

### Tableaux des dérivées et primitives et quelques formules en prime

Fonction	Domaine de dérivabilité	Dérivée
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$\frac{1}{x}$
$e^x$	$\mathbb{R}$	$e^x$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\arccos(x)$	$] -1; 1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin(x)$	$] -1; 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$

Opération	Dérivée
$f + g$	$f' + g'$
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$g \circ f$	$f' \times g' \circ f$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$u^n$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$e^u$	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$

Fonction	Intervalle d'intégration	Primitive
$(x-a)^n, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}$
$\frac{1}{x-a}, a \in \mathbb{R}$	$] -\infty; a[ \text{ OU } ]a; +\infty[$	$\ln( x-a )$
$\frac{1}{(x-a)^n}, a \in \mathbb{R}, n \geq 2$	$] -\infty; a[ \text{ OU } ]a; +\infty[$	$-\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$
$\cos(ax), a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a} \sin(ax)$
$\sin(ax), a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{a} \cos(ax)$
$\tan(x)$	$]k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}[, k \in \mathbb{Z}$	$-\ln( \cos(x) )$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$x \ln(x) - x$
$e^{ax}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a} e^{ax}$
$(x-a)^\alpha, a \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$]a; +\infty[$	$\frac{1}{\alpha+1}(x-a)^{\alpha+1}$
$a^x, a > 0$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\ln(a)} a^x$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$
$\sqrt{x-a}, a \in \mathbb{R}$	$]a; +\infty[$	$\frac{2}{3}(x-a)^{3/2}$
$\frac{1}{\sqrt{x-a}}, a \in \mathbb{R}$	$]a; +\infty[$	$2\sqrt{x-a}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1; 1[$	$\arcsin(x)$

**Quelques formules de trigonométrie vraiment utiles.**  $a, b$  et  $x$  sont des réels (quelconques) :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1, \quad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \quad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b),$$

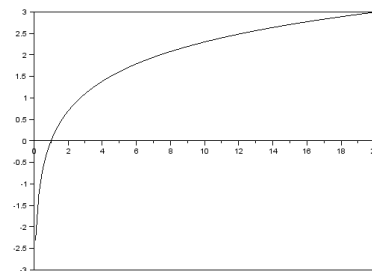
$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x), \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2},$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x), \quad \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

## Fonctions usuelles : logarithme et exponentielle, fonction puissance, fonctions circulaires et leurs réciproques

**Définition 1** (Logarithme). On définit  $\ln : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  comme **la** primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  qui s'annule en 1.

1.  $\ln$  est continue et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .
2.  $\forall x, y \in ]0, +\infty[, \ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ .
3.  $\forall x > 0, \ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$ .
4.  $\forall x, y \in ]0, +\infty[, \ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$ .
5.  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \ln(x^n) = n \ln(x)$ .
6.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

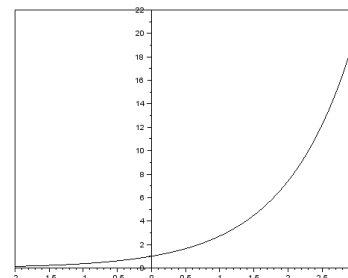


### Propriété 1.

**Définition 2** (Exponentielle). On définit  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  comme **la** solution de l'équation différentielle  $y' = y$  de condition initiale  $y(0) = 1$ .

On note  $\exp(x) = e^x$ .

1.  $\exp$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
2.  $\forall x, y \in \mathbb{R}, e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ .
3.  $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = 1/e^x$ .
4.  $\forall x, y \in \mathbb{R}, e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ .
5.  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, e^{nx} = (e^x)^n$ .
6.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ .



### Propriété 2.

**Propriété 3.** On a  $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$  et  $\forall x > 0, e^{\ln(x)} = x$ .

**Définition 3** (Fonction puissance). Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On définit la *fonction puissance* sur  $]0, +\infty[$  par  $p_a(x) := e^{a \ln(x)}$ . On note  $x^a := e^{a \ln(x)}$ .

