $A^*\eta \in \partial \|\cdot\|_1 (x^0)$.
La question qui se pose naturellement est de savoir pourquoi la grande majorité des vecteurs parcimonieux admet un certificat dual. Dans la plupart des problèmes où A est une matrice fixée, on peut trouver des vecteurs relativement parcimonieux pour lesquels ce n'est pas le cas. Voir par exemple [BDP$^+$13] pour la tomographie, ou un problème simple de déconvolution par un filtre passe bas où un petit jeu de spikes de signes variés et très proches est très rarement identifiable.
Les approches uniformes sur la parcimonie, comme celles utilisant les constantes d'isométries restreintes ne permettent pas de comprendre pourquoi en pratique beaucoup de vecteurs parcimonieux sont identifiables et même robustes au bruit. En effet, il y a souvent un fossé important entre la parcimonie en deçà de laquelle tous les vecteurs sont identifiables et celle en deçà de laquelle la grande majorité des vecteurs est identifiable. Ce fossé a été très bien quantifié pour les matrices gaussiennes par Donoho [20].
La question à laquelle nous avons essayé de répondre avec mes co-auteurs dans les articles [DCPF12] et [DT13], dans deux cadres aléatoires différents est de savoir pourquoi, si on s'intéresse non pas au pire cas mais au cas typique, des vecteurs relativement parcimonieux sont identifiables par minimisation ℓ_1 ? Plus précisément on va considérer un modèle aléatoire, dans un premier temps, sur la matrice et dans un second temps sur le vecteur et on va montrer qu'avec grande probabilité sur le choix d'un couple (A, x^0), le vecteur x^0 est identifiable par minimisation ℓ_1 pour la matrice A.

1. Dans [DCPF12] nous considérons une matrice A gaussienne et un bruit b gaussien et ne faisons pas d'hypothèse autre que la parcimonie sur x^0.
2. Dans [DT13] nous considérons une matrice déterministe A avec une hypothèse sur la cohérence et un modèle aléatoire sur x^0 proposé par Candès et al. dans [7].

La principale contribution du premier article [DCPF12] peut être résumée par le théorème suivant :

Théorème 4. *Soit $b \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|b\| \leqslant \varepsilon$, soient (α, β) deux réels tels que $0 \leqslant \alpha$ et $\beta < 1$ et soit $x^0 \in \mathbb{R}^N$ tel que*

$$\left\|x^0\right\|_0 = k \leqslant \frac{\alpha\beta n}{2\ln N} \tag{6.2}$$

et tel que

$$\min_{x_i^0\neq 0} |x_i^0| = T \geqslant \frac{5.5\varepsilon}{\sqrt{1-\alpha}}\sqrt{\frac{2\ln N}{n}} \tag{6.3}$$

alors avec une probabilité $P(n, N, \alpha, \beta)$ *qui tend vers 1 quand n tend vers* $+\infty$*, la solution* $x(\gamma)$ *du problème*

$$\arg\min_x \frac{1}{2} \|Ax_0 + b - Ax\|^2 + \lambda \|x\|_1 \tag{6.4}$$

avec $\gamma = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\alpha}} \sqrt{\frac{2 \ln N}{N}}$ *est unique et vérifie*

$$supp(x(\gamma)) = supp(x^0) \text{ et } sign(\overline{x(\gamma)}) = sign(\overline{x^0}). \tag{6.5}$$

Nous proposons par ailleurs une borne inférieure explicite de la probabilité $P(n, N, \alpha, \beta)$.

Ce résultat assure que si le vecteur x^0 est suffisamment parcimonieux et que le rapport signal sur bruit est suffisamment élevé alors on peut estimer le support et le signe de x^0 à partir de mesures aléatoires gaussiennes et perturbées par minimisation ℓ_1. La borne limite que l'on obtient sur la parcimonie est $\frac{n}{2 \ln N}$ qui est asymptotiquement moins bon que les résultats classiques obtenus par Donoho [22], par la théorie RIP [10] ou par épaisseurs gaussiennes [43] où les parcimonies que l'on peut atteindre sont de l'ordre de $O\left(\frac{n}{\ln \frac{N}{n}}\right)$. Cette différence est due au fait que l'on s'intéresse ici à la reconstruction du signe et du support de la solution et non pas de son identifiabilité ou de la robustesse au sens ℓ_2. Il s'avère que l'asymptotique est moins bonne dans ce cas mais que les constantes en jeu sont bien meilleures (ici $\frac{1}{2}$) ce qui fait que les bornes sur la parcimonie que l'on peut obtenir par cette approche sont meilleures que celles obtenues classiquement par la théorie RIP par exemple.
Dans ce même article nous proposons également différents résultats sur le contrôle de $x(\gamma) - x^0$ pour différentes normes.

Pour démontrer ces résultats, nous utilisons des contrôles sur les valeurs propres de matrices de Wishart pour montrer que le précertificat $d(x^0) = A_I(A_I^* A_I)^{-1}\text{sign}(x_I^0)$ est bien un certificat dual associé à x^0. C'est également en étudiant ce précertificat que Candès et al. [7] ont traité le cas d'une matrice déterministe vérifiant une condition de cohérence et de vecteurs dont le support et le signe sont tirés de manière aléatoire et uniforme parmi les vecteurs d'une parcimonie donnée.

Dans [DT13] nous proposons une extension de [7] en utilisant des résultats de Grasmair et al. [27] qui permettent d'obtenir un contrôle sur $\left\|x^* - x^0\right\|_2$ et sur $\left\|x^* - x^0\right\|_1$ où x^* est une solution quelconque de

$$\arg\min_x \|x\|_1 \text{ sous la contrainte } \|Ax_0 + b - Ax\| \leqslant \varepsilon,$$

sous l'hypothèse que x^0 est parcimonieux, que $\|b\| \leqslant \varepsilon$ sans faire d'hypothèses sur le rapport signal sur bruit et sans faire d'hypothèse de gaussianité sur le bruit.

Dans cet article nous reprenons les calculs de Candès et al. [7] et de Tropp [42] pour montrer que $d(x^0) = A_I(A_I^* A_I)^{-1}\text{sign}(x_I^0)$ est bien un certificat dual associé x^0 si x^0 est suffisamment parcimonieux. Nous utilisons pour cela de jolis résultats sur les valeurs singulières de matrices extraites aléatoirement de matrices déterministes ainsi que l'inégalité de Hoeffding pour exploiter le caractère aléatoire du signe de x^0.

Dans un second temps, nous utilisons les résultats de Grasmair et al. [27] pour donner des bornes sur $x^0 - x^*$ en fonction de ce certificat dual et nous explicitons toutes les termes intervenant dans la borne proposée dans [27]. Outre le fait qu'une telle approche permet de ne plus se limiter à un bruit gaussien ou même aléatoire et de ne pas imposer que la norme du bruit soit suffisamment petite, elle permet de traiter le cas des vecteurs compressibles, c'est à dire proches des vecteurs parcimonieux mais pas nécessairement parcimonieux. On peut noter au passage que les travaux de Grasmair et al. [27] permettraient d'étendre de manière similaire les résultats de [DCPF12].

Chapitre 7

Algorithmes pour la minimisation ℓ_1

Outre le problème de la minimisation de la fonctionnelle d'intérêt $F(x) = \frac{1}{2}\|y - Ax\|^2 + \lambda \|x\|_1$ ou $F(x) = \|x\|_1 + i_{y=Ax}(x)$, l'étude de ces problèmes peut mener à la détermination de certaines quantités qui ne sont pas toujours explicites, comme certaines bornes de robustesse au bruit, l'existence d'un certificat dual ou l'évaluation de constantes d'isométries restreintes. Pour répondre à un certain nombre de questions de ce type, j'ai mis au point tout au long de mes travaux différents algorithmes qui proposent une solution numérique à différents problèmes. Dans cette section nous décrivons brièvement ces différents algorithmes et leur intérêt. Nous verrons que la plupart d'entre eux sont fortement liés.
Nous étudierons ainsi

1. Un algorithme permettant de trouver une solution x^0 au problème de minimisation ℓ_1 synthèse et analyse, associée à une matrice de rang maximal et nous verrons l'intérêt d'un tel algorithme en particulier pour les problèmes de paramétrisation locale de la solution.
2. Un algorithme rapide pour établir si un vecteur est identifiable, qui peut être vu comme un algorithme de recherche de certificat dual.
3. Un algorithme de recherche de vecteurs parcimonieux et non identifiables pour la minimisation ℓ_1. Cet algorithme permet de mettre en évidence numériquement des résultats théoriques de Donoho sur l'identifiabilité dans un cadre gaussien.
4. Un algorithme d'estimation des constantes d'isométries restreintes pour une matrice fixée.
5. Un algorithme de recherche de certificat dual optimal relativement au contrôle de l'erreur $x^0 - x^*$ où x^* est une solution d'un problème de minimisation ℓ_1 sous forme contrainte.

7.1 Il existe une solution x^* telle que $(A_J^* A_J)^{-1}$ est inversible

Considérons le problème de minimisation ℓ_1 exact :

$$\arg\min_{x \in \mathcal{H}} \|x\|_1 + i_{Ay=x}, \tag{7.1}$$

ou n'importe quelle version du problème prenant en compte des perturbations comme le Basis Pursuit :

$$\arg\min_{x \in \mathcal{H}} \frac{1}{2}\|y - Ax\|^2 + \lambda \|x\|_1 . \tag{7.2}$$

Ces problèmes n'admettent pas nécessairement de solution unique. De plus une solution x^*, de support J, n'est pas toujours associée à une matrice A_J de rang cardinal de J (noté $|J|$). Cette propriété de rang est importante dans la mesure où la solution de (7.2) vérifie toujours la relation $A_J^*(y - Ax^*) = \lambda \text{sign}(x_J^*)$ qui découle simplement du fait que $0 \in \partial F(x^*)$ où $F(x) = \frac{1}{2}\|y - Ax\|^2 + \lambda \|x\|_1$. Si la matrice A_J est de rang $|J|$, ce qui est équivalent à dire que $(A_J^* A_J)$ est inversible, x^* vérifie ainsi la relation implicite

$$x_J^* = (A_J^* A_J)^{-1} A_J^* y - \lambda (A_J^* A_J)^{-1} \text{sign}(x_J^*). \tag{7.3}$$

Cette équation implicite permet d'étudier le comportement local de la solution x^* comme fonction de y ou de λ.
Dans [Dos11], je propose un algorithme constructif permettant de construire une solution associée à une matrice extraite de rang maximal à partir d'une solution quelconque. Cet algorithme démontre ainsi qu'il existe toujours une solution associée à une matrice de rang maximal, il a été étendu au cas de la minimisation ℓ_1 analyse. L'existence d'une telle solution facilite l'élaboration d'une formule d'inversion locale pour des problèmes d'étude de stabilité, même s'il n'est pas certain qu'elle soit indispensable.
On considère uniquement le problème (7.1) dans la mesure où toute solution x^* de (7.2) est une solution de (7.1) pour $y = Ax^*$. Ainsi si l'on montre que pour tout y, le problème (7.1) admet une solution associée à une matrice de rang max, c'est également valable pour toute solution de (7.2).

L'algorithme est élémentaire :

1. On part d'une solution x^* de (7.1), on note I_0 son support. Si $\text{rang}(A_{I_0}) = |I_0|$ alors on a trouvé une solution vérifiant la propriété souhaitée. Sinon il existe $h \in KerA_{I_0}$.
2. On considère alors l'application $t \mapsto \|x^* + th\|_1$ et on observe que cette fonction est localement constante au voisinage de 0 et qu'il existe une valeur maximale t_0 pour laquelle elle n'est plus constante. On montre que le support de la solution associé $x^* + t_0 h$ est strictement inclus dans I_0.
3. On itère le procédé jusqu'à obtenir une solution associée à une matrice A_J dont les colonnes sont libres.

Comme la régularisation analyse est associée à une jauge polyédrale, on peut généraliser l'algorithme au cas analyse pour trouver une solution associée à un sous espace sur lequel l'opérateur A est localement inversible, mais il semble difficile de l'appliquer à des régularisations plus variées.

