Tableaux des dérivées

On rappelle les dérivées des fonctions usuelles ainsi que les formules générales de dérivation.

Fonction	Domaine de dérivabilité	Dérivée
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\arccos(x)$	$]-1;1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin(x)$	$]-1;1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$	$\sinh(x)$
$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$	$\cosh(x)$
$\tanh(x)$	$\mathbb{R}$	$1-\tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$

Opération	Dérivée
$f+g$	$f'+g'$
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$g \circ f$	$f' \times g' \circ f$
$(f \cdot g)^{(n)}$	$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$
$\left(f^{-1}\right)'$	$\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^*$	$\alpha u' u^{\alpha-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\exp(u)$	$u' \exp(u)$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$

Quelques formules de trigonométrie vraiment utiles. a, b et x sont des réels (quelconques) :

$$\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1, \quad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \quad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b),$$
$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x), \quad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2},$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x), \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Pour étudier certaines courbes paramétrées faisant intervenir $\sin$ et $\cos$, il est parfois utile d'effectuer le changement de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$, d'où les formules suivantes :

$$\cos(x) = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}, \qquad \sin(x) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Et tant qu'on y est, une factorisation utile (formules de l'arc-moitié) :

$$e^{\mathrm{i}\alpha} + e^{\mathrm{i}\beta} = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\exp\left(\mathrm{i}\frac{\alpha+\beta}{2}\right), \quad e^{\mathrm{i}\alpha} - e^{\mathrm{i}\beta} = 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\exp\left(\mathrm{i}\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Développements limités usuels en 0

Les développements limités usuels suivants sont à connaître par coeur !

e^x	$= 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \circ(x^n)$	Taylor-Young
$\sin(x)$	$= x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+2})$	Taylor-Young
$\cos(x)$	$= 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n+1})$	par dérivation de $\sin$
$\dfrac{1}{1-x}$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \circ(x^n)$	Taylor-Young
$\dfrac{1}{1+x}$	$= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \circ(x^n)$	composition par $-x$
$\ln(1-x)$	$= -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \cdots - \dfrac{x^n}{n} + \circ(x^n)$	intégration de $\dfrac{1}{1-x}$
$\ln(1+x)$	$= x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + \circ(x^n)$	composition par $-x$
$\arctan(x)$	$= x - \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+2})$	intégration de $\dfrac{1}{1+x^2}$
$(1+x)^\alpha$	$= 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \circ(x^n)$	Taylor-Young
$\sqrt{1+x}$	$= 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{1 \times 3 \times \cdot \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} x^n + \circ(x^n)$	Taylor-Young ou $\alpha = \frac{1}{2}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$	$= 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8} x^2 + \cdots + (-1)^n \dfrac{1 \times 3 \times \cdot \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} x^n + \circ(x^n)$	Taylor-Young ou $\alpha = -\frac{1}{2}$
$\arcsin(x)$	$= x + \dfrac{x^3}{6} + \cdot + \dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+2})$	intégration de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan(x)$	$= x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15} x^5 - \dfrac{17}{315} x^7 + \circ(x^8)$	par division
$\sinh(x)$	$= x + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+3})$	somme de e^x et e^{-x}
$\cosh(x)$	$= 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n+1})$	somme de e^x et e^{-x}

Tableau des primitives

Fonction	Intervalle d'intégration	Primitive
$(x-a)^n, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}$
$\frac{1}{x-a}, a \in \mathbb{R}$	$]-\infty; a[$ OU $]a; +\infty[$	$\ln(\lvert x-a \rvert)$
$\frac{1}{(x-a)^n}, a \in \mathbb{R}, n \geq 2$	$]-\infty; a[$ OU $]a; +\infty[$	$-\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$
$\cos(ax), a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}\sin(ax)$
$\sin(ax), a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{a}\cos(ax)$
$\tan(x)$	$]k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}[, k \in \mathbb{Z}$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$x\ln(x) - x$
$e^{ax}, a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}e^{ax}$
$(x-a)^\alpha, a \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$]a; +\infty[$	$\frac{1}{\alpha+1}(x-a)^{\alpha+1}$
$a^x, a > 0$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\ln(a)}a^x$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	arctan(x)
$\sqrt{x-a}, a \in \mathbb{R}$	$]a; +\infty[$	$\frac{2}{3}(x-a)^{3/2}$
$\frac{1}{\sqrt{x-a}}, a \in \mathbb{R}$	$]a; +\infty[$	$2\sqrt{x-a}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1; 1[$	arcsin(x)