### Exemples :

$$\ln(x^2) = 2 \ln(x), \quad e^{2x+y} = e^{2x} \cdot e^y, \quad 2^x = e^{x \ln(2)}, \quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \ln(x)}, \quad \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3} \ln(x)}.$$

**Croissances comparées :** Pour tous  $\alpha > 0, \beta > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$$

Autrement dit, l'exponentielle impose toujours sa limite en  $\pm\infty$  aux fonctions puissances, et celles-ci imposent toujours leur limites en  $0^+$  ou  $+\infty$  au logarithme.

## Fonctions circulaires réciproques

On suppose connues les fonctions *sinus* et *cosinus*. On rappelle que la fonction *tangente* est définie sur  $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

### Valeurs spéciales des fonctions trigonométriques

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

## Formules de trigonométrie

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \tan(x + \pi) = \tan(x)$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \quad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

**Définition 4** (Arcsinus). Sinus est une bijection de  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  sur  $[-1; 1]$ . On appelle *arcsinus* sa réciproque.

$$\forall x \in [-1; 1], \forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \quad x = \sin(\theta) \Leftrightarrow \arcsin(x) = \theta.$$

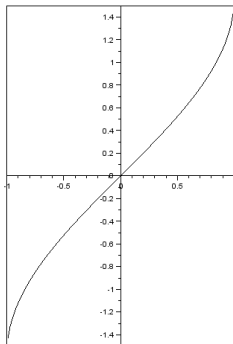
**Définition 5** (Arccosinus). Cosinus est une bijection de  $[0; \pi]$  sur  $[-1; 1]$ . On appelle *arccosinus* sa réciproque.

$$\forall x \in [-1; 1], \forall \theta \in [0; \pi], \quad x = \cos(\theta) \Leftrightarrow \arccos(x) = \theta.$$

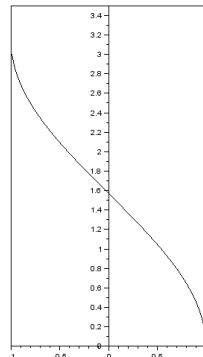
**Définition 6** (Arctangente). Tangente est une bijection de  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  sur  $\mathbb{R}$ . On appelle *arctangente* sa réciproque.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \theta \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \quad x = \tan(\theta) \Leftrightarrow \arctan(x) = \theta.$$

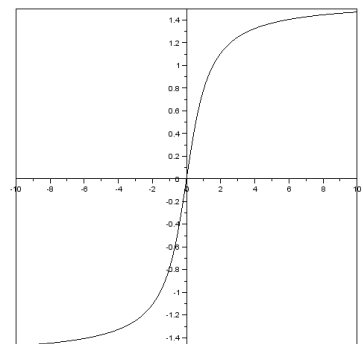
Arcsinus



Arccosinus



Arctangente



- $\forall x \in [-1; 1], \sin(\arcsin(x)) = x.$

**Propriété 4.**

- $\forall x \in [-1; 1], \cos(\arccos(x)) = x.$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x.$

**Ici  $x$  appartient au domaine de définition de la fonction réciproque.**

- $\forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \arcsin(\sin(\theta)) = \theta.$

**Propriété 5.**

- $\forall \theta \in [0; \pi], \arccos(\cos(\theta)) = \theta.$

- $\forall \theta \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan(\theta)) = \theta.$

**★ Attention, ici  $\theta$  ne parcourt pas tout l'ensemble de définition des fonctions sinus, cosinus ou tangente !**

**Exemples :**

- $\arcsin(\sin(\frac{17\pi}{5})) = \arcsin(\sin(\frac{20\pi}{5} - \frac{3\pi}{5})) = \arcsin(\sin(-\frac{3\pi}{5})) = -\frac{3\pi}{5}.$

- $\arccos(\cos(\frac{17\pi}{5})) = \arccos(\cos(\frac{20\pi}{5} - \frac{3\pi}{5})) = \arccos(\cos(-\frac{3\pi}{5})) = \arccos(\cos(\frac{3\pi}{5})) = \frac{3\pi}{5}.$

- $\arctan(\tan(\frac{17\pi}{5})) = \arctan(\tan(-\frac{3\pi}{5})) = -\frac{3\pi}{5}.$

**Dérivées :** Les fonctions arcsinus et arccosinus sont (infiniment) dérivables sur  $]-1; 1[$  et arctangente est (infiniment) dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Leurs dérivées sont données par

**Propriété 6.** 1.  $\forall x \in ]-1; 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

- $\forall x \in ]-1; 1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$