7.2 Algorithme pour déterminer si un vecteur est identifiable

Comme il a été mentionné dans le chapitre 3, une contribution de l'article [Dos11] est de montrer que, sous réserve d'une condition de *position générale* des colonnes de la matrice A, l'ensemble des vecteurs identifiables est exactement la fermeture topologique des vecteurs vérifiant $IC(x^0) < 1$. De cette remarque on tire un algorithme pour déterminer rapidement si un vecteur est identifiable. Rappelons la définition de IC :

$$IC(x^0) = \max_{j \notin I} |\langle a_j, d(x^0)\rangle| \text{ où } d(x^0) = A_I(A_I^* A_I)^{-1}\text{sign}(x_I^0).$$

Si la matrice A_I associée à x^0 n'est pas de rang $|I|$, x^0 ne peut pas être l'unique solution de (7.1).
Rappelons que d'un point de vue géométrique le critère $IC < 1$ assure que l'hyper-plan $\mathcal{H}_d$ d'équation $\langle d, u\rangle = 1$ est tangent au polytope P image de la boule ℓ_1 par l'opérateur A au point $A\frac{x^0}{\|x^0\|_1}$ et que symétriquement l'hyper-plan $\mathcal{H}_{-d}$ d'équation $\langle -d, u\rangle = 1$ est tangent au polytope P au point $-A\frac{x^0}{\|x^0\|_1}$.
Ce qui est une autre manière de dire que $d(x^0)$ est un certificat dual associé à x^0.
L'algorithme repose sur la remarque suivante : *si un vecteur est dans la fermeture de l'ensemble des vecteurs tels que $IC < 1$ alors il existe une manière de lui ajouter des composantes telles que $IC < 1$.*
D'un point de vue géométrique, cette idée est liée au fait que toute $k-$face extérieure d'un polytope est une sous-face d'une $l - face$ extérieure associée elle-même à des vecteurs $IC < 1$.

L'idée de l'algorithme est de partir de x^0 et *de le compléter* en un vecteur x^1 tel que $IC(x^1) < 1$ en lui ajoutant des composantes de manière itérative en essayant de faire décroitre la valeur de IC à chaque étape. C'est un algorithme greedy.
On observe que $d(x^0)$ est un pré-certificat et on ajoute au support de x^0 la composante k qui maximise $|\langle a_j, d(x^0)\rangle|$ avec le signe de $\langle a_j, d(x^0)\rangle$. Si $d(x^0)$ n'est pas un certificat c'est que l'hyper-plan $\mathcal{H}_d$ n'est pas tangent au polytope P. Ses points d'appui sont les $(\text{sign}(x^0(i))a_i)_{i\in I}$. On cherche alors un point d'appui supplémentaire, celui qui est le plus éloigné du plan $\mathcal{H}_d$. Plus exactement on considère les deux plans symétriques $\mathcal{H}_d$ et $\mathcal{H}_{-d}$.
On itère le procédé jusqu'à obtenir soit une matrice A_J dont les colonnes engendrent l'espace vectoriel $Im(A)$ soit un vecteur tel que $IC < 1$. Une autre version un peu moins greedy, intégrant des étapes de suppressions de composantes inutiles a aussi été proposée. Des résultats numériques sont accessibles

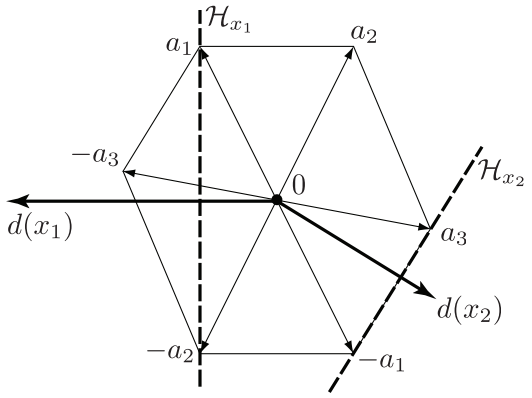


FIGURE 7.1 – On considère ici une matrice A, 2×3 et le polytope centro-symétrique associé. Soit $x_1 = (2, -3, 0)$, on peut définir $d(x_1)$ ainsi que l'hyperplan associé $\mathcal{H}_{x_1}$ qui est ici une droite et faire de même pour $x_2 = (-4, 0, 3)$. On observe que la droite $\mathcal{H}_{x_1}$ est plus proche de l'origine que la droite $\mathcal{H}_{x_2}$ et dans cet exemple x_1 n'est pas identifiable alors que x_2 l'est. C'est en maximisant la norme $\|d(x)\|_2$ que l'on obtient des vecteurs parcimonieux non identifiables.

dans [DP07a]. Sur des matrices aléatoires, l'algorithme permet d'identifier presque tous les vecteurs identifiables et il est d'autant plus rapide que x^0 est parcimonieux.

7.3 Algorithme de recherche de vecteurs parcimonieux non identifiables

Dans une série de travaux [19, 20, 22] D. Donoho, en étudiant les polytopes P, images de la boule ℓ_1 par des opérateurs aléatoires propose des bornes asymptotiques sur les transitions de phase de la minimisation ℓ_1. Pour des matrices gaussiennes de dimensions $m \times n$ avec $\delta = \frac{m}{n}$ il montre qu'il existe deux fonctions ρ_N et ρ_F qu'il explicite telle que la probabilité que

— Tous les vecteurs tels que $\|x\|_0 \leqslant \rho_N(\delta)m$ sont identifiables
— Pour tout $k \leqslant \rho_F(\delta)m$ la proportion de vecteurs de parcimonie k qui sont identifiables tend vers 1

quand n tend vers $+\infty$ tout en conservant le rapport de dimension $\delta = \frac{m}{n}$. Voir [20] pour des valeurs plus précises de ces fonctions.
Ainsi, il existe des parcimonies, pour lesquelles l'immense majorité des vecteurs sont identifiables mais pas tous.
Dans [DPF10] nous avons proposé un algorithme qui trouve ces vecteurs relativement parcimonieux mais qui ne sont pas identifiables. L'algorithme prend en entrée une matrice et renvoie un vecteur de la parcimonie la plus faible possible qui n'est pas identifiable par minimisation ℓ_1.
C'est un algorithme itératif qui va chercher à construire un vecteur x^0 dont le support est de cardinal k tel que $\left\|d(x^0)\right\|_2$ est aussi grande que possible.
En effet, comme nous l'avons montré dans [DPF10], la norme $\left\|d(x^0)\right\|_2$ est un indicateur sur le caractère identifiable d'un vecteur x^0. On peut le comprendre de deux manières. D'une part, plus $\left\|d(x^0)\right\|_2$ est grand plus les produits scalaires $|\langle a_j, d(x^0)\rangle|$ pour $j \notin I$ sont grands, et plus $IC(x^0)$ est grand. Après avoir manipulé l'algorithme précédent qui cherche à établir si un vecteur est identifiable, j'ai vite observé que les vecteurs qui posent problème, c'est-à-dire qui ne sont pas identifiables sont ceux pour lesquels $\left\|d(x^0)\right\|_2$ est la plus grande.
Le point de vue géométrique donne une vision encore plus claire : $\frac{1}{\left\|d(x^0)\right\|_2}$ est égal à la distance entre l'espace affine engendré par la $k-$face de P associée à x^0 et 0. Plus $d(x^0)_2$ est grande, plus cette distance est faible, et moins il y a de chance que cette k-face soit extérieure et donc que x^0 soit identifiable.

Ainsi chercher un vecteur tel que $\left\|d(x^0)\right\|_2$ est maximal, c'est chercher une face de la boule ℓ_1 de $\mathbb{R}^n$ dont l'image est la plus proche de 0.
L'idée de l'algorithme reprend celle du précédent en en prenant le contre pied :

- On part d'un vecteur x^0 avec une seule composante non nulle.
- On calcule pour tout $j \notin I$, les valeurs de $\langle a_j, d(x^0)\rangle$ et on ajoute à x^0 une composante à l'indice j_0 réalisant le maximum de $|\langle a_j, d(x^0)\rangle|$ **mais avec le signe opposé de** $\langle a_{j_0}, d(x^0)\rangle$, de manière à ce que la face associée au nouveau vecteur soit le plus proche de 0 possible.
- On itère jusqu'à la parcimonie k et on vérifie si le vecteur obtenu est identifiable.

Pour être plus précis, pour avoir une efficacité maximale, on considère toutes les composantes de départ possibles et on conserve à chaque étape, un nombre fixé de vecteurs candidats, ceux dont la valeur de $\|d(x)\|_2$ est la plus grande. Ainsi on ne fait pas évoluer un vecteur mais un ensemble de vecteurs dont certains amèneront à des vecteurs non identifiables.

Une variante de cet algorithme a été proposée dans [BDP$^+$13] pour estimer pour un opérateur fixé A, la parcimonie maximale en deçà de laquelle tout vecteur est identifiable. Si on considère un opérateur de tomographie à faible nombre d'angles de vues, on veut pouvoir estimer quelle complexité d'objet on va pouvoir reconstruire en fonction du nombre de vues. Cet algorithme permet de calibrer le nombre de vues en fonction de la parcimonie limite que l'on souhaite être capable de reconstruire. Les expériences numériques de [BDP$^+$13] sont faites en ce sens. La différence de la version proposée dans [BDP$^+$13] par rapport à celle de [DPF10] est que l'on ne se contente pas d'un simple produit scalaire pour la sélection des colonnes, mais on ajoute une étape d'inversion pour prendre en compte d'éventuelles corrélations fortes entre les colonnes de la matrice A. Nous montrons également comment utiliser cet algorithme pour avoir des estimations sur la robustesse au bruit de la minimisation ℓ_1 pour les vecteurs parcimonieux.

7.4 Algorithme pour estimer les constantes d'isométries restreintes

La théorie du CS proposée par Candès et Tao, dans une série d'articles (co-écrits avec Romberg pour certains) dont on peut citer par exemple [10, 12, 11] s'appuie sur la notion d'hypothèses (ou de propriétés) d'isométries restreintes. Pour toute parcimonie S on peut définir $\delta_S^{\max}$ et δ_S^{min} les plus petites valeurs telles que pour tout x tel que $\|x\|_0 \leqslant S$,

$$(1-\delta_S^{\min})\|x\|^2 \leqslant \|Ax\|^2 \leqslant (1+\delta_S^{max})\|x\|^2 .$$

On définit ensuite des conditions sur δ_S^{min} et δ_S^{max} qui assurent que tout vecteur x^0 dont la parcimonie est inférieure à S est identifiable par minimisation ℓ_1 et qu'il existe une constante C_δ dépendant des valeurs de δ_S^{min} et δ_S^{max} telle que la solution x^* de (4.3) vérifie $\left\|x^* - x^0\right\| \leqslant C_\delta \varepsilon$. Parmi les multiples conditions proposées dans la littérature on peut mentionner $\delta_S + \delta_{2S} + \delta_{3S} < 1$ où $\delta_S = \max(\delta_S^{min}, \delta_S^{max})$ proposée dans [10] ou

$$(4\sqrt{2}-3)\delta_{2S}^{min} + \delta_{2S}^{max} < 4(\sqrt{2}-1) \tag{7.4}$$

proposé par Foucart et al. [24]. Il a été montré par Candès et Tao [11] que ces différentes relations étaient vérifiées avec une probabilité tendant vers 1 quand m tend vers $+\infty$ pour des matrices gaussiennes A de dimension $m \times n$ pour des parcimonies S inférieures à $C\frac{m}{\log \frac{n}{m}}$ où C dépend de la condition choisie.

Cette approche utilisant les constantes d'isométrie restreintes soulève plusieurs difficultés :

- On ne connait pas à l'heure actuelle (2015) de familles de matrices déterministes vérifiant les conditions RIP pour des parcimonies de l'ordre de $O\left(\frac{m}{\log \frac{n}{m}}\right)$. Je ne suis pas certain que l'on sache faire bien mieux que $O\left(\sqrt{m}\right)$.
- Même pour les matrices aléatoires, cette propriété est vraie avec grande probabilité mais n'est pas certaine, bien entendu et surtout est presque invérifiable.
- Les constantes C sont souvent très faibles et ne permettent pas d'expliquer, loin s'en faut les performances de la minimisation ℓ_1 dans le cadre gaussien. Parmi les résultats les plus récents sur les valeurs de C, on peut mentionner les travaux de Ba et al. [4] qui permettent d'atteindre $C = \frac{1}{37}$ (voir Corollaire 2).

Ajoutons ici que les constantes d'isométries restreintes permettent également d'assurer la convergence d'algorithmes greedy tels l'Iterative Hard Thresholding (IHT), le Subspace Pursuit (SP) et le Compressed Sampling Matching Pursuit (CoSAMP), voir également [4].

Si la question de savoir jusqu'où les constantes d'isométrie restreintes permettaient d'aller en terme de parcimonie, en dehors de Davis et al. [18] rares ont été les travaux qui se sont posés la question de leurs limites . Dans [DPF10], nous avons proposé un algorithme d'estimation de borne inférieure des constantes d'isométrie restreintes pour une matrice donnée.

