Exercice 1 : c'est du déjà vu...

1) Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a < b \in I$. Alors pour tout $y \in [f(a); f(b)]$ il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = y$.

Si f est une fonction polynômiale de degré impair n, de coefficient dominant a_n. On suppose $a_n > 0$; alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Donc $\exists A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \leq A, f(x) \leq -1$ et $\exists B \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \geq B, f(x) \geq 1$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f sur $[A; B]$, donc il existe $c \in [A; B]$ tel que $f(x) = 0$.

2) Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

On suppose que f s'annule en $a_1, \cdots, a_k$ avec $k \geq 2$. D'après les hypothèses, pour $\ell \in \{1; \cdots; k-1\}$, f est continue sur $[a_\ell; a_{\ell+1}]$, dérivable sur $]a_\ell; a_{\ell+1}[$ et $f(a_\ell) = f(a_{\ell+1}) = 0$. On applique le théorème de Rolle sur ces $k-1$ intervalles, donc il existe $b_1, \cdots, b_{k-1} \in]a_1; a_2[, \cdots,]a_{k-1}; a_k[$ respectivement tels que $f'(b_i) = 0$.

Exercice 2 : on taffe dur...

1) Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Alors $\exists c \in]a; b[, f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

2) Soient $0 < x < y \in \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $[x; y]$, dérivable sur $]x; y[$, donc, d'après le théorème des accroissements finis, $\exists c \in]x; y[, f(y) - f(x) = (y-x)f'(c)$. D'où $\ln(y) - \ln(x) = \dfrac{y-x}{c}$. Or $x < c < y \Leftrightarrow \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{c} \leq \dfrac{1}{x}$. Donc $\dfrac{1}{y} \leq \dfrac{\ln(y) - \ln(x)}{y-x} \leq \dfrac{1}{x}$ (puisque $y - x > 0$).

3) Soit f une fonction de classe C^n sur $[a; b]$ et telle que $f^{(n)}$ soit dérivable sur $]a; b[$. Alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x \in]a;b[} |f^{(n+1)}(x)|.$$

4) La fonction $f : x \mapsto \cos(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (-1)^p \cos(x)$ si $n = 2p$ et $f^{(n)}(x) = (-1)^{p+1} \sin(x)$ si $n = 2p+1$. Pour $x = 0$, l'inégalité est vraie. On suppose $x > 0$. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 6 sur $[0; x]$ (respectivement, $[x; 0]$ si $x < 0$). Comme $f^{(k)}(0) = 0$, pour k impair et $f^{(2)}(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 1$, on a

$$\left| \cos(x) - \sum_{k=0}^{5} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| = \left| \cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \right| \leq \frac{x^6}{6!} \sup_{t \in]0;x[} |\cos(t)| \leq \frac{x^6}{6!}.$$

Exercice 3 : "Dure limite"...

1) On sait que $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \circ(x^2)$.

2) On a $\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \circ(x^2)\right)$ d'après le développement limité de $\cos(x)$; puis, par composition avec le développement limité de $\ln(1+x)$, $\ln(\cos(x)) = -\dfrac{x^2}{2} + \circ(x^2)$.

(Imaginez que $X = -\dfrac{x^2}{2} + \circ(x^2)$ et on utilise $\ln(1+X) = X + \circ(X)$.)

3) D'après ce qui précède $\dfrac{1}{x^2}\ln(\cos(x)) = \dfrac{1}{x^2} \times \left(-\dfrac{x^2}{2} + \circ(x^2)\right) = -\dfrac{1}{2} + \circ(1)$.

C'est-à-dire $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\ln(\cos(x)) = -\dfrac{1}{2}$.