Exercice 1 : c'est parti !

1) Soient u et v 2 fonctions de classe C^1 sur $[a;b]$.

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

2) On doit calculer $\displaystyle\int (x-1)\cos(x)dx$. On fait une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int (x-1)\cos(x)dx =& \big[(x-1)\sin(x)\big] - \int \sin(x)dx\\ u(x) = x-1 \quad & u'(x) = 1\\ v'(x) = \cos(x) \quad & v(x) = \sin(x)\\ =& (x-1)\sin(x) + \cos(x).\end{aligned}$$

Donc <u>la fonction $F : x \mapsto (x-1)\sin(x)+\cos(x)$ est une primitive de $f : x \mapsto (x-1)\cos(x)$.</u>

Remarque : comme f est continue sur $\mathbb{R}$, F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3) **Bonus :** les primitives de f sont les fonctions $x \mapsto (x-1)\sin(x)+\cos(x)+C$ avec $C \in \mathbb{R}$. La primitive de f qui s'annule en 0 vérifie donc $F(0) = 0$:

$$F(0) = 0 \Leftrightarrow \cos(0) + C = 0 \Leftrightarrow C = -1.$$

Donc la primitive de f qui s'annule en 0 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{x \mapsto (x-1)\sin(x)+\cos(x)-1.}$

Exercice 2 : ça change tout...

1) Soient f une fonction continue sur $[a;b]$ et φ une fonction de classe C^1 sur $[a;b]$. Alors

$$\int_a^b f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

2) On calcule $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx$. On effectue le changement de variables $u = \sin(x)$; alors $u' = \cos(x)$ (c'est-à-dire $f(t) = t^2, \varphi(x) = \sin(x), \varphi'(x) = \cos(x)$). D'où

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx &= \int_{\sin(0)}^{\sin(\frac{\pi}{2})} u^2du = \int_0^1 u^2du\\ &= \left[\frac{1}{3}u^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx = \frac{1}{3}.}$

Exercice 3 : il faut l'intégrer !

Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a;b]$. Alors la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est bien définie et continue sur $[a;b]$.

De plus, si f est continue en $x_0 \in I$ alors F est dérivable en x_0 et on a $F'(x_0) = f(x_0)$.