L'idée est assez simple : nous cherchons des sous-matrices extraites A_I de A, associées à un ensemble d'indice I de cardinal fixé dont les valeurs singulières maximales sont maximales ou dont les valeurs singulières minimales sont minimales.
Nous proposons deux algorithmes, l'un pour borner inférieurement δ_S^{min}, l'autre pour borner inférieurement δ_S^{max}.
Dans [DPF10] nous utilisons le fait (Proposition 2) que si x^0 est un vecteur de parcimonie S :

$$\delta_S^{max} \geqslant \frac{S}{\|d(x)\|_2^2} - 1 \quad \text{et} \quad \delta_S^{min} \geqslant 1 - \frac{S}{\|d(x)\|_2^2}. \tag{7.5}$$

Ainsi, l'algorithme pour borner δ_S^{min} est exactement le même que l'algorithme précédent qui cherche à déterminer un vecteur non identifiable, en effet la matrice extraite associée à ce vecteur a une valeur singulière minimale assez faible.
L'algorithme pour borner inférieurement δ_S^{max} revient ainsi à minimiser la norme $\|d(x)\|_2$:

- On part d'un vecteur x^0 avec une seule composante non nulle.
- On calcule pour tout $j \notin I$, les valeurs de $\langle a_j, d(x^0)\rangle$ et on ajoute à x^0 une composante à l'indice j_0 réalisant le minimum de $||\langle a_j, d(x^0)\rangle| - 1|$ **avec le signe de** $\langle a_{j_0}, d(x^0)\rangle$, pour modifier le moins possible le vecteur $d(x)$ à chaque étape pour que la face associée au nouveau vecteur soit le plus éloignée de 0 possible.
- On itère jusqu'à la parcimonie k.

Nous proposons également des interprétations géométriques de ces algorithmes dans le cas où les colonnes de A sont normées. On peut montrer que le problème de l'estimation de δ_S^{max} dans ce cas revient à l'estimation de la plus petite sphère qui contient S points parmi les $2m$ points $(\pm a_i)_{i \leqslant m}$.

7.5 Algorithme pour optimiser les bornes de robustesse au bruit

Dans le chapitre 4 nous avons vu que Grasmair et al. [27] ont montré que l'on pouvait contrôler l'erreur $\left\|x^* - x^0\right\|$ où x^* est une solution de

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|_1 + i_{\|y - Ax\| \leqslant \varepsilon}(x) \tag{7.6}$$

par une fonction dépendant d'un certificat dual fort. L'optimisation de cette borne conduit à la minimisation d'une quantité $Q(\eta) = \frac{\|\eta\|}{1 - \left\|A_{I^c}^* \eta\right\|_\infty}$. Dans ce même chapitre, nous avons vu que ce problème d'optimisation pouvait se réduire au problème du calcul de distance entre un point et un polytope. Ce calcul de distance nécessite un calcul de projection sur un convexe qui peut être coûteux d'un point de vue numérique. Dans [NDTB14], nous avons proposé un algorithme greedy alternatif qui permet de résoudre de manière approchée le problème de minimisation

$$\min_{\eta} \frac{\|\eta\|}{1 - \|A_{I^c}^* \eta\|_\infty} \text{ sous la contrainte que } A^*\eta \in \partial \|\cdot\|_1 (x^0). \tag{7.7}$$

Cet algorithme est plus rapide qu'un algorithme de projection et produit une valeur de $Q(\eta)$ très proche de la valeur optimale calculée par projection.
La recherche d'un tel vecteur η optimisant $Q(\eta)$ se fait en deux temps :

- d'abord on cherche un certificat dual,
- ensuite on essaie de modifier ce certificat de manière continue en faisant diminuer la valeur de $Q(\eta)$.

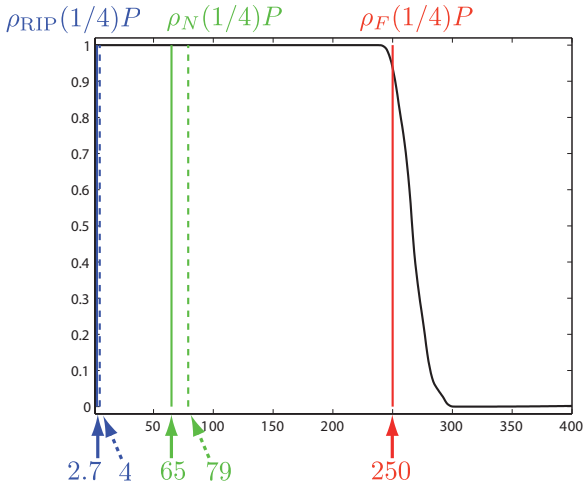


FIGURE 7.2 – Proportion de vecteurs identifiables par minimisation ℓ_1 en fonction de la parcimonie pour une matrice A gaussienne ayant 1000 lignes et 4000 colonnes. Le trait rouge à la parcimonie 250 correspond à la valeur théorique prédite par Donoho [19] en deçà de laquelle la proportion de vecteurs identifiables est proche de 1. La valeur 65 en vert est la parcimonie en deçà de laquelle tous les vecteurs sont identifiables. La valeur 2.7 est la parcimonie limite où les bornes RIP (7.4) s'appliquent. Nos algorithmes permettent de montrer d'une part que la borne (7.4) n'est plus valable à partir d'une parcimonie de 4 et d'autre part construisent un vecteur ayant 79 composantes non nulles qui n'est pas identifiable. Un tel vecteur est tellement rare qu'il est impossible de le chercher au hasard en un temps raisonnable.

La recherche de certificat se fait de manière assez similaire au deuxième algorithme décrit dans ce chapitre : on part de $\eta_0 = d(x^0)$ et on modifie de manière affine η_0 de manière à faire diminuer la valeur de $\max_{j \notin I} |\langle a_j, \eta \rangle|$ en cherchant la meilleure direction de descente dans l'orthogonal de l'espace vectoriel engendré par les $(a_i)_{i \in I}$. Cette restriction permet d'avoir à chaque étape un vecteur η tel que $A_I^* \eta = \text{sign}(x_I^0)$. Si on atteint une valeur inférieure à 1, on obtient un certificat dual.
On détermine localement une direction de descente de $Q(\eta)$ et on met à jour la direction de descente à chaque fois qu'une nouvelle composante de $A_j^* \eta$ sature. Voir [NDTB14] pour une description complète.

Deuxième partie

Convergence et stabilité de FISTA et autres sur-relaxations de Forward-Backward.

Chapitre 8

Convergence des itérés de FISTA

8.1 Introduction

Nous considérerons ici un problème d'optimisation spécifique défini sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Nous supposerons qu'une fonction F vérifie les hypothèses **H1** si

Hypothèses H1 :

F est une fonction convexe définie sur $\mathcal{H}$ somme de deux fonctions f et g convexes, propres et semi continues inférieurement. De plus f est différentiable (au sens de Fréchet) et ∇f est une application $L-$Lipschitz et pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur proximal de λg est calculable.

Dans la suite nous considérerons le problème suivant :

$$\min_{x\in\mathcal{H}} F(x) = \min_{x\in\mathcal{H}} f(x) + g(x). \tag{8.1}$$

Le problème du LASSO (ou BP) entre bien entendu dans ce cadre assez général. Une très vaste littérature d'analyse convexe a permis de mettre en place un large éventail d'algorithmes dits *proximaux* pour résoudre le problème (8.1). On peut citer par exemple, le Forward-Backward, le Primal Dual de Chambolle et Pock, l'algorithme de Douglas-Rachford, l'ADMM et sa version préconditionnée, le Forward-Backward-Forward. Dans cette partie nous nous concentrerons sur une version inertielle de Forward-Backward, proposée par Beck et Teboulle [6] en 2008 appelée FISTA (Fast Iterative thresholding Algorithm) à partir des travaux de Nesterov [33] et Güler [29]. Dans [6] les auteurs démontrent qu'on peut atteindre une vitesse de convergence sur l'objective en $0(\frac{1}{n^2})$ où n est le nombre d'itérations mais ne donnent pas de preuve de convergence forte ou faible des itérés.

Du fait de sa vitesse de convergence optimale, Nesterov ayant montré qu'on ne pouvait pas espérer une meilleure vitesse de décroissance avec des méthodes d'ordre 1 [33], FISTA est un algorithme largement utilisé dans la communauté optimisation et particulièrement en traitement d'images. Les illustrations du papier de Beck et Teboulle sont d'ailleurs des problèmes inverses en traitement d'images (débruitage et déconvolution).

Dans ce premier chapitre consacré à FISTA nous résumons les arguments proposés dans [CD15] qui permettent de démontrer la convergence faible des itérés de FISTA pour un choix adéquat des paramètres. Ce problème était un problème ouvert depuis la description de cet algorithme par ses auteurs.

8.2 Algorithme Forward-Backward (FB)

Si F peut s'exprimer comme la somme de deux fonctions f et g convexes, sci, propres, si f est différentiable et à gradient $L - Lipschitz$ et si F admet un minimiseur alors l'algorithme Forward-Backward permet de construire une suite qui converge faiblement vers un minimiseur de F. Le FB ne nécessite pas le calcul de prox_F mais uniquement celui de prox_g et est basé sur l'opérateur suivant :

$$T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \tag{8.2}$$

$$x \longmapsto prox_{\gamma g}(x - \gamma\nabla f(x)), \tag{8.3}$$

où γ est un réel choisi dans l'intervalle $]0, \frac{2}{L}[$. L'algorithme Forward-Backward construit une suite vérifiant $x_{n+1} = Tx_n$, pour tout $x_0 \in \mathcal{H}$. L'intérêt de cet algorithme réside dans la proposition suivante :

Proposition 5. *Pour tout $x_0 \in \mathcal{H}$, et pour tout $\gamma \in]0, \frac{2}{L}[$ la suite définie par $x_{n+1} = Tx_n$ converge faiblement vers un minimiseur x^* de F. De plus on a*

$$F(x_n) - F(x^*) = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{8.4}$$

La preuve de la convergence faible vers un minimiseur repose sur le fait que l'opérateur T est fermement non expansif et que les points fixes de T sont les minimiseurs de F. On pourra trouver une démonstration de la vitesse de convergence de l'objective en $O\left(\frac{1}{n}\right)$ dans [6].
On peut noter que chaque étape de cet algorithme se réduit à un seuillage doux et à une descente de gradient à pas fixe si la fonction g est une norme ℓ_1. C'est pour cette raison que ce même algorithme est parfois appelé *Iterative Soft Thresholding Algorithm* ou ISTA. Cette dénomination est fréquente dans la communauté Image.

8.3 FISTA

8.3.1 Définition et premières propriétés

FISTA pour Fast Iterative Soft Thresholding Algorithm proposé par Beck et Teboulle [6] est une accélération de FB reposant sur une sur-relaxation de ce dernier.

Définition 14. *Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $t_1 = 1$ et*

$$\forall n \geqslant 1,\ t_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{t_n^2 + \frac{1}{4}}, \tag{8.5}$$

et soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\alpha_n = \frac{t_n - 1}{t_{n+1}}$ et $x_0 \in \mathcal{H}$.
FISTA est l'algorithme qui définit les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$y_0 = x_0 \tag{8.6}$$
$$\forall n \geqslant 1,\ x_n = T(y_{n-1}), \tag{8.7}$$
$$\forall n \geqslant 1,\ y_n = x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1}). \tag{8.8}$$

On peut définir d'autres sur-relaxations de FB à l'aide de toute suite de réels croissante telle que $t_1 = 1$ et vérifiant la relation suivante

$$t_n^2 - t_{n+1}^2 - t_{n+1} \geqslant 0. \tag{8.9}$$

et appliquer l'analyse de Beck et Teboulle mais la suite proposée par ces derniers correspond au choix de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assurant l'égalité dans l'inégalité (8.9) et induit la meilleure borne dans le théorème suivant :

Théorème 5. Thm 4.4 [6]
Si la fonction F est coercive et vérifie l'hypothèse **H1**, *si la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie* (8.9) *et si x^* est un minimiseur de F alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ produite par FISTA vérifie*

$$F(x_n) - F(x^*) \leqslant \frac{1}{2\gamma t_n^2} \|x_0 - x^*\|^2. \tag{8.10}$$

Comme le choix (8.5) assure que $t_n \geqslant \frac{n+1}{2}$ on en déduit que pour ce choix de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a le contrôle suivant :

$$F(x_n) - F(x^*) \leqslant \frac{2}{(n+1)^2\gamma} \|x_0 - x^*\|^2. \tag{8.11}$$

La même borne reste valable pour le choix $t_n = \frac{n+1}{2}$ qui vérifie (8.9) et qui correspond à $\alpha_n = \frac{n+1}{n-2}$, également utilisé en pratique dans de nombreux articles.
On peut noter que contrairement à FB, FISTA n'est pas un algorithme de descente et en pratique la

suite $F(x_n)$ est rarement décroissante, Beck et Teboulle ont proposé une version monotone de FISTA appelée MFISTA [5] mais la convergence des itérés n'est pas garantie pour cette version non plus.
L'algorithme FISTA induit dans de nombreuses situations une meilleure vitesse de convergence de $F(x_n) - F(x^*)$ que FB. Un des principaux défauts de FISTA est son absence de convergence. En effet, encore à ce jour, il n'existe pas de preuve de convergence de la suite des itérés $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de FISTA pour le choix originel (8.5). La preuve de convergence de $F(x_n) - F(x^*)$ permet de montrer facilement que toute valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un minimiseur de F mais il n'est pas démontré que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas *tourner à l'infini* au fond d'une cuvette dans le cas où il existe un ensemble infini de minimiseurs.

