Exercice 1. Question de cours :

1) $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, |u_n - u_m| \leq \varepsilon$.

2) $(u_n)_{\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \geq M$.

3) On suppose $q \neq 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Remarque : si $q = 1$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = n+1$.

Exercice 2. Une gentille étude de suite :

1) Par récurrence : Pour $n = 1, u_1 = 1 < 2$. Ok.
On suppose que $u_n < 2$ au rang $n \geq 1$. Alors $\dfrac{u_n}{2} < 1$ donc $1 + \dfrac{u_n}{2} < 2$, c'est-à-dire $u_{n+1} < 2$.
Par récurrence, on en déduit que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < 2.}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = 1 - \dfrac{u_n}{2}$. Or, d'après la question précédente, pour $n \in \mathbb{N}^*, u_n < 2$ donc $\dfrac{u_n}{2} < 1 \Rightarrow -\dfrac{u_n}{2} > -1 \Rightarrow 1 - \dfrac{u_n}{2} > 0$. C'est-à-dire, pour $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n > 0$, donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$

3) $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée d'après les 2 questions précédentes, donc $\underline{(u_n) \text{ est convergente}}$ (et, grâce à la question 1, on a $l := \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq 2$).

La suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donc elle converge aussi vers l. On déduit alors de $u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{2}$ que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{u_n}{2}\right)$. D'où $l = 1 + \dfrac{l}{2} \Leftrightarrow \dfrac{l}{2} = 1 \Leftrightarrow l = 2$. Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 2.}$

Exercice 3. Calculs de limites :

1) Soit $n \geq 2$. Comme $-1 \leq \cos(n) \leq 1$, on a $-\dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} \leq a_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}+(-1)^n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} = 0$. Par le théorème d'encadrement des limites, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0.}$

2) Soit $n \geq 1$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ (croissance comparée) donc, par continuité de la fonction exp en 0, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right) = e^0 = 1$. Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1.}$