8.3.2 Convergence de la suite des itérés

La contribution principale de l'article [CD15] est le théorème suivant :

Théorème 6. *Soit F une fonction vérifiant l'hypothèse* **H1** *admettant au moins un minimiseur, si $x_0 \in \mathcal{H}$, si a est un réel strictement supérieur à 2 et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par*

$$t_n = \frac{n+a-1}{a} \quad \forall n \geqslant 1, \tag{8.12}$$

alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par FISTA converge faiblement vers un minimiseur x^* de F et de plus

$$F(x_n) - F(x^*) \leqslant \frac{a^2}{2\gamma(n+a-1)^2} \|x_0 - x^*\|^2 . \tag{8.13}$$

On peut noter tout d'abord que le choix $t_n = \frac{n+1-a}{a}$ vérifie bien l'hypothèse (8.9) si $a > 2$ dans la mesure où

$$\rho_{n+1} := t_n - t_{n+1}^2 + t_{n+1} = \frac{(a-2)n + (a-1)^2}{a^2} \geqslant 0 \quad \forall n \geqslant 1. \tag{8.14}$$

La démonstration de ce théorème utilise les inégalités qui relient étroitement les deux suites $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$w_n := F(x_n) - F(\tilde{x}) \quad \delta_n = \frac{1}{2}\|x_n - x_{n-1}\|^2 \tag{8.15}$$

où $\tilde{x}$ est un minimiseur quelconque de F.

La démonstration du théorème 6 peut être décomposée en trois étapes :

1. En reprenant la preuve originale de Beck et Teboulle, on montre que si t_n est défini par (8.12), la série de terme général nw_n est convergente.
2. On montre ensuite que la convergence de la série de terme général nw_n implique la convergence de la série de terme général $n\delta_n$.
3. En utilisant des arguments de Attouch et al. [1] repris par Moudafi et al. [32] et Lorenz et al. [30], on montre enfin que la convergence de la série de terme général $n\delta_n$ implique la convergence faible des itérés $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Avant de donner les principaux éléments de la démonstration qui est in extenso et détaillée dans [CD15], on peut noter que le fait que la suite $(nw_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartienne à ℓ_1 pour un choix adéquat de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un résultat complémentaire au fait bien connu que la suite $(n^2 w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartienne à ℓ_∞.
Sans être une propriété plus forte, elle indique que même s'il est impossible d'établir une meilleure décroissance que $w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ en utilisant uniquement le gradient et l'opérateur proximal, on a $\liminf_n n^2 w_n = 0$ et ainsi même si on ne peut borner w_n d'une manière générale que par $\frac{C}{n^2}$, cette borne est relativement pessimiste pour certaines valeurs de n pour une fonction f donnée. Ce qui est observé numériquement. La borne en $\frac{C}{n^2}$ n'est qu'une borne mais pas un reflet précis du comportement réel de w_n.

1. La démonstration de ce premier point s'appuie sur le théorème suivant qui précise le théorème 5 de Beck et Teboulle :

Théorème 7. *Si la suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la relation (8.9) et que $t_1 = 1$ et si $\gamma \leqslant \frac{1}{L}$ alors pour tout $N \geqslant 2$,*

$$t_{N+1}^2 w_{N+1} + \sum_{n=1}^{N} \rho_{n+1} w_n \leqslant v_1 - v_{N+1}, \tag{8.16}$$

où $v_n := \frac{1}{2\gamma} \|-t_n x_n + \tilde{x} + (t_n - 1)x_{n-1}\|^2$.

Pour démontrer ce théorème, on reprend la structure de la démonstration de Beck et Teboulle [6] sur le contrôle de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui utilise la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut utiliser l'inégalité suivante valable pour tout couple $(x, \bar{x}) \in \mathcal{H}$ et qui découle du caractère fortement convexe de la fonction définissant l'opérateur proximal :

$$F(x) + \frac{\|x - \bar{x}\|^2}{2\gamma} \geqslant F(Tx) + \frac{\|x - T\bar{x}\|^2}{2\gamma}. \tag{8.17}$$

En appliquant cette inégalité aux points $x = \frac{(t_{n+1}-1)x_n + \tilde{x}}{t_{n+1}}$ et $\bar{x} = y_n$ on obtient

$$t_{n+1}^2 w_{n+1} + v_{n+1} + (t_n^2 - t_{n+1}^2 + t_{n+1}) w_n \leqslant t_n^2 w_n + v_n. \tag{8.18}$$

Comme la suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la relation (8.9), on déduit que $\rho_{n+1} := t_n^2 - t_{n+1}^2 + t_{n+1} \geqslant 0$ et la conclusion du théorème 7 est obtenue en sommant (8.18) pour $n = 1$ à $n = N$.
Muni de ce théorème on observe juste que si on fait le choix $t_n = \frac{n+a-1}{a}$ avec $a > 2$, on a $\rho_n = \frac{(a-2)n+(a-1)^2}{a^2}$, et en faisant tendre N vers $+\infty$ dans le théorème précédent on déduit que la série de terme général nw_n est convergente.

2. Pour démontrer le deuxième point on s'appuie à nouveau sur l'inégalité (8.17). En appliquant cette relation aux points $x = x_n$ et $\bar{x} = y_n$ et en utilisant $\alpha_n = \frac{n-1}{n+a}$ on déduit que

$$(n + a)^2 \delta_{n+1} - (n - 1)^2 \delta_n \leqslant \gamma(n + a)^2 (w_n - w_{n+1}). \tag{8.19}$$

En sommant cette inégalité sur $n \in \mathbb{N}$ on déduit que

$$a \sum_{n\geq 2} (2n + a - 2)\delta_n \leqslant \gamma \left((a + 1)^2 (w_1) + \sum_{n\geq 2} (2n + 2a - 1)(w_n) \right).$$

Comme la série de terme général nw_n est convergente, la série de terme général $n\delta_n$ est convergente.

3. Pour démontrer le troisième point, on considère deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la relation (8.6) pour une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $]0, 1[$ qu'on ne spécifie pas dans un premier temps à FISTA. On note $\tilde{x}$ un minimiseur de F et on définit

$$\Phi_n := \frac{1}{2} \|x_n - \tilde{x}\|^2 .$$

En suivant l'approche d'Attouch et al. [1], on utilise le théorème d'Opial pour montrer que la convergence de la suite réelle Φ_n implique la convergence faible de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En utilisant les propriétés de monotonie de la sous différentielle de g et le caractère cocoercif du gradient de f, on montre que la convergence de la suite $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est assurée par la convergence de la série de terme général

$$\delta_j \sum_{n=j}^{+\infty} \prod_{l=j}^{n} \alpha_l. \tag{8.20}$$

Les précédents travaux utilisant cette approche, font une hypothèse du type $\alpha_n \leqslant \alpha < 1$, mais cette hypothèse n'est pas réalisée dans le cas de FISTA. Si on spécifie la valeur de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au cas de FISTA, on déduit que la convergence faible de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est conditionnée à la convergence de la série de terme général $j\delta_j$, ce qui conclut la démonstration.

FIGURE 8.1 – Image du gauche : l'image masquée y^0. Image de droite : une image $\hat{x}$ en minimisant F avec FISTA.

FIGURE 8.2 – Image de gauche : une image floue y^0. Image de droite : une image $\hat{x}$ estimée en minimisant G avec FISTA.

8.4 Illustration numérique

Pour illustrer numériquement les performance de FISTA nous proposons ici deux exemples classiques en traitement des images.

Le premier exemple est celui de l'inpaiting, avec ici un masque aléatoire. On reconstruit l'image de droite en minimisant une fonctionnelle de la forme

$$F(x) = \frac{1}{2} \left\| y^0 - Mx \right\|_2^2 + \lambda \left\| Tx \right\|_1 , \tag{8.21}$$

où M est l'opérateur de masquage et T une transformée en ondelettes de Daubechies.

Le second exemple est un exemple de déconvolution. On reconstruit l'image de droite à partir de celle de gauche en minimisant une fonctionnelle de la forme

$$G(x) = \frac{1}{2} \left\| y^0 - h \star x \right\|_2^2 + \lambda \left\| Tx \right\|_1 , \tag{8.22}$$

où h est le noyau de convolution et T une transformée en ondelettes de Daubechies.

Dans les différents tests effectués, la valeur exacte du paramètre a n'a pas d'influence cruciale sur la vitesse de convergence et sur les résultats numériques observés.

Chapitre 9

Convergence et stabilité aux perturbations de sur-relaxations de FB

9.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons démontré la convergence faible de la suite des itérés de FISTA pour un choix adéquat de paramètres $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour une fonction F vérifiant les hypothèses **H1**. Dans ce chapitre, dont les résultats sont in extenso dans Aujol et al. [AD15], nous étudions la convergence des itérés ainsi que la vitesse de convergence de la suite d'une famille de versions sur-relaxées de FB quand les calculs des opérateurs proximaux et des gradients sont entâchés d'erreur. Dans tout le chapitre qui suit nous supposerons que la fonction F vérifie l'hypothèse **H1** et de plus qu'elle est **coercive**, c'est-à-dire que $\lim_{\|x\|\to+\infty} F(x) = +\infty$. Cette hypothèse n'est pas utile pour l'algorithme non perturbé mais sera indispensable pour gérer les erreurs. Cette famille contient en particulier la version de FISTA proposée dans [CD15].
La question de la robustesse d'un algorithme aux erreurs est essentielle si on envisage des applications pratiques et FB et FISTA sont des algorithmes utilisés dans de nombreux domaines. Dans l'article où ils présentent FISTA [6], les auteurs indiquent que FISTA semble souffrir d'une stabilité moindre par rapport à FB. C'est pour cette raison qu'ils proposent une version monotone de FISTA appelée MFISTA [5] quelques années plus tard qui stabilise l'agorithme tout en conservant la même vitesse de décroissance de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Même s'il est difficile de montrer que FISTA est plus instable que FB, les bornes connues sur le contrôle de la suite de l'objective $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ confirment cette différence entre FISTA et FB. Il a été prouvé que la convergence faible ainsi que la vitesse de décroissance ergodique de FB n'étaient pas altérées par des erreurs sommables [34, 17]. L'impact d'erreurs sur la vitesse de convergence de la suite $w_n = F(x_n) - F(x^*)$ pour FISTA a été étudié par Schmidt et al. [39] et par Salzo et al. [37] pour deux types d'erreur différents. Il s'avère qu'une condition plus restrictive que pour FB sur les erreurs est nécessaire pour assurer la vitesse de convergence optimale de FISTA. De plus, il existe des régimes d'erreur (fortes erreurs) où les bornes proposées par Schmidt et al. [39] et Salzo et al. [37] sur w_n sont moins bonnes pour FISTA que pour FB. Cette moindre stabilité de FISTA a une explication raisonnable. Le terme inertiel $\alpha_n(x_n - x_{n-1})$ propage une information d'une étape à l'autre. Ainsi si une erreur est commise à une étape n, elle aura un impact sur x_{n+1} mais également via le terme inertiel qui crée un effet *boule de neige*. Cette amplification de l'erreur apparaît nettement dans les démonstrations. Une diminution du terme d'inertie permet ainsi de limiter l'impact des erreurs à long terme.

Ajoutons que la convergence des itérés d'une sur-relaxation de FB ($\alpha_n < \alpha < 1$) dans un cadre prenant en compte des erreurs a été étudiée par Moudafi et al. [32].
Dans cette partie trois types de convergence sont étudiés :

- La convergence de la suite des itérés $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- la convergence de la suite des objectives $(w_n)_{n\in_N}$,
- la convergence ergodique, c'est-à-dire de la suite $w_n^e = F(z_n) - F(\tilde{x})$ où z_n est une combinaison convexe des $(x_k)_{k\leqslant n}$ et $\tilde{x}$ un minimiseur de F.

9.2 Prox approché et état de l'art

9.2.1 Définitions

Si F est une fonction convexe définie sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, y un élément de $\mathcal{H}$ et λ un réel strictement positif, l'application G_λ définie sur $\mathcal{H}$ par

$$G_\lambda(x) = F(x) + \frac{1}{2\lambda}\|x-y\|^2 \tag{9.1}$$

est une application fortement convexe dont le minimiseur est par définition $z = \text{prox}_F^\lambda(y)$.
Une première propriété du point proximal z est ainsi

$$z = \text{prox}_F^\lambda(y) \Leftrightarrow 0 \in \partial G_\lambda(z). \tag{9.2}$$

Une seconde propriété du même point est

$$z = \text{prox}_F^\lambda(y) \Leftrightarrow \frac{y-z}{\lambda} \in \partial F(z). \tag{9.3}$$

Ainsi on peut définir le point proximal de plusieurs manières à l'aide de la sous-différentielle.
Une manière naturelle d'étendre la notion de sous-différentielle est la notion de $\varepsilon-$sous-différentielle. Elle est définie de la manière suivante :

$$\partial_\varepsilon F(z) = \{y \in \mathcal{H} \,|\, F(x) \geqslant F(z) + \langle x-z, y\rangle - \varepsilon,\ \forall x \in \mathcal{H}\}. \tag{9.4}$$

On peut observer que

$$0 \in \partial_\varepsilon F(z) \Leftrightarrow F(z) \leqslant inf F + \varepsilon. \tag{9.5}$$

Une première manière de considérer une approximation du prox est d'utiliser la notion de ε-sous-différentielle et la caractérisation (9.2) du prox :

Définition 15. *On dira que $z \in \mathcal{H}$ est une approximation de type 1 de $prox_F^\lambda(y)$ avec une précision ε et on notera $z \approx_1 prox_F^\lambda(y)$ si et seulement si*

$$0 \in \partial_\varepsilon G_\lambda(z). \tag{9.6}$$

C'est cette définition du prox approché qui est utilisée dans [39].
Une troisième définition utilise la $\varepsilon-$sous-différentielle et l'autre caractérisation du prox (9.3).

Définition 16. *On dira que $z \in \mathcal{H}$ est une approximation de type 2 de $prox_F^\lambda(y)$ avec une précision ε et on notera $z \approx_2 prox_F^\lambda(y)$ si et seulement si*

$$\frac{y-z}{\lambda} \in \partial_\varepsilon F(z). \tag{9.7}$$

C'est cette dernière définition qui est utilisée dans [37] pour établir la vitesse de convergence de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un cadre perturbé.
Il existe une troisième manière de définir un prox approché utilisée par Moudafi et al. [32] exploitant la définition de ε élargissement d'opérateur monotone.
Dans ce chapitre comme dans [AD15], nous nous concentrons sur les approximations de types 1 et 2. L'approximation de type 3 quant à elle est la plus forte car elle implique toutes les autres.
Dans la proposition 2 de [39], les auteurs montrent que l'approximation de type 2 est plus contraignante que l'approximation de type 1 au sens où si $z \approx_2 \text{prox}_F^\lambda(y)$ alors $z \approx_1 \text{prox}_F^\lambda(y)$ et que la réciproque n'est vraie (avec un ε légèrement différent) que si F est fortement convexe. Nous verrons que ce caractère plus contraignant de l'approximation de type 2 se retrouvera sur les contraintes sur l'erreur.
En ce qui concerne l'erreur commise sur le calcul du gradient nous n'avons considéré qu'une erreur au sens ℓ_2 car c'est ce qui semble le plus naturel et que c'est le seul modèle qui semble être étudié (voir [39]).
Ces définitions permettent de définir un algorithme inertiel de FB approché. Comme dans FISTA nous considérons un terme inertiel de la forme $\alpha_n(x_n - x_{n-1})$ où la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépend d'une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Algorithm 1 Algorithme FB inertiel approché

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $x_0 \in \mathcal{H}$, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par $y_0 = u_0 = x_0$ et pour tout $n \geqslant 1$,

$$x_n = T_{e_n}^{\epsilon_n}(y_{n-1}) \tag{9.8}$$

$$y_n = \left(1 - \frac{1}{t_{n+1}}\right) x_n + \frac{1}{t_{n+1}} u_n \tag{9.9}$$

$$u_n = x_{n-1} + t_n(x_n - x_{n-1}). \tag{9.10}$$

avec

$$T_{e_n}^{\epsilon_n}(x) \approx_i \operatorname{prox}_{\gamma g}(x - \gamma(e_n + \nabla f(x))) \text{ avec } \varepsilon_n \text{ precision et } i \in \{2, 3\} \tag{9.11}$$

Le point y_n peut aussi être défini à partir des points x_n et x_{n-1} de la manière suivante

$$y_n = x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1}) \text{ où } \alpha_n := \frac{t_n - 1}{t_{n+1}} \tag{9.12}$$

que nous ne spécifions pas pour le moment : Dans la suite nous ne considérerons que des suites $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme suivante :

$$t_n = \left(\frac{n + a - 1}{a}\right)^d \tag{9.13}$$

où (a, d) vérifie l'hypothèse **H2** définie ci après :

Définition 17. *Le couple (a, d) vérifie l'hypothèse* **H2** *si*

$$d \in [0, 1] \text{ et } a > \max(1, (2d)^{\frac{1}{d}}). \tag{9.14}$$

On peut remarquer que le choix $d = 0$ correspond à FB et que le choix $d = 1$ et $a > 2$ correspond à la version de FISTA proposée par Chambolle et D. dans [CD15] et vérifie l'hypothèse **H2**. Cette propriété assure que pour tout $n \geqslant 2$, $t_{n-1}^2 - t_n^2 + t_n \geqslant 0$ et plus précisémenent que cette quantité est de l'ordre de n^d :

$$\rho_n := t_{n-1}^2 - t_n^2 + t_n \geqslant \left(\frac{1}{a^d} - \frac{2d}{a^{2d}}\right)(n + a - 1)^d \text{où } \left(\frac{1}{a^d} - \frac{2d}{a^{2d}}\right) > 0 \tag{9.15}$$

9.2.2 État de l'art

Le cas où (a, d) vérifie l'hypothèse **H2** et $d < 1$ a été très peu étudié dans la littérature car il n'y a pas d'intérêt évident à choisir $d < 1$ pour effectuer une sur-relaxation de FISTA dans la mesure où la vitesse de convergence vers 0 de w_n est en $O\left(\frac{1}{n^{2d}}\right)$ comme nous le verrons plus tard, en l'absence de bruit ce qui est strictement moins bon que FISTA. Il semble que de telles sur-relaxations supposées sous-optimales n'aient pas été étudiées. De même si $d = 1$ alors l'hypothèse **H2** impose que $a > 2$ ce qui est une variante de FISTA presque jamais utilisée à l'exception de [CD15]. La grande majorité des théorèmes sur FISTA sont également valables pour $d = 1$ et $a > 2$. C'est le cas des résultats de Salzo et Villa [37] et de Schmidt et al. [39]. Les résultats que nous proposons dans la section suivante sur le contrôle de w_n généralisent les résultats de ces deux articles au sens où les travaux de Salzo et al. et de Schmidt et al. correspondent au cas $d = 1$ respectivement pour une erreur de type 2 et de type 1. Nous verrons que le cas $d = 1$ n'est optimal que pour des régimes d'erreur faible.

En ce qui concerne la convergence des itérés d'algorithmes sur-relaxés de FB, elle a été étudiée par Moudafi et al. [32] mais uniquement dans le cas d'une suite de paramètre $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformément bornée par $\alpha < 1$. Dans le cas des sur-relaxations que nous proposons le paramètre α_n tend toujours vers 1, ce qui induit des conditions sur les erreurs plus restrictives que celles proposées par Moudafi et al. pour assurer la convergence faible des itérés.

9.3 Vitesse de convergence de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour FB inertiel perturbé

Dans cette section on étudie la vitesse de convergence de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toujours définie par $w_n = F(x_n) - F(x^*)$ où x^* est un minimiseur de F.
L'essentiel des résultats s'appuie sur une proposition qui est une généralisation de la proposition 2 de Schmidt et al. [39] pour des couples (a, d) vérifiant l'hypothèse **H2** qui est elle même une généralisation d'un résultat de Beck et Teboulle [6] obtenue en sommant l'inégalité (8.18) et en incluant des perturbations sur le prox et le gradient. La différence notable est la somme faisant intervenir $\rho_n w_{n-1}$ qui sera cruciale pour la suite et qui est nulle pour l'algorithme FISTA classique.

Proposition 6. *Considérons l'algorithme 1 avec $i \in \{1, 2\}$ et une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $t_1 = 1$ et la suite $(\rho_n)_{n\geqslant 2}$ est positive. Alors pour tout $n \geqslant 1$, on a*

$$t_N^2 w_N + \sum_{n=2}^{N} \rho_n w_{n-1} + \frac{1}{2\gamma}\|u_N - x^*\|^2 \leqslant \frac{1}{2\gamma}\left(\|u_0 - x^*\| + 2A_{i,N} + \sqrt{2B_N}\right)^2 \tag{9.16}$$

avec

$$A_{2,n} = \gamma \sum_{k=1}^{n} t_k \|e_k\| \tag{9.17}$$

et

$$A_{1,n} = \sum_{k=1}^{n} t_k \left(\gamma\|e_k\| + \sqrt{2\gamma\varepsilon_k}\right) \tag{9.18}$$

et

$$B_n = \gamma \sum_{k=1}^{n} t_k^2 \varepsilon_k. \tag{9.19}$$

Cette proposition permet de contrôler la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $\|u_0 - x^*\|$ et des suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Elle permet en outre d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 8. *Considérons l'algorithme 1 avec $i \in \{1, 2\}$, Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées : il existe A_1, A_2 et B réels positifs tels que*

1.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^d \sqrt{\varepsilon_n} \leqslant A_1 \text{ if } i = 1 \text{ dans l'algorithme 1.} \tag{9.20}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2d} \varepsilon_n \leqslant A_2 \text{ Si } i = 2 \text{ dans l'algorithme 1.} \tag{9.21}$$

2.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^d \|e_n\| \leqslant B. \tag{9.22}$$

Alors

1. *La suite $(n^d w_n)_{\in\mathbb{N}}$ appartient à $\ell_1(\mathbb{N})$.*
2. *La suite $(n^{2d} w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\ell_\infty(\mathbb{N})$.*
3. *La suite $(n^{2d}\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\ell_\infty(\mathbb{N})$.*
4. *Si on définit $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (k + a - 1)^d \text{ and } z_n = \frac{1}{s_n}\sum_{k=1}^{n} (k + a)^d x_k. \tag{9.23}$$

il existe $C_1 > 0$ dépendant de a, d, A_i, B et $\|u_0 - x^*\|$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n^e := F(z_n) - F(x^*) \leqslant \frac{C_1}{n^{d+1}} \tag{9.24}$$

Ce théorème assure que si les erreurs admettent un moment d'ordre d fini alors l'algorithme FB inertiel approché produit une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la vitesse de convergence est asymptotiquement la même que la vitesse calculée sans perturbation.
Il faut noter ici que les résultats sur la convergence ergodique peuvent être obtenus parce que ρ_n est de l'ordre de n^d c'est-à-dire pour des choix de paramètres qui ne sont pas limite pour assurer la positivité de $t_n^2 - t_{n+1}^2 + t_{n+1}$. Or paradoxalement, le choix original de Beck et Teboulle correspond justement à ce cas critique qui lui a l'avantage de produire une borne optimale pour un n donné.
Pour $d = 1$ c'est-à-dire pour FISTA on retrouve les mêmes conclusions que Salzo et al. [37] et Schmidt et al. [39] pour chacun des types d'erreurs considérés. En revanche si ces moments d'ordre d ne sont pas finis (moment d'ordre 1 pour FISTA) alors la borne que l'on obtient sur w_n est moins bonne comme l'indique la proposition suivante concernant FISTA :

Proposition 7. *1. Si $i = 1$, $d = 1$, (a, d) vérifie l'hypothèse* **H2** *et $\alpha \in]0, 1[$ et si*

$$\|e_n\| = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}(\ln n)^2}\right) \text{ et } \sqrt{\varepsilon_n} = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}(\ln n)^2}\right)$$

alors

$$w_n = O\left(\frac{n^{-2\alpha}}{(\ln n)^4}\right) \text{ et } w_n^e = O\left(\frac{n^{-2\alpha}}{(\ln n)^4}\right).$$

2. Si $i = 2$, $d = 1$, (a, d) vérifie l'hypothèse **H2** *et $\alpha \in]0, 1[$ et si*

$$\|e_n\| = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}(\ln n)^2}\right) \text{ et } \sqrt{\varepsilon_n} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}(\ln n)^2}\right)$$

alors

$$w_n = O\left(\frac{n^{-2\alpha}}{(\ln n)^4}\right) \text{ et } w_n^e = O\left(\frac{n^{-2\alpha}}{(\ln n)^4}\right)$$

On voit ici la différence entre les deux définitions de l'erreur sur le prox où la condition sur ε_n est un peu moins restrictive pour $i = 2$ que pour $i = 1$ pour obtenir le même contrôle sur w_n. Ceci illustre le fait que l'approximation au sens 2 est plus forte que l'approximation au sens 1.
Cette proposition reprend les résultats de Salzo et al. [37] et Schmidt et al. [39] en y ajoutant un résultat sur la convergence ergodique (w_n^e) qui n'est pas valable pour la version classique de FISTA mais uniquement pour celles proposées par Chambolle et D. [CD15] avec $a > 2$.
Si α est proche de 1, les erreurs considérées sont assez faibles et les bornes obtenues sur w_n sont assez bonnes, en revanche si α est proche de 0, les bornes ne sont pas bonnes. Elles sont même moins bonnes que celle que l'on peut obtenir sur FB, voir Combettes et al. [17]. En effet pour $\alpha \geqslant 0$, les erreurs restent sommables et il a été démontré qu'avec de telles erreurs la vitesse de convergence ergodique de FB est en $O(\frac{1}{n})$, voir la proposition 1 de [39]. Même si les bornes obtenues pour FISTA pour des valeurs de α proches de 1 sont correctes, on peut les améliorer en utilisant un autre choix de d, c'est-à-dire une autre sur-relaxation mais uniquement si on considère la convergence ergodique.

Proposition 8. *1. Si $i = 1$, si $\alpha \in]0, 1[$, si a est tel que (a, α) vérifie l'hypothèse* **H2** *et*

$$\|e_n\| = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}(\ln n)^2}\right) \text{ et } \sqrt{\varepsilon_n} = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}(\ln n)^2}\right)$$

alors en choisissant $t_n = \left(\frac{n+a-1}{a}\right)^\alpha$ dans l'algorithme 1,

$$w_n = O\left(n^{-2\alpha}\right) \text{ et } w_n^e = O\left(n^{-1-\alpha}\right)$$

2. Si $i = 2$, if $\alpha \in]0, 1[$, if a est tel que (a, α) vérifie l'hypothèse **H2** *et*

$$\|e_n\| = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}(\ln n)^2}\right) \text{ et } \sqrt{\varepsilon_n} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}(\ln n)^2}\right)$$

alors en choisissant $t_n = \left(\frac{n+a-1}{a}\right)^\alpha$ dans l'algorithme 1,

$$w_n = O\left(n^{-2\alpha}\right) \text{ and } w_n^e = O\left(n^{-1-\alpha}\right)$$

Remarquons qu'en prenant $a > 2$ on est certain que (a, α) vérifie l'hypothèse **H2**.
L'intérêt de cette proposition réside essentiellement dans la vitesse de convergence ergodique qui est meilleure que celle de FISTA, en ergodique ou en non-ergodique et qui est meilleure que celle de FB. Ainsi, si l'on adapte la sur-relaxation de FB au niveau de bruit, on tire profit de la sur-relaxation pour accélérer FB tout en limitant l'effet d'amplification des erreurs dû à cette même sur-relaxation.
Dans la section suivante, nous montrons qu'une telle sur-relaxation permet de plus d'assurer la convergence faible des itérés.

9.4 Convergence des itérés pour FB inertiel perturbé

Si les perturbations sont trop grandes il est difficile de montrer la convergence d'un algorithme inertiel car les erreurs se propagent d'une étape à l'autre. En revanche si ces dernières sont suffisamment faibles, on peut établir la convergence faible des itérés :

Théorème 9. *Considérons l'algorithme 1 avec $i \in \{1, 2\}$. Supposons que (a, d) vérifie l'hypothèse* **H2** *et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = \left(\frac{n+a-1}{a}\right)^d$. Supposons que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

1.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2d} \varepsilon_n < +\infty \quad \textit{Si } i = 2 \textit{ dans l'algorithme 1.} \tag{9.25}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{d} \sqrt{\varepsilon_n} < +\infty \quad \textit{Si } i = 1 \textit{ dans l'algorithme 1.} \tag{9.26}$$

2.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{d} \|e_n\| < +\infty \tag{9.27}$$

Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ produite par l'algorithme 1 converge faiblement vers un minimiseur de F.

On peut remarquer que la condition sur les erreurs assurant la convergence faible de FISTA ($d = 1$) est la même que celle qui assure la vitesse de convergence optimale sur l'objective. Ainsi il existe des niveaux de perturbation qui n'ont pas d'impact ni sur la performance de l'algorithme, ni sur la convergence faible. Mais si le niveau de bruit est tel que la vitesse de convergence de FISTA n'est plus optimale, alors il est préférable de considérer une autre sur-relaxation de FB qui assurera une meilleure convergence ergodique et une convergence faible des itérés.
La démonstration de ce résultat reprend à la fois la preuve proposée par Chambolle et D. [CD15] et celle proposée par Moudafi et al. dans [32]. Elle nécessite cependant un peu de technicité pour contrôler le terme $\sum_{n\geqslant j} \prod_{l=j}^{n} \alpha_l$ dans le cas où $d < 1$.

9.5 Validation numérique

Le théorème 8 indique que les bornes sur la vitesse de convergence ergodique peuvent être meilleures pour une sur-relaxation de FB qui n'est pas FISTA pour certains niveaux de bruit.

Le fait que cette borne soit plus basse ne garantit pas que la décroissance de $F(z_n) - F(x^*)$ soit meilleure pour une sur-relaxation adéquate de FB. Un exemple classique d'algorithme dont les bornes sur la vitesse de convergence ne rendent pas totalement compte de la vitesse réelle de convergence est la version originale de FISTA. Il est connu depuis la création de cet algorithme que la suite $F(x_n) - F(x^*)$ est oscillante et que pour la plupart des valeurs de n la borne $\frac{\|x_0 - x^*\|}{2(n+1)^2}$ proposée par [6] n'est pas optimale. Pour tester ces bornes, nous devons être capables de borner les erreurs sur le gradient et sur l'opérateur proximal à chaque étape.
Nous proposons ici une application sur de l'inpainting 1D en ondelettes qui illustre l'intérêt d'une version

inertielle de FB qui n'est pas FISTA et qui montre également que la convergence ergodique peut être meilleure que la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous considérons un signal $1D$, $x^0 \in \mathbb{R}^N$, régulier par morceaux, M un opérateur de masquage aléatoire et nous voulons estimer x^0 à partir de $y = Mx$ en résolvant

$$\min_x \frac{1}{2} \|y - Mx\|_2^2 + \|Tx\|_1 \tag{9.28}$$

où T est une transformée en ondelettes de Daubechies.

Pour résoudre (9.28) on considère $f = \frac{1}{2}\|y - M\cdot\|_2^2$ et $g = \|T\cdot\|_1$ et nous utilisons FB, FISTA et iFB avec $d = 0.5$. Ici l'opérateur proximal de g est un seuillage doux en ondelettes. L'algorithme iFB peut être décrit de la manière suivante :

$$x_n = y_{n-1} - \gamma S(y_n - \gamma M y_n, \gamma\lambda) \text{ et } y_n = x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1}), \tag{9.29}$$

où $S(x,t)$ est un seuillage doux en ondelettes avec un seuil égal à t. Le paramètre γ est fixé à 0.99. Nous considérons l'algorithme perturbé suivant

$$x_n = y_{n-1} - \gamma S(y_n - \gamma M y_n, \gamma\lambda) + e_n \text{ et } y_n = x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1}), \tag{9.30}$$

où (e_n) est une suite de vecteurs aléatoires tels que $\forall n \geqslant 1$, $\|e_n\| = \frac{C}{n^\beta}$ pour un C et un β fixés et dont la direction est uniformément distribuée sur la sphère unité de $\mathbb{R}^N$.
Plusieurs valeurs de β ont été testées. Pour chaque algorithme la courbe associée est la moyenne sur 50 trajectoires.

Pour les petites valeurs de β, correspondant à de fortes perturbations, FB est plus stable, pour les grandes valeurs de β FISTA est plus efficace et pour les valeurs intermédaires de β l'algorithme iFB avec $d = 0.5$ donne un meilleur résultat que les deux autres algorithmes.

Notons que si l'on considère la convergence ergodique, l'algorithme iFB (avec $d = 0.5$) donne de meilleurs résultats que les deux autres, sauf quand les perturbations sont très faibles.

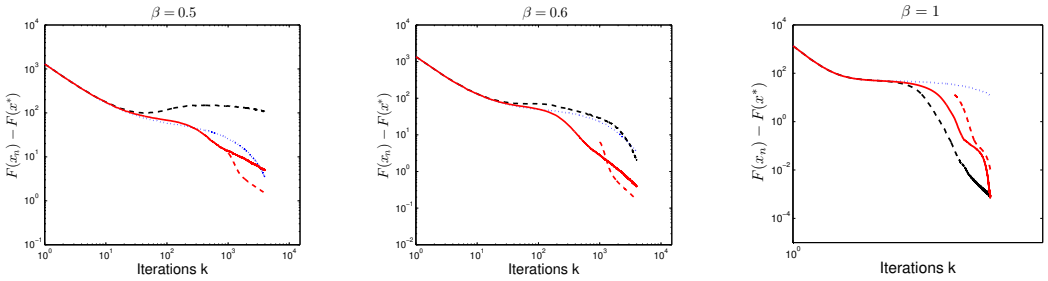


FIGURE 9.1 – Valeurs de $F(x_n) - F(x^*)$ en fonction de n, FB courbe pointillée bleu, FISTA courbe discontinue noire, iFB avec $d = 0.5$ courbe continue rouge, IFB ergodique où z_n est calculé à partir des 1000 dernières itérations courbe rouge discontinue. β est fixé à 0.5 sur la gauche (fortes perturbations), 0.6 au milieu, et un sur la droite (faibles pertubations). Comme prédit par la théorie, FISTA induit une meilleure vitesse de convergence quand les perturbations sont faibles et FB devient meilleur quand le niveau de bruit augmente. Cependant, iFB avec $d = 0.5$, produit de meilleures résultats sauf pour les perturbations faibles et il est encore plus performant si on considère la convergence ergodique. Ceci peut être expliqué par le fait que iFB oscille autour de la solution et que la moyennisation apporte ainsi une nette amélioration.

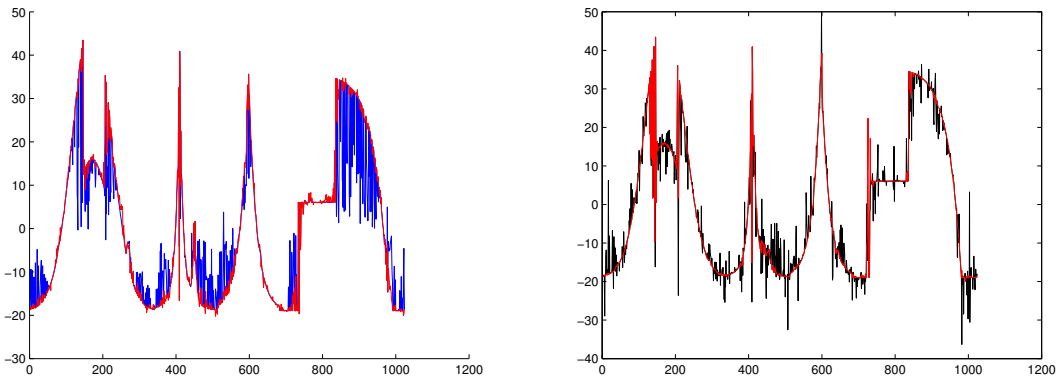


FIGURE 9.2 – Valeurs de $F(x_n) - F(x^*)$ en fonction de n, FB courbe pointillée bleu, FISTA courbe discontinue noire et iFB avec $d = 0.5$ courbe continue rouge. Sur la gauche, on peut comparer FB et iFB : FB n'a pas encore convergé alors que iFB a convergé. Sur la droite, on peut comparer iFB et FISTA pour la même valeur de $\beta = 0.6$: FISTA continue d'osciller autour de la solution et de ce fait n'a pas encore convergé.

Troisième partie

Perspectives

Chapitre 10

Perspectives

Parmi les travaux que je mène actuellement et que je souhaite poursuivre dans les années à venir, certains sont dans la lignée de ceux présentés dans cette HDR et d'autres sont émergents.

Le premier axe que je voudrais approfondir est celui de l'utilisation des certificats duaux exacts et inexacts pour l'identifiabilité et la robustesse pour des régularisations variées et en particulier non polyédrales.

Le deuxième axe est celui de la convergence et de la stabilité des algorithmes proximaux, dans des cadres plus généraux que ceux étudiés précédemment, par exemple dans un cadre stochastique ou non convexe.

Le troisième axe de recherche est plus applicatif et concerne l'utilisation des méthodes parcimonieuses et de la minimisation ℓ_1 pour établir des cartes d'anormalité d'organes en 3 dimensions afin de faire de l'aide au diagnostique précoce.

10.1 Utilisation des certificats duaux

La construction explicite de certificats duaux exacts ou inexacts a été utilisée avec succès pour garantir l'identifiabilité et la robustesses aux perturbations pour la déconvolution, voir Candès et al. [14] et Duval et al. [23]. Il semble que les approches utilisées dans ces travaux peuvent être étendues à des opérateurs plus complexes que des opérateurs de convolution comme la transformée de Radon partielle. J'aimerais voir si dans un premier temps, il est possible de construire des certificats exacts pour des configurations d'angles de mesure particulières. Dans un second temps, j'aimerais voir si on peut construire de tels certificats, ou à défaut des certificats inexacts (voir Candès et al. [8] par exemple sur les certificats duaux inexacts) pour des choix de directions de mesures généraux. Le lien avec le problème continu sous-jacent peut également être fait comme pour la déconvolution. La transformée de Radon semble être un bon premier test dans la mesure où elle est assez proche d'une convolution, mais il faudra voir ensuite dans quelle mesure on peut étendre ces approches à des opérateurs linéaires plus variés.

Un second aspect intéressant des certificats duaux associés à des problèmes sans bruit est qu'ils permettent de contrôler l'erreur commise quand on regarde le problème perturbé, voir [27] ou le chapitre 4. Dans [NDTB14] nous utilisons ces bornes pour établir des certificats duaux optimaux pour la stabilité ℓ_2. L'analyse de Grasmair utilise la divergence de Bregman et fournit des bornes qui ne semblent pas optimales au moins pour la robustesse ℓ_2. En effet par rapport à un contrôle classique d'erreur de la forme $C\varepsilon$ où ε est le niveau de bruit et C une constante contrôlée uniformément comme dans l'analyse par RIP, l'analyse utilisant la divergence de Bregman fait intervenir la racine carré de la parcimonie. Une des questions que je me pose est de savoir s'il est possible d'affiner l'analyse de ces bornes pour proposer des bornes plus fines quitte à énoncer les contrôles pour d'autres normes. La question de l'analyse de ces bornes optimisées ou non dans le cas de régularisations non polyédrales semble également intéressant dans la mesure où la géométrie du problème devient plus complexe.

10.2 Algorithmes proximaux

Ces dernières années ont vu l'explosion du nombre d'algorithmes proximaux de splitting pour minimiser des fonctionnelles convexes structurées. Parmi la multitude de problèmes ouverts sur ces algorithmes, plusieurs questions retiennent mon attention.

La première est celle de la convergence et de la stabilité de FISTA dans un cadre non convexe. La convergence de FB dans un cadre non convexe a été traité par Attouch et al. [3] en utilisant les conditions de Kurdyka-Lojasiewicz, d'autre part avec A. Chambolle nous avons montré, voir chapitre 8, que dans un cadre convexe, la suite des itérés de FISTA était convergente. La preuve proposée utilise plusieurs fois la convexité de l'objective et il serait intéressant de montrer que cette accélération de FB permet d'atteindre un point critique dans un cadre non convexe.

Une autre question concerne la stabilité et la convergence des algorithmes stochastiques liés à FISTA. Les algorithmes proximaux peuvent être utilisés sur des données en grandes dimensions et les modèles d'erreur sur le calcul des opérateurs proximaux et des gradients les plus pertinents sont dans ce cas aléatoires, voir Atchade et al. [2]. Se posent alors les questions de convergence en moyenne des algorithmes et du nombre de mesures à effectuer à chaque étape pour être le plus efficace. Dans ce contexte la notion de convergence ergodique peut aussi avoir un intérêt majeur pour stabiliser les résultats comme nous l'avons vu dans le chapitre 9.

10.3 Minimisation ℓ_1 pour la détection d'anormalité.

Une manière de mesurer l'adéquation d'un signal ou d'une image avec une base de données est de mesurer la parcimonie de celle-ci dans un dictionnaire adapté à la base de données. L'apprentissage de dictionnaire via la minimisation ℓ_1 est une alternative à l'analyse en composantes principales qui permet de mieux représenter des données vivant sur des unions d'espaces de petites dimensions.
Avec Pierrick Coupé, Charles Deledalle et Michèle Allard nous avons expérimenté de mesurer localement sur des images 3D de cerveaux, grâce à des patchs 3D, le score d'images tests calculé grâce à un Basis Pursuit et un dictionnaire appris sur une cohorte de personnes saines.
Ce score de normalité permet de distinguer point par point des populations saines de populations atteintes de la maladie. d'Alzheimer [CDDA15]. Nous pensons qu'il est possible d'utiliser la même approche pour déterminer une carte d'anormalité d'un patient donné afin de déterminer quelles sont les zones du cerveau qui s'écartent de la normalité. À terme nous pensons qu'il est possible de déterminer des signatures d'anormalité de différentes maladies. Cette approche qui est différente de la classification devrait permettre d'exploiter au mieux des bases de données avec un grand nombre de personnes saines et un petit nombre de personnes atteintes de différentes maladies pour faire de l'aide au diagnostique précoce.

Remerciements

L'une des raisons qui fait que ce métier d'enseignant-chercheur est le plus beau du monde est qu'il permet des rencontres avec des gens formidables, intelligents venus d'horizons variés. Rien n'est plus agréable dans mon activité de recherche que de noircir un tableau un café à la main avec un camarade de jeux, l'esprit aux aguets pour essayer de comprendre le sens profond des symboles cabalistiques écrits devant nous. Au moment des remerciements, il me sera difficile de n'oublier personne tant j'ai eu la chance de partager ces moments avec des passionnés comme moi. Que les absents m'excusent par avance. Je commencerai ces remerciements par celui qui m'a initié à la recherche, mon directeur de thèse Stéphane Mallat. C'est avec lui que j'ai découvert ces moments de cogitation une craie à la main suivis de nombreuses heures à essayer de comprendre et à mettre en forme les idées esquissées au tableau. Je remercie également Erwan Le Pennec qui m'a aidé et soutenu durant cette thèse et qui m'a accompagné durant la longue rédaction de mon premier papier. Ta bienveillance m'a permis de franchir les premières étapes de cette carrière en un seul morceau et je t'en suis reconnaissant. Un grand merci à l'IMB et en particulier à l'équipe d'analyse qui m'a accueilli et donné la chance de poursuivre cette belle carrière. Un grand merci également à Alain Yger avec qui j'ai eu le plaisir de m'occuper du master Signal, qui m'a accueilli en tant qu'enseignant à Bordeaux avec la plus grande bienveillance et qui m'a témoigné tout de suite une grande confiance ce qui est important pour le jeune enseignant que j'étais. Je remercie tous mes camarades de l'équipe Image, Jean-François, Nicolas, Charles et Baudouin grâce à qui c'est un grand plaisir d'aller travailler tous les jours. C'est une vraie chance de travailler avec des amis qui ont le bon goût d'être doués en plus d'être sympas. Une spéciale dédicace à notre fragile chef d'équipe JF qui assure sur tous les fronts et nous permet à tous de travailler dans les meilleures conditions tant morales que matérielles. Je voudrais aussi remercier Yannick Berthoumieux et Flavius Turcu qui encadrent avec moi la thèse de Marc Nicodème et qui m'ont fait découvrir la lourde tâche d'encadrant de thèse. Merci à Marc pour son sourire et son inaltérable décontraction au tableau même au milieu des démonstrations géométriques les plus sournoises. Je remercie aussi mes camarades de Pictura avec qui nous travaillons sérieusement et passons des moments aussi détendus qu'agréables avec une spéciale dédicace à Pierrick pour son humour acide qui fait du bien quand on en a besoin. Je remercie également tous mes collaborateurs, de Marie-Line à Nelly en passant par Samuel et Maher avec qui j'ai eu le plaisir d'échanger et de phosphorer. J'adresse un merci spécial à Antonin Chambolle qui m'a permis d'établir le plus joli résultat de ma petite carrière. Travailler avec des gens comme Antonin est une expérience que je souhaite à tout le monde, il rend ses collaborateurs plus intelligents quand il travaille avec eux. Je n'exclus pas de rééditer l'expérience, c'est assez agréable. Je remercie sincèrement les trois rapporteurs qui ont eu la gentillesse de lire mon manuscrit et de prendre le temps de le rapporter. J'ai été très honoré que des collègues aussi talentueux prennent ce temps pour moi et je les remercie aussi pour les rapports qu'ils ont rédigés, pour les mots qu'ils ont choisis. Je remercie bien sûr les membres du jury de se déplacer parfois de loin pour assister à la soutenance et d'avoir pris le temps de lire ce travail, leur présence m'honore également, d'autant que je n'ai choisi que des collègues pour lesquels j'avais la plus grande estime. Je remercie Camille qui a eu la gentillesse de relire ce manuscrit et qui en a extrait un nombre conséquent de coquilles et de fautes diverses et variées. Merci Miss pour ce travail fastidieux. Avant de conclure ces remerciements je voudrais adresser un remerciement particulier à mes deux comparses Gabriel Peyré et Jalal Fadili avec qui j'ai eu la chance de collaborer dans de nombreux travaux. Outre le fait que ce soit deux excellents matheux, des personnes remarquables dans la vie et avec qui on a autant de plaisir à travailler qu'à boire un verre, ils m'ont permis de continuer mes travaux

de recherche à un moment où je gérais seul un master et pendant lequel il n'était pas simple pour moi de mener toutes mes tâches d'enseignant-chercheur de front. Sans eux, je ne suis pas certain que j'aurais pu continuer à être actif en recherche aujourd'hui. Ils m'ont encouragé, aidé, motivé et financé. J'adresse donc un immense merci à mes deux amis. Je remercie enfin ma petite famille, mes deux filles, Elise et Caroline, qui sont deux soleils et qui donnent envie à leur papa de faire de son mieux même quand il fait des maths et ma femme, Christine qui assure en toute circonstance, surtout quand son mari a la tête ailleurs.

Ma bibliographie

[AD15] J. Aujol and C. Dossal. Stability of over-relaxations for the forward-backward algorithm ; applicaion to fista. *SIAM Journal of Optimization*, 2015.

[BDP+13] Y. Berthoumieu, C. Dossal, N. Pustelnik, P. Ricoux, and F. Turcu. An evaluation of the sparsity degree for sparse recovery with deterministic measurement matrices. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, page ..., August 2013.

[BEBD+06] C. Barrera-Esteve, F. Bergeret, C. Dossal, E. GOBET, A. Meziou, R. Munos, and D. Reboul-Salze. Numerical methods for the pricing of Swing options : a stochastic control approach. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 8(4) :517–540, 2006.

[CD15] A. Chambolle and C. Dossal. On the convergence of the iterates of fista. *JOTA*, 2015.

[CDDA15] P. Coupé, C. Deledalle, C. Dossal, and M. Allard. Abnormality detection using sparse-based modeling of brain anatomy : Application to alzheimer's disease. *Preprint*, 2015.

[DCPF12] C. Dossal, M. Chabanol, G. Peyré, and J. Fadili. Sharp support recovery from noisy random measurements by l1 minimization. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 33(1) :24–43, 2012.

[DKF+13] C. Dossal, M. Kachour, J. Fadili, G. Peyré, and C. Chesneau. The degrees of freedom of the Lasso for general design matrix. *Statistica Sinica*, 23(2) :809–828, 2013. Previously entitled "The degrees of freedom of penalized l1 minimization".

[DM05] C. Dossal and S. Mallat. Sparse spike deconvolution with minimum scale. *SPARS workshop*, 2005.

[Dos05] C. Dossal. *Estimation de fonctions géométriques et déconvolution.* Theses, Ecole Polytechnique X, December 2005.

[Dos11] C. Dossal. A necessary and sufficient condition for exact recovery by ℓ_1 minimization. *CRASS*, 2011.

[DP07a] C. Dossal and G. Peyré. Critère d'identifiabilite pour la minimisation l1. In *Gretsi'07*, 2007.

[DP07b] C. Dossal and G. Peyré. Critère d'identifiabilité pour la minimisation L1. In *GRETSI'07*, pages 993–996, Troye, France, September 2007. GRETSI, Groupe d'Etudes du Traitement du Signal et des Images.

[DPF09a] C. Dossal, G. Peyré, and J. Fadili. A Numerical Exploration of Compressed Sampling Recovery. In *SPARS'09, Signal Processing with Adaptive Sparse Structured Representations*, page 5p., Saint-Malo, France, April 2009.

[DPF09b] C. Dossal, G. Peyré, and J. Fadili. Challenging Restricted Isometry Constants with Greedy Pursuit. In *ITW'09*, pages 475–479, Taormina, Italy, October 2009. IEEE.

[DPF10] C. Dossal, G. Peyré, and J. Fadili. A numerical exploration of compressed sampling recovery. *Linear Algebra and Applications*, 432(7) :1663–1679, 2010.

[DPM11] C. Dossal, E. L. Pennec, and S. Mallat. Bandlet Image Estimation with Model Selection. *Signal Processing*, 91(12) :2743–2753, January 2011.

[DT13] C. Dossal and R. Tesson. Consistency of l1 recovery from noisy deterministic measurements. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2013.

[DVP+12a] C. Deledalle, S. Vaiter, G. Peyré, J. Fadili, and C. Dossal. Proximal Splitting Derivatives for Risk Estimation. In *NCMIP'12*, volume 386, page 012003, France, April 2012. Institute of Physics : Open Access Journals.

[DVP+12b] C. Deledalle, S. Vaiter, G. Peyré, J. Fadili, and C. Dossal. Risk estimation for matrix recovery with spectral regularization. In *ICML'2012 workshop on Sparsity, Dictionaries and Projections in Machine Learning and Signal Processing*, Edinburgh, United Kingdom, June 2012. This version is an update of our original paper presented at ICML'2012 workshop on Sparsity, Dictionaries and Projections in Machine Learning and Signal Processing.

[DVP+12c] C. Deledalle, S. Vaiter, G. Peyré, J. Fadili, and C. Dossal. Unbiased risk estimation for sparse analysis regularization. In *Proc. ICIP'12*, 2012.

[KFC+11] M. Kachour, J. Fadili, C. Chesneau, C. Dossal, and G. Peyré. The degrees of freedom of the Lasso in underdetermined linear regression models. In *SPARS 2011*, page 56, Edinburgh, United Kingdom, July 2011.

[NDTB14] M. Nicodème, C. Dossal, F. Turcu, and Y. Berthoumieu. Lipschitz bounds for noise robustness in compressive sensing : two algorithms. In *International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing*, Timisoara, Romania, September 2014.

[PDT+12] N. Pustelnik, C. Dossal, F. Turcu, Y. Berthoumieu, and P. Ricoux. A greedy algorithm to extract sparsity degree for l1/l0-equivalence in a deterministic context. *EUSIPCO 2012*, pages x+5, August 2012.

[PPDM07] G. Peyré, E. L. Pennec, C. Dossal, and S. Mallat. Geometric Estimation with Orthogonal Bandlet Bases. In M. P. Dimitri Van De Ville, Vivek K. Goyal, editor, *SPIE Wavelets XII*, volume 6701 of *SPIE*, pages 67010M.1–67010M.10, San Diego, CA, United States, August 2007. SPIE.

[VDP+12] S. Vaiter, C. Deledalle, G. Peyré, J. Fadili, and C. Dossal. The Degrees of Freedom of the Group Lasso. In *International Conference on Machine Learning Workshop (ICML)*, Edinburgh, United Kingdom, 2012.

[VDP+13] S. Vaiter, C. Deledalle, G. Peyré, C. Dossal, and J. Fadili. Local Behavior of Sparse Analysis Regularization : Applications to Risk Estimation. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 35(3) :433–451, 2013.

[VDP+14] S. Vaiter, C. Deledalle, G. Peyré, J. Fadili, and C. Dossal. The degrees of freedom of partly smooth regularizers. Technical report, Preprint Hal-00981634, 2014.

[VPDF13] S. Vaiter, G. Peyré, C. Dossal, and J. Fadili. Robust Sparse Analysis Regularization. *IEEE Transactions on Information Theory*, 59(4) :2001–2016, 2013.

[VPF+13] S. Vaiter, G. Peyré, J. Fadili, C. Deledalle, and C. Dossal. The degrees of freedom of the group Lasso for a general design. In *SPARS'13*, page 1 page, Lausanne, Switzerland, July 2013.

Références externes

[1] F. Alvarez and H. Attouch. An inertial proximal method for maximal monotone operators via discretization of a nonlinear oscillator with damping. *Set-Valued Anal.*, 9(1-2) :3–11, 2001. Wellposedness in optimization and related topics (Gargnano, 1999).

[2] Y. Atchade, G. Forte, and E. Moulines. On stochastic proximal gradient algoritms. *arxiv*, 2015.

[3] H. Attouch, J. Bolte, and B. Svaiter. Convergence of descent methods for semi-algebraic and tame problems : proximal algorithms, forward-backward splitting, and regularized Gauss-Seidel methods. *Math. Program.*, 137(1-2, Ser. A) :91–129, 2013.

[4] B. Ba and J. Tanner. Bounds of restricted isometry constants in extreme asymptotics : formulae for gaussian matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 441(1) :88–109, 2014.

[5] A. Beck and M. Teboulle. Fast gradient-based algorithms for constrained total variation image denoising and deblurring problems. *IEEE TRANSACTION ON IMAGE PROCESSING*, 2009.

[6] A. Beck and M. Teboulle. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems. *SIAM J. Imaging Sci.*, 2(1) :183–202, 2009.

[7] E. Candès and Y. Plan. Near-ideal model selection by ℓ_1 minimization. *Annals of Statistics*, 37(5A) :2145–2177, 2009.

[8] E. Candès and Y. Plan. A Probabilistic and RIPless Theory of Compressed Sensing. *IEEE Transactions on Inforamtion Theory*, 57(5A) :7235–7254, 2011.

[9] E. Candès and J. Romberg. Quantitative robust uncertainty principles and optimally sparse decompositions. *Foundations of Computational Mathematics*, 6(2) :227–254, 2006.

[10] E. Candès, J. Romberg, and T. Tao. Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Commun. on Pure and Appl. Math.*, 59(8) :1207 ?–1223, 2005.

[11] E. Candès and T. Tao. Near-optimal signal recovery from random projections : universal encoding strategies. *IEEE Trans. Info. Theory*, 52(2) :5406–5425, 2004.

[12] E. Candès and T. Tao. Decoding by linear programming. *IEEE Trans. Info. Theory*, 51(12) :4203–4215, 2005.

[13] E. Candès and T. Tao. Near-optimal signal recovery from random projections : Universal encoding strategies ? *IEEE Trans. Info. Theory*, 52(12) :5406–5425, 2006.

[14] E. Candès and C. Fernandez-Granda. Torward a mathematical theory of super-resolution. *Comm. Pure Appl ? Math*, 67 :906–956, 2014.

[15] E. Candès and T. Tao. The dantzig selector : Statistical estimation when p is much larger than n. *The Annals of Statistics*, 35(6), 2007.

[16] A. Cohen, R. DeVore, and W. Dahmen. Compressed sensing and best k-term approximation. *Journal of the AMS*, 22 :211–231, 2009.

[17] P. Combettes and V. Wajs. Signal recovery by proximal forward-backward splitting. *Multiscale Model. Simul.*, 4(4) :1168–1200, 2005.

[18] M. Davies and R. Gribonval. Restricted Isometry Property and lp sparse recovery failure. In R. Gribonval, editor, *SPARS'09 - Signal Processing with Adaptive Sparse Structured Representations*, Saint Malo, France, Apr. 2009. Inria Rennes - Bretagne Atlantique.

[19] D. Donoho. For most large underdetermined systems of linear equations, the minimal ℓ_1 norm solution is also the sparsest solution. *Commun. on Pure and Appl. Math.*, 59(6) :797–829, 2006.

[20] D. Donoho and J. Tanner. Neighborliness of randomly-projected simplices in high dimensions. *Proc. National Academy of Sciences*, 27(102) :9452–9457, 2005.

[21] D. L. Donoho. High-dimensional centrally symmetric polytopes with neighborliness proportional to dimension. *Discrete & Computational Geometry*, 35(4) :617–652, 2006.

[22] D. L. Donoho. Neighborly polytopes and sparse solutions of underdetermined linear equations. *Technical report Stanford University, Department of Statistics*, 2006.

[23] V. Duval and G. Peyré. Exact support recovery for sparse spikes deconvolution. *to appear in Foundations of Computational Mathematics*, 2014.

[24] S. Foucart and M. Lai. Sparsest solutions of underdetermined linear systems via via ℓ_q-minimization for $0 < q \leq 1$. *to appear in Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2009.

[25] J. Fuchs. On sparse representations in arbitrary redundant bases. *IEEE Trans. Info. Theory*, 50(6) :1341–1344, 2004.

[26] J. Fuchs. Recovery of exact sparse representations in the presence of bounded noise. *IEEE Trans. Info. Theory*, 51 :3601–3608, 2005.

[27] M. Grasmair, O. Scherzer, and M. Haltmeier. Necessary and sufficient conditions for linear convergence of l1 regularization. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 64 :161–182, 2011.

[28] R. Gribonval and M. Nielsen. Sparse representations in unions of bases. *IEEE Trans. Info. Theory*, 49(12) :3320–3325, 2003.

[29] O. Güler. New proximal point algorithms for convex minimization. *SIAM J. Optim.*, 2(4) :649–664, 1992.

[30] D. Lorenz and T. Pock. An inertial forward-backward algorithm for monotone inclusions. *J. Math. Imaging Vision*, pages 1–15, 2014. (online).

[31] S. Mallat and Z. Zhang. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Trans. Signal Proc.*, 41(12) :3397–3415, Dec. 1993.

[32] A. Moudafi and M. Oliny. Convergence of a splitting inertial proximal method for monotone operators. *J. Comput. Appl. Math.*, 155(2) :447–454, 2003.

[33] Y. Nesterov. A method for solving the convex programming problem with convergence rate $O(1/k^2)$. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 269(3) :543–547, 1983.

[34] P. C. . J. Pesquet. Proximal splitting methods in signal processing. *Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering*, 2011.

[35] R. Rockafellar. *Convex Analysis*. Convex Analysis. Princeton University Press, 1997.

[36] M. Rudelson and R. Vershynin. On sparse reconstruction from fourier and gaussian measurements. *Comm. Pure Appl. Math*, page 1045.

[37] S. Salzo and S. Villa. Inexact and accelarated proximal point algorithms. *Journal of convex analysis*, 2012.

[38] F. Santosa and W. Symes. Linear inversion of ban limit reflection seismograms. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7(4) :1307–1330, Oct. 1986.

[39] M. Schmidt, N. L. Roux, and F. Bach. Convergence rates of inexact proximal-gradient methods for convex optimization. *Technical Report*, 2011.

[40] J. Tropp. Greed is good : algorithmic results for sparse approximation. *IEEE Trans. Info. Theory*, 50(10) :2231–2242, 2004.

[41] J. Tropp. Just relax : convex programming methods for identifying sparse signals in noise. *IEEE Trans. Info. Theory*, 52(3) :1030–1051, 2006.

[42] J. Tropp. Norms of random submatrices and sparse approximation. *C. R. Math. Acad. Sci.*, 346 :1271–1274, 2008.

[43] A. P. V. Chandrasekaran, B. Recht and A. Willsky. The convex geometry of linear inverse problems. *Found Comput Math*, 12(1) :805–849, 2012.

[44] M. Wainwright. Sharp thresholds for high-dimensional and noisy sparsity recovery using ℓ^1-constrained quadratic programs. *IEEE Trans. Info. Theory*, 55(5) : , May